Vibration des Systèmes Continus

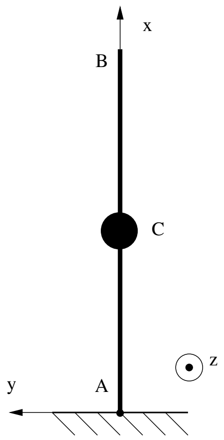
Sans document - Durée conseillée : une heure

Exercice 1 *Vibrations de flexion d'une tige*

On s'intéresse aux mouvements de vibration de flexion d'une tige flexible AB encastrée en A, libre en B et supportant une masse en son centre C. On souhaite obtenir une approximation de la fréquence fondamentale de la structure par différentes approches.

On ne s'intéresse qu'aux mouvements dans le plan (x, y). La tige a une longueur $2L$ et elle est modélisée par une poutre de Bernoulli. Les sections de la tige ont une surface S et une inertie quadratique autour de z notée I. Le module de d'Young du matériau de la tige est E et ρ est sa masse volumique. La masse placée en C est noté M.

Dans ce mouvement de vibration, on note $v(x, t)$ le déplacement transversal (direction y) d'une section de la tige située à l'abscisse x (l'origine des abscisses étant prise en A). Les effets de pesanteur sont négligés.



1. *Première approche* : dans un premier temps, on cherche une approximation par analogie avec un système à un dégré de liberté équivalent. On considère que le système est majoritairement entrainé en mouvement par la masse M.
   (a) Quelle variable de déplacement utiliser pour l'équivalence ?
   (b) Donner l'expression de la raideur équivalente du système 1ddl.
   (c) On considère que la masse de la tige est faible devant M. Définir la masse équivalente.
   (d) En déduire une approximation de la fréquence fondamentale du système.
   (e) Donner une nouvelle approximation en définissant, par une équivalence énergétique, une masse équivalente qui tienne compte de la masse de la tige. On utilisera pour cela la forme de la tige la plus simple qui soit.
2. *Deuxième approche* : On cherche maintenant une approximation de cette fréquence en utilisant la méthode du quotient de Rayleigh.
   (a) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système pendant le mouvement.
   (b) Donner l'expression de l'énergie potentielle du système pendant le mouvement.
   (c) Donner l'expression du quotient de Rayleigh d'une forme spatiale test $V(x)$ pour une telle modélisation. Rappeler l'origine des termes de ce quotient. Préciser les hypothèses sur la forme test. Expliquer comment ce quotient peut donner une approximation de la fréquence fondamentale.
   (d) On prend comme forme test la fonction x^2. Construire l'approximation de la fréquence fondamentale.
   (e) Donner une nouvelle approximation *plus mécanique* en considérant que le système est principalement entrainé par la translation de la masse M.
   (f) Sans faire de calcul, expliquer comment construire une approximation par cette méthode lorsqu'on considère que le système est majoritairement entrainé par la masse répartie de la tige.

Formulaire : déformée d'un poutre AB de longeur $2L$, encastrée en A, libre en B et soumise à un effort F en son centre C

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{F}{EI}(\dfrac{Lx^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}), & 0 \leq x \leq L, \quad \text{sur AC} \\ \dfrac{F}{EI}(\dfrac{L^2}{2}x - \dfrac{L^3}{6}), & L \leq x \leq 2L, \quad \text{sur CB} \end{cases}$$

Eléments de correction

1. *Première approche* :
   (a) La variable de déplacement est : $u_{eq} = v(L)$
   (b) $k = \dfrac{F}{u_{eq}} \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{3EI}{L^3}$ (avec la solution RdM donnée).
   (c) $m_{eq} = M$
   (d) $f_{app} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3EI}{ML^3}}$
   (e) équivalence en énergie cinétique (lorsque $v(x,t) = u_{eq}(t)\varphi(x)$) :

$$\frac{1}{2}m_{eq}\dot{u}_{eq}^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \rho S\dot{v}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}M\dot{v}^2(L,t) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2L} \rho S\varphi^2(x)dx + M\right)\dot{u}_{eq}^2$$

   La forme la plus simple utilisable est $V(x) = x^2$ soit $\varphi(x) = (\frac{x}{L})^2$. Donc $m_{eq} = \frac{8}{3}\rho SL + M$. Ce qui donne pour l'approximation :

$$f_{app} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EI}{(\frac{8}{3}\rho SL + M)L^3}}$$

2. *Deuxième approche* :
   (a) Energie cinétique du système pendant le mouvement :

$$E_c(t) = \int_0^{2L} \rho S\dot{v}^2(x,t)dx + \frac{1}{2}M\dot{v}^2(L,t)$$

   (b) Energie potentielle du système pendant le mouvement :

$$E_p(t) = \int_0^{2L} EIv''^2(x,t)dx$$

   (c) Quotient de Rayleigh de $V(x)$ admissible :

$$R(V) = \frac{\int_0^{2L} EIV''^2(x)dx}{\int_0^{2L} \rho SV^2(x)dx + MV^2(L)}$$

   (d) $V(x) = x^2$:

$$R(V) = \frac{40EI}{32\rho SL^4 + ML^3} \qquad \Rightarrow \qquad f_{app} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{40EI}{32\rho SL^4 + ML^3}}$$

   (e) En prenant la forme provenant de l'action d'un effort tranchant F au centre :

$$V(x) = \begin{cases} (\dfrac{Lx^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}), & 0 \le x \le L \\ (\frac{L^2}{2}x - \frac{L^3}{6}), & L \le x \le 2L \end{cases}$$

   on obtient :

$$R(V) = \frac{EI}{\dfrac{122}{105}\rho SL^4 + \dfrac{ML^3}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad f_{app} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\dfrac{122}{105}\rho SL^4 + \dfrac{ML^3}{3}}}$$

   (f) On prendrait pour forme test la forme que prend une poutre de longueur 2L sous l'action d'une répartition uniforme d'efforts tranchants.