

# Approximation de la fréquence fondamentale d'une structure par la méthode de Rayleigh

L. Champaney

Notes de cours de Dynamique des Structures

## Résumé

Ce document présente la méthode du quotient de Rayleigh pour l'approximation de la fréquence fondamentale d'un système complexe. Une application permet d'estimer la qualité des solutions obtenues par la méthode de Rayleigh et de voir comment introduire des raideurs et des masses additionnelles dans la modélisation.

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Méthode du quotient de Rayleigh</b>	<b>2</b>
1.1	Quotient de Rayleigh	2
1.2	Approximation : méthode de Rayleigh	3
<b>2</b>	<b>Application : pont</b>	<b>3</b>
2.1	Première approche	3
2.1.1	Solution exacte	4
2.1.2	Approximation très grossière	4
2.1.3	Première approximation mécanique	5
2.1.4	Deuxième approximation mécanique	5
2.2	Prise en compte de l'appui élastique	6
2.3	Appui élastique trop raide	7
2.4	Étude systématique de l'influence de la raideur	7
<b>3</b>	<b>Cas d'une masse concentrée</b>	<b>8</b>

# 1 Méthode du quotient de Rayleigh

## 1.1 Quotient de Rayleigh

Un mode de vibration s'exprime sous la forme :

$$\vec{u}(M, t) = A \sin(\omega t + \varphi) \vec{U}(M)$$

où  $A$  est l'amplitude,  $\omega$  la pulsation propre et  $\vec{U}$  la déformée modale propre.

La vibration d'un système conservatif étant un échange d'énergie permanent entre énergie cinétique et énergie de déformation (énergie potentielle), on a la propriété suivante :

$$\frac{E_{p \max}}{E_{c \max}} = 1$$

où  $E_{p \max}$  et  $E_{c \max}$  sont les maxima des énergies potentielle et cinétique atteints au cours du temps.

Dans un système conservatif, l'énergie potentielle ne fait intervenir que des dérivées spatiales et prend en général la forme :

$$E_p(\vec{u}) = A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dV$$

où  $e_d$  est l'énergie de déformation locale.

L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c(\vec{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)^2 dV = \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dV$$

Les maxima sont donc :

$$E_{p \max} = A^2 \int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dV \quad E_{c \max} = \omega^2 A^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dV$$

La propriété (1.1) de conservation de l'énergie donne alors :

$$\omega^2 = \frac{\int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dV}{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dV}$$

La quantité précédente, qui ne dépend que de la forme propre  $\vec{U}(M)$ , est appelée quotient de Rayleigh de  $\vec{U}$  et noté :

$$R(\vec{U}) = \frac{\int_{\Omega} e_d(\vec{U}) dV}{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho (\vec{U})^2 dV}$$

Par exemple, dans le cas des vibrations longitudinales où une poutre droite n'est soumise qu'à de la traction ou de la compression, si  $u(x, t)$  est le déplacement axial d'une section, mis sous la forme  $u(x, t) = A \sin(\omega t + \varphi) U(x)$ , on a :

$$R(U) = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L ES \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \rho S (U)^2 dx}$$

Dans le cas des vibrations de flexion d'une poutre droite, si  $v(x, t)$  est le déplacement d'une section perpendiculairement à la ligne moyenne, mis sous la forme  $v(x, t) = A \sin(\omega t + \phi)V(x)$ , on a :

$$R(V) = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \rho S (V)^2 dx}$$

## 1.2 Approximation : méthode de Rayleigh

Lorsque la forme  $\vec{U}(M)$  est forme modale propre de la structure alors le quotient de Rayleigh de  $\vec{U}$  est égal au carré de la pulsation propre du mode :

$$R(\vec{U}) = \omega^2$$

et ce quel que soit le rang du mode considéré.

Lorsqu'on considère une déformée quelconque  $\vec{V}$ , il est toujours possible de calculer son quotient de Rayleigh  $R(\vec{V})$ . Lorsque  $\vec{V}$  est «Cinématiquement Admissible» (satisfait aux conditions aux limites géométriques du problème), on peut montrer que :

$$R(\vec{U}_0) \leq R(\vec{V}), \quad \forall \vec{V} \text{ CA}$$

où  $\vec{U}_0$  est la forme propre fondamentale du système (premier mode de vibration).

On obtient ainsi une méthode d'approximation par borne supérieure de pulsation fondamentale du système :

$$\omega_0^2 \leq R(\vec{V}), \quad \forall \vec{V} \text{ CA}$$

ou de la fréquence fondamentale :

$$f_0 \leq \frac{\sqrt{R(\vec{V})}}{2\pi}, \quad \forall \vec{V} \text{ CA}$$

Il est bien évident que le choix de la forme  $\vec{V}(M)$  joue un rôle très important dans la qualité de l'approximation. Le sens physique du modélisateur intervient alors beaucoup. Des choix possibles de forme approchée  $\vec{V}$  sont :

- solution exacte d'un problème voisin,
- déformé statique de la structure sous son poids propre (lorsque les forces d'inertie sont pilotées par le poids propre),
- ...

## 2 Application : pont

Un pont est composé d'une simple dalle de béton de largeur  $b = 2m$ , de longueur  $L = 20m$  de long et d'épaisseur  $h = 50cm$ . Elle est encastree à gauche dans une zone rocheuse et appuyée à droite sur un sol mou. Ce sol est considéré comme élastique de raideur globale  $k = 10^6 N/m$ .

### 2.1 Première approche

On considère d'abord que le pont ne repose pas sur le sol mou à droite. On s'intéresse alors aux vibrations libres du pont considéré comme une poutre de Bernoulli encastree-libre.

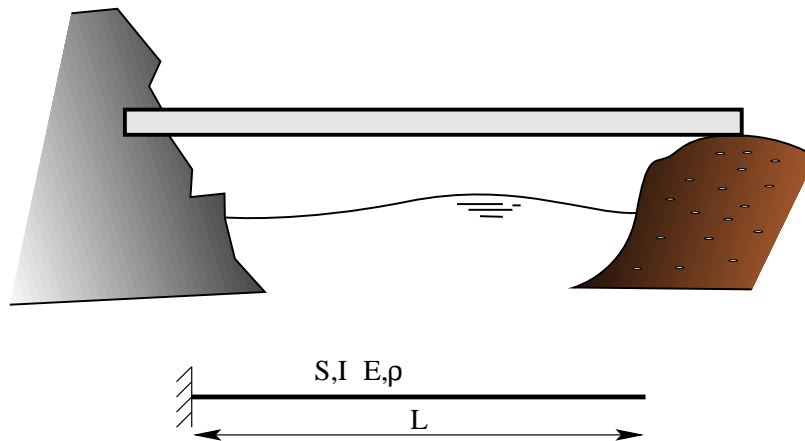


FIGURE 1 – Poutre de Bernoulli encastrée-libre

La seule inconnue cinématique est le déplacement radial  $v(x, t)$ . Les formes envisagées dans l'approximation sont notées  $V(x)$ . L'énergie des déformation locale est :

$$e_d(V) = EI \frac{d^2 V}{dx^2}$$

Compte tenu du problème, les caractéristiques retenues pour la poutre sont :

$$E = 35GPa, \quad \rho = 2500kg/m^3, \quad I = \frac{bh^3}{12}, \quad S = bh$$

### 2.1.1 Solution exacte

La solution exacte du problème de poutre de Bernoulli en flexion encastrée libre donne pour le mode fondamental :

$$\omega_0^2 \simeq 1.875^4 \frac{EI}{\rho SL^4}$$

et la forme de ce mode est du type :

$$V(x) = A(\operatorname{ch}(\beta x) - \cos(\beta x)) + B(\operatorname{sh}(\beta x) - \sin(\beta x)) \quad \text{avec } \beta^4 = \frac{\rho S \omega^2}{EI}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes connues fonctions de  $\beta L$ .

Avec les caractéristiques du pont considéré, on obtient :

$$f_0^{ex} = 0.755 Hz$$

On retrouve cette solution par un calcul par éléments finis.

### 2.1.2 Approximation très grossière

La forme la plus simple satisfaisant aux conditions au limites que l'on puisse choisir est :

$$V^I(x) = x^2$$

on obtient alors :

$$R(V^I) = 20 \frac{EI}{\rho SL^4}$$

ce qui donne comme approximation de la fréquence :

$$f_0^I = 0.961 Hz \geq f_0^{ex}$$

soit 24% d'écart avec la solution exacte.

### 2.1.3 Première approximation mécanique

On suppose que la forme propre est proche de la forme de la poutre lorsqu'elle est soumise à un effort ponctuel à son extrémité libre (fig. 2).

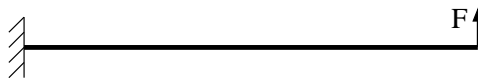


FIGURE 2 – Poutre de Bernoulli encastree-libre avec effort à droite

La solution de ce problème est :

$$v(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

On prend donc comme forme :

$$V^{II}(x) = \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

dont le quotient de Rayleigh est :

$$R(V^{II}) = \frac{\frac{EIL^3}{3}}{\frac{11\rho SL^7}{420}} = \frac{140}{11} \frac{EI}{\rho SL^4}$$

ce qui donne comme approximation de la fréquence :

$$f_0^{II} = 0.766 Hz \geq f_0^{ex}$$

soit 1.5% d'écart avec la solution exacte.

### 2.1.4 Deuxième approximation mécanique

En considérant que les force d'inertie agissant sur la poutre pendant son mouvement sont les action dues au poids, on peut prendre comme forme approchée la déformée statique de la poutre sous l'action de son poids propre (fig. 3).

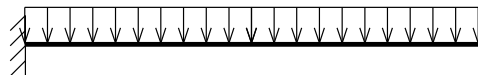


FIGURE 3 – Poutre de Bernoulli encastree-libre soumise à son poids propre

La solution de ce problème est :

$$v(x) = \frac{\rho S}{2EI} \left( \frac{L^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3} \right)$$

On prend donc comme forme :

$$V^{III}(x) = \left( \frac{L^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3} \right)$$

dont le quotient de Rayleigh est :

$$R(V^{III}) = \frac{EIL^5}{\frac{5}{13\rho SL^9}} = \frac{162}{13} \frac{EI}{\rho SL^4}$$

ce qui donne comme approximation de la fréquence :

$$f_0^{III} = 0.758 Hz \geq f_0^{ex}$$

soit seulement 0.4% d'écart avec la solution exacte.

## 2.2 Prise en compte de l'appui élastique

On prend maintenant le sol mou en compte sous forme d'un appui élastique à l'extrémité droite de la poutre (fig. 4).



FIGURE 4 – Poutre de Bernoulli encastrée avec appui élastique

La raideur considérée du ressort est  $k = 10^6 N/m$  et sa masse est négligée. Il n'existe pas de solution analytique de ce problème. La référence utilisée ici est une solution éléments finis fine qui donne :

$$f_0^{EF} = 1.554 Hz$$

On peut, dans un premier temps, considérer que le problème avec ressort est proche du problème sans ressort et utiliser la forme  $V^{III}$  pour approximer la fréquence fondamentale. Bien évidemment, cette approche n'est valable que si la raideur du ressort n'est pas trop grande.

Le ressort est supposé sans masse. Pour prendre en compte son influence dans l'approximation, on ajoute son énergie de déformation dans la quotient de Rayleigh :

$$R(V) = \frac{\int_{poutre} e_d(V) dV + \frac{1}{2} k (V(L))^2}{\int_{poutre} \frac{1}{2} \rho (V)^2 dV}$$

en prenant  $V^{III}$  comme forme approchée, on obtient :

$$R(V^{III}) = \frac{EIL^5}{\frac{5}{13\rho SL^9}} + k \frac{L^8}{12}$$

ce qui donne comme approximation de la fréquence :

$$f_0^{III} = 1.596 Hz \geq f_0^{EF}$$

soit seulement 3.4% d'écart avec la solution de référence.

### 2.3 Appui élastique trop raide

Si la raideur  $k$  de l'appui est plus grande ( $k = 10^7 N/m$  ici) la solution s'éloigne de celle obtenue sans ressort. La solution de référence éléments finis donne :

$$f_0^{EF} = 2.890 Hz$$

et la solution approchée :

$$f_0^{III} = 4.506 Hz \geq f_0^{EF}$$

soit 56% d'écart avec la solution de référence !

### 2.4 Étude systématique de l'influence de la raideur

Lorsqu'on construit les solutions éléments finis pour différentes valeurs de  $k$  variant entre 10 et  $10^{15} N/m$ , on observe trois phase (fig. 5) :

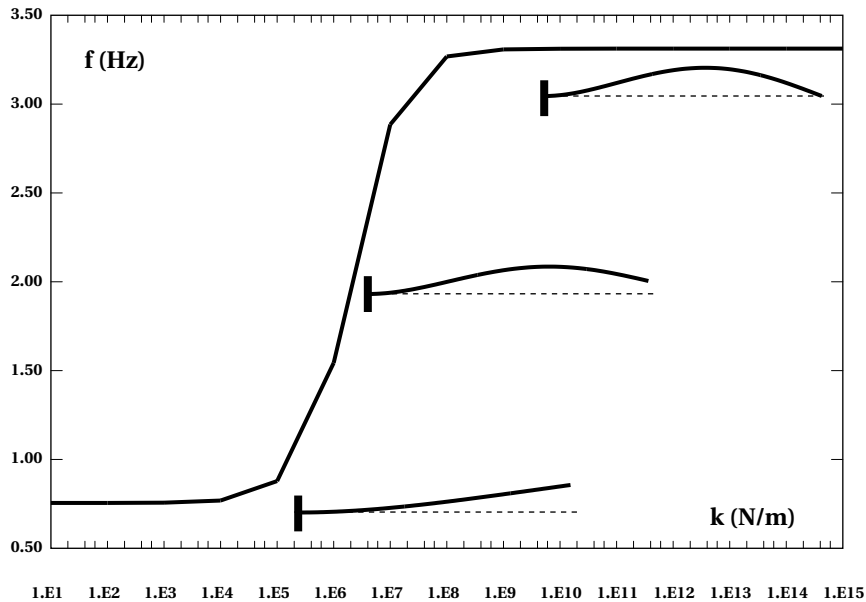


FIGURE 5 – Évolution de la fréquence fondamentale et de la déformée modale avec la raideur du ressort (calcul Cast3m)

- raideurs faibles ( $k \leq 10^4 N/m$ ) : la solution est identiques à la solution sans ressort. La raideur du ressort est négligeable devant celle de la poutre.
- raideurs fortes ( $k \geq 10^9 N/m$ ) : l'appui élastique se comporte comme un appui fixe. La solution est proche de la solution poutre encastée-appuyée.
- raideurs intermédiaires : les raideurs de la poutre et de l'appui sont comparables. La solution est intermédiaire entre la solution encastée-libre et la solution encastée-appuyée.

Il semble donc clair que la forme  $V^{III}$  ne peut donner de bons résultats que dans la première phase de la courbe. C'est ce qu'on constate sur la figure 6 où sont tracés  $f_0^{EF}(k)$  et  $f_0^{III}(k)$ . Au delà de  $k = 10^6 N/m$ , la forme  $V^{III}$  n'est plus adaptée au problème.

Il serait possible d'avoir une bonne approximation de la fin de la courbe en utilisant la déformée statique d'une poutre encastée-appuyée sous son poids propre (fig 7). Par contre une telle forme ne permet pas de prendre en compte le ressort car elle présente un déplacement nul à droite et donc une énergie de déformation nulle pour le ressort quelle que soit sa raideur.

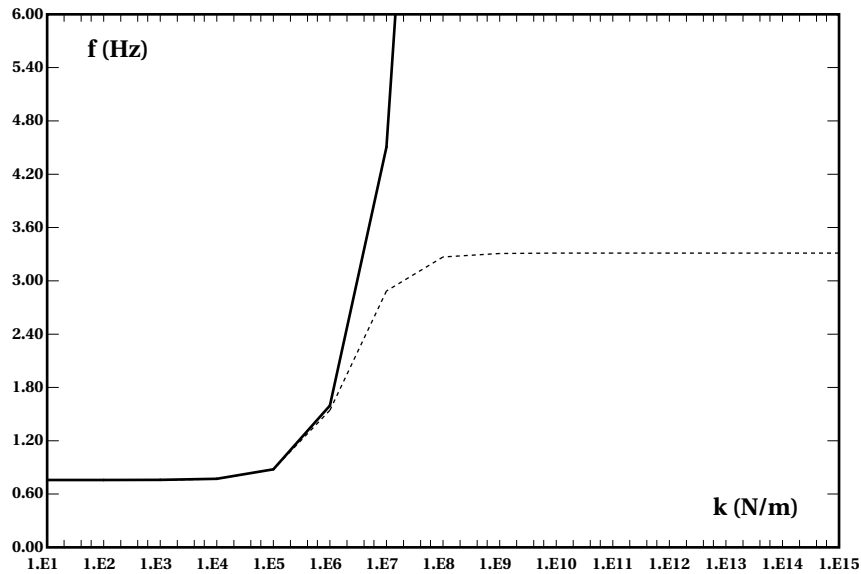


FIGURE 6 – Évolution de la fréquence fondamentale approchée et calculée avec la raideur du ressort (calcul Cast3m)

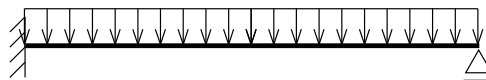


FIGURE 7 – Poutre de Bernoulli encastée-appuyée

Pour envisager de meilleurs résultats, il faudrait prendre pour  $V(x)$ , la déformée statique d'une poutre encastée avec appui élastique soumise à son poids propre (8). Les calculs analytiques à mener pour une telle étude sont tout de même plus conséquents que pour les précédentes.

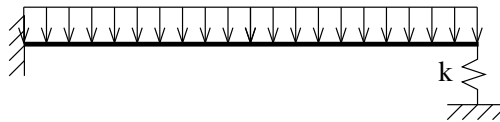


FIGURE 8 – Poutre de Bernoulli encastée avec appui élastique soumise à son poids propre

### 3 Cas d'une masse concentrée

Si on voulait prendre aussi en compte une masse  $M$  concentrée (un véhicule sur un pont par exemple, fig 9) dans l'approximation, il faudrait ajouter l'énergie cinétique de la masse dans le quotient de Rayleigh. Si par exemple, la masse est au centre de la poutre on a :

$$R(V) = \frac{\int_{poutre} e_d(V) dV + \frac{1}{2} k (V(L))^2}{\int_{poutre} \frac{1}{2} \rho (V)^2 dV + \frac{1}{2} M (V(L/2))^2}$$



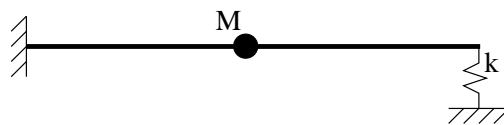


FIGURE 9 – Poutre de Bernoulli encastrée avec appui élastique et masse concentrée