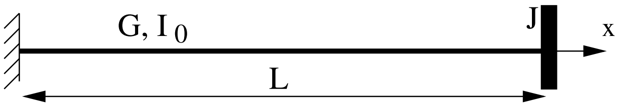
Vibration des Systèmes Continus

Sans document ni calculatrice - Durée conseillée : une heure

Exercice 1 *Vibrations de torsion d'un arbre muni d'un volant d'inertie.*

On s'intéresse aux mouvements de vibration de torsion d'un arbre supportant un volant d'inertie. L'arbre a une longueur L et sa section a un moment quadratique en torsion constant I_0. Le module de cisaillement du matériau de l'arbre est G et ρ est sa masse volumique. La section sitiée en $x = 0$ est encastrée. On considère que l'inertie massique J du volant est telle que $J = \rho I_0 L$.



Dans ce mouvement de vibration, on note $\theta(x,t)$ l'angle de rotation autour de l'axe $\vec{x}$ d'une section de l'arbre située à l'abscisse x. $M_t(x,t)$ est le moment de torsion dans l'arbre.

1. Solution exacte du problème de vibration
   (a) Exprimer l'équation du mouvement vérifiée par la rotation $\theta(x,t)$ à tout instant et en tout point.
   (b) Préciser les conditions sur $\theta(x,t)$ et ses dérivées induites par les conditions aux limites, sachant qu'en $x = L$ la poutre subit un moment nécessaire à l'entrainement du volant :
   $$M_t(L,t) = -J\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}$$
   (c) Montrer que les solutions particulières en variables séparées pour cette équation d'équilibre sont de la forme :
   $$\theta(x,t) = \{A\sin\frac{\omega x}{c} + B\cos\frac{\omega x}{c}\}\{C\sin\omega t + D\cos\omega t\} \qquad \text{avec} \quad c^2 = \frac{G}{\rho}$$
   (d) Montrer que pour les conditions aux limites du problème, les pulsations propres ω du système sont solution de l'équation :
   $$\frac{\omega L}{c}\tan(\frac{\omega L}{c}) = 1$$
   (e) En déduire la première fréquence propre f_0 du système ainsi que la forme du mode associé.

2. Solution approchée pour la première fréquence propre.
   (a) Proposer un système à un degré de liberté (1 ddl) équivalent à ce système continu.
   (b) Exprimer la raideur équivalente de ce système 1ddl.
   (c) Dans un premier temps, on néglige l'inertie de l'arbre devant celle du volant. Donner la masse équivalente du système 1ddl. En déduire une approximation de la première fréquence propre du système. Comparer avec la solution exacte.
   (d) On suppose maintenant que l'inertie de l'arbre n'est pas négligeable et que la forme qu'il prend pendant le mouvement de vibration de torsion est celle qu'il prend en statique sous l'action d'un couple $C\vec{x}$ appliqué en $x = L$. Donner alors la masse équivalente du système 1ddl. En déduire une seconde approximation de la première fréquence propre du système. Comparer avec la solution exacte.

Rappels :

- Equation de comportement en torsion : $M_t(x,t) = GI_0\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$
- Equation d'équilibre local en torsion : $\frac{\partial M_t(x,t)}{\partial x} = \rho I_0\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$
- Première racine positive de l'équation $\alpha\tan\alpha - 1 = 0$: $\alpha_0 = 0.86033$.

Eléments de correction

1. Solution exacte
   (a) Equation du mouvement : $\frac{G}{\rho}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$
   (b) Conditions aux limites :
   $$\theta(0,t) = 0, \quad \forall t \qquad , \qquad GI_0\frac{\partial\theta(L,t)}{\partial x} = -\rho I_0 L\frac{\partial^2\theta(l,t)}{\partial t^2}, \quad \forall t$$
   (c) Variables séparées : $\theta(x,t) = \Theta(x)T(t)$ avec :
   $$\frac{c^2}{\Theta(x)}\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = cste = -\omega^2 \Rightarrow \Theta(x) = \{A\sin\frac{\omega x}{c} + B\cos\frac{\omega x}{c}\} \quad , \quad T(t) = \{C\sin\omega t + D\cos\omega t\}$$
   (d) Conditions aux limites :
   $$(x=0) \Rightarrow B = 0 \qquad , \qquad (x=L) \Rightarrow GA\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega L}{c} = \rho L A\omega^2\sin\frac{\omega L}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega L}{c}\tan(\frac{\omega L}{c}) = 1$$
   (e) Premier mode :
   $$\frac{\omega_0 L}{c} = 0.86033 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{0.86033}{2\pi L}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad \text{Forme : } \Theta_0(x) = \sin(0.86033\frac{x}{L})$$

2. Premier mode approché
   (a) Système 1ddl formé d'un ressort de torsion et d'une inertie. Le paramètre du mouvement est $\theta(L,t)$.
   (b) Solution statique : arbre sous l'action d'un couple $C\vec{x}$ en $x = L$:
   $$M_t(x) = C \quad \Rightarrow \quad \theta(x) = \frac{C}{GI_0}x \quad \Rightarrow \quad \theta(L) = \frac{CL}{GI_0} \quad \Rightarrow \quad k_{eq} = \frac{C}{\theta(L)} = \frac{GI_0}{L}$$
   (c) Inertie de l'arbre négligée : $m_{eq} = J = \rho I_0 L$:
   $$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad > \qquad f_{0_{exacte}} = \frac{0.86033}{2\pi L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$
   (d) Forme sous l'action d'un couple :
   $$\theta(x,t) = \theta(L,t)\frac{x}{L} \quad \Rightarrow \quad \dot\theta(x,t) = \dot\theta(L,t)\frac{x}{L}$$
   Inertie équivalente :
   $$m_{eq} = J + \int_0^L \rho I_0(\frac{x}{L})^2 dx = \rho I_0 L + \rho I_0\frac{L}{3} = \frac{4}{3}\rho I_0 L$$
   Nouvelle approximation
   $$f_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{0.86603}{2\pi L}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad > \qquad f_{0_{exacte}} = \frac{0.86033}{2\pi L}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$