Exercice de Cinématique des Milieux Continus

Un fluide s'écoule dans la région située entre deux demi-plans perpendiculaires. On considère le repère cartésien orthonormé (O, e_i) tel que les deux demi-plans soient $(x_1 = 0,\ x_2 \geq 0)$ et $(x_1 \geq 0,\ x_2 = 0)$, et que la région occupée par le fluide soit $(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$. Dans ce repère, la description lagragienne du mouvement du fluide nous est donnée par les équations :

$$\begin{cases} x_1(X_i, t) &=& X_1 exp(\frac{t}{\tau}) \\ x_2(X_i, t) &=& X_2 exp(-\frac{t}{\tau}) \\ x_3(X_i, t) &=& X_3 \end{cases}$$

Les X_i sont les coordonnées d'une particule dans la configuration de référence, et les x_i sont les coordonnées de la particule au temps t. La constante $\tau > 0$ est le temps caractéristique de l'écoulement.

1. Donner la description eulerienne du mouvement.
2. Déterminer le tenseur des déformations de Green-Lagrange noté $\underline{\underline{E}}(X_i, t)$.
3. Calculer le déplacement $\underline{U}(X_i, t)$.
4. Expliciter les hypothèses afin d'avoir une transformation infitésimale, *ie* $\|\frac{\partial U}{\partial \underline{M}_0}\| \ll 1$.
   On pourra utiliser la norme infinie définie par :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^{3} |A_{ij}|$$

5. En déduire le tenseur des déformations linéarisé noté $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U})$.

Eléments de correction

1. Description eulerienne du mouvement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{\tau}x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau}x_2 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

2.

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{M}}{\partial \underline{M}_0} = \begin{bmatrix} exp(\frac{t}{\tau}) & 0 & 0 \\ 0 & exp(-\frac{t}{\tau}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sachant que $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})$, on en déduit que :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \exp(2\frac{t}{\tau}) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-2\frac{t}{\tau}) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\underline{U}(X_i, t) = \underline{OM}(X_i, t) - \underline{OM}_0 = \begin{Bmatrix} X_1(exp(\frac{t}{\tau}) - 1) \\ X_2(exp(-\frac{t}{\tau}) - 1) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4.

$$\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}_0} = \begin{bmatrix} \exp(\frac{t}{\tau}) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{t}{\tau}) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{M}_0}\|_\infty = exp(\frac{t}{\tau}) - 1$$

La transformation est infitésimale si :

$$\frac{t}{\tau} \ll 1$$

5.

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{U}) = \begin{bmatrix} \exp(\frac{t}{\tau}) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{t}{\tau}) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$