Qualité d'une solution approchée d'un problème d'élasticité linéaire

Théorème de Pythagore dans l'espace des contraintes Soit $(\underline{U}_{ex}, \underline{\underline{\sigma}}_{ex})$ la solution exacte du problème d'élasticité et $(\underline{U}_{CA}, \underline{\underline{\sigma}}_{SA})$ un couple admissible quelconque. On a :

$$||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||^2 = ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}_{SA}||^2 + ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||^2$$

Démonstration : En écrivant les normes avec le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||^2 &= \big((\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})) ; (\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA}))\big) \\
&= \big((\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) + (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})) ; (\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) + (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA}))\big) \\
&= ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}_{SA}||^2 + ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||^2 + 2\big((\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) ; (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA}))\big)
\end{aligned}$$

Or les deux champs $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ et $\underline{U}^\star$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}^\star & = \underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\sigma}}_{ex} \\ \underline{U}^\star & = \underline{U}_{ex} - \underline{U}_{CA} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}^\star & = \underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\sigma}}_{ex} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}^\star) & = \underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA}) \end{array}\right.$$

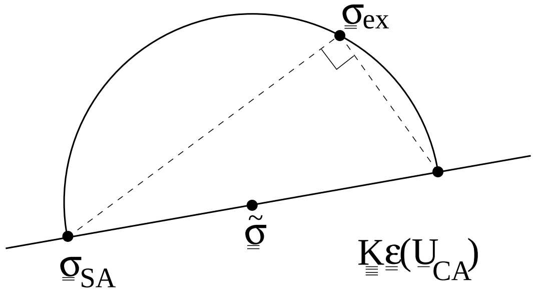
sont tels que $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ est *Statiquement Admissible à zéro* et $\underline{U}^\star$ est *Cinématiquement Admissible à zéro*. Donc, d'après la propriété d'orthogonalité, $\underline{\underline{\sigma}}^\star$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}^\star)$ sont orthogonaux entre eux, soit :

$$\big(\underline{\underline{\sigma}}^\star ; \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}^\star)\big) = \big((\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) ; (\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA}))\big) = 0$$

donc :

$$||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||^2 = ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}_{SA}||^2 + ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||^2$$

Illustration :



Conséquences

$$||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}_{SA}|| \leq ||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})|| \quad \text{et} \quad ||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})|| \leq ||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||$$

En notant :

$$\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{2}\Big(\underline{\underline{\sigma}}_{SA} + \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})\Big)$$

On a alors une information sur la *qualité globale* du champ $\underline{\underline{\sigma}}_{SA}$ par rapport au champ de contrainte exacte $\underline{\underline{\sigma}}_{ex}$ sans connaitre ce dernier :

$$\frac{||\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \tilde{\underline{\underline{\sigma}}}||}{\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}} = \frac{||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||}{||\underline{\underline{\sigma}}_{SA} + \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\varepsilon(\underline{U}_{CA})||}$$