



Examen de Mécanique du solide

6 janvier 2004 — Durée 3 heures

Aucun formulaire ni calculatrice autorisés

Les quatre parties du problème sont indépendantes, mais il est préférable de les traiter dans l'ordre.

PROBLEME : Etude d'un bilame

On s'intéresse au comportement en flexion d'un bilame formé de deux plaques (longueur L et largeur $2b$) d'épaisseurs égales à h , parfaitement collées l'une sur l'autre (voir figure 1). Le volume de la plaque supérieure est noté Ω^+ et celui de la plaque inférieure est noté Ω^- . Elles sont constituées de deux matériaux homogènes élastiques linéaires différents.

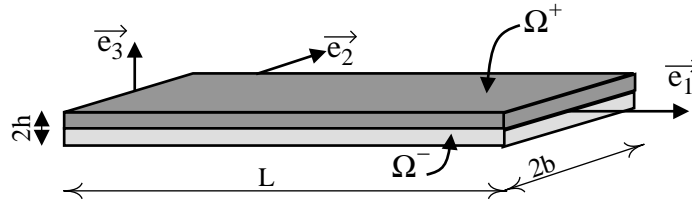


Figure 1: bilame

On sollicite le bilame en flexion pure par l'intermédiaire des conditions aux limites suivantes :

- sur la face ($x_1 = 0$), le déplacement normal est nul : $u_1 = 0$ et les efforts tangentiels sont imposés nuls.
- on impose une rotation $\omega \vec{e}_2$ de la face ($x_1 = L$) : le déplacement normal est imposé sous la forme $u_1 = \omega x_3$ et les effort tangentiels sont imposés nuls.
- les quatre autres faces sont libres d'effort.

Par ailleurs, on suppose que l'essai est réalisé de manière à ce qu'il n'y ai pas de mouvement de solide rigide possible du bilame.

Partie I : solution exacte du problème homogène

Dans un premier temps, on considère que les deux plaques sont formées du même matériau de caractéristiques élastiques E et ν . On s'intéresse donc à une seule plaque d'épaisseur $2h$.

1. Poser le problème. Définir précisément l'espace des champs cinématiquement admissibles et l'espace des champs statiquement admissibles.
2. On fait l'hypothèse d'un état de traction-compression non-homogène de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} a \frac{x_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad \text{avec } a \text{ constante inconnue}$$

Montrer que $\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible et en déduire la solution complète du problème homogène.

3. On note $M\vec{e}_2$ le moment résultant au centre de la face ($x_1 = L$). Calculer M en fonction de E , L , ω et $I = \frac{4bh^3}{3}$. Que représente la quantité $\frac{ML}{\omega I}$?
4. On considère que les dimensions b et h sont petites devant la longueur L . On néglige alors les déformations transversales. Montrer pourquoi considérer que le coefficient de Poisson ν est nul revient à supprimer les termes de déplacement négligeables. Donner la forme du champ de déplacement dans ce cas.

Partie II : encadrement du module de rigidité

Les modules d'Young des plaques Ω^+ et Ω^- sont respectivement notés E^+ et E^- . On considère que les dimensions b et h sont petites devant la longueur L . On néglige alors les déformations transversales. Pour cela on considère que les coefficients de Poisson ν^+ et ν^- sont nuls. On note $M\vec{e}_2$ le moment résultant au centre de la face ($x_1 = L$) et on appelle module apparent du bilame la quantité :

$$E_a = \frac{ML}{\omega I} \quad \text{avec} \quad I = \frac{4bh^3}{3}$$

Dans la suite, on cherche un encadrement de ce module apparent.

1. Définir l'énergie potentielle élastique $\Phi_2(\vec{u}')$ d'un champ de déplacement cinématiquement admissible \vec{u}' pour ce problème.
2. Montrer que M s'exprime sous la forme $\int_{(x_1=L)} \sigma_{11} x_3 dS$. Exprimer l'énergie potentielle élastique $\Phi_2(\vec{u})$ de la solution exacte du problème \vec{u} . En utilisant le théorème de la divergence, donner $\Phi_2(\vec{u})$ en fonction de E_a , L , I et ω .
3. On considère une solution \vec{u}' approchée dont l'expression est :

$$\vec{u}' = \frac{\omega}{L} x_1 x_3 \vec{e}_1 - \frac{\omega}{L} \frac{x_1^2}{2} \vec{e}_3$$

Montrer que \vec{u}' est cinématiquement admissible et calculer son énergie potentielle élastique en fonction de E^+ , E^- , L , I et ω .

4. Définir l'énergie complémentaire élastique $\Phi_1(\underline{\underline{\sigma}}^*)$ d'un champ de contrainte statiquement admissible $\underline{\underline{\sigma}}^*$ pour ce problème.
5. On considère une famille de champs de contrainte, définis par la constante a^* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{pmatrix} a^* \frac{x_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

- (a) Montrer qu'ils sont statiquement admissibles et calculer leur énergie complémentaire en fonction de E^+ , E^- , L , I , ω et a^* .
- (b) Calculer la constante a^* du champ de contrainte de cette forme qui minimise l'énergie complémentaire. Calculer l'énergie complémentaire de ce champ en fonction de E^+ , E^- , L , I et ω .
6. Rappeler le théorème d'encadrement et en déduire un encadrement du module apparent E_a en fonction de E^+ et E^- . A quoi correspond E_a lorsque les deux lames sont constituées du même matériau.

Partie III : comportement plastique

On considère maintenant que les deux matériaux employés sont tels que $E^+ = 2\bar{E}$ et $E^- = \bar{E}$ où \bar{E} est connu. Les coefficients de Poisson sont toujours considérés nuls. Les deux matériaux sont plastiques parfaits et présentent la même limite élastique en traction σ_e .

Le chargement est la rotation $\omega\vec{e}_2$ sur la face ($x_1 = L$) où la valeur de ω est augmentée progressivement au cours du temps. Le moment résultant au centre de la face ($x_1 = L$) est noté $M\vec{e}_2$. On considère que pendant tout le chargement, la déformation est approximée par :

$$\|e\| = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{L}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

1. Donner l'expression de la contrainte normale σ_{11} dans la section ($x_1 = L$) lorsque tout le domaine est élastique. Etablir la relation entre M et ω pendant cette phase élastique.
2. Montrer que les premiers points qui plastifient se trouvent sur la surface ($x_3 = h$) et donner la valeur du moment M , notée M_{e+} , correspondant à l'apparition de la plasticité en fonction de σ_e , I et h .
3. Etablir la relation entre M et ω entre le début de la plastification sur la face ($x_3 = h$) et l'apparition de la plastification sur la face ($x_3 = -h$). Donner l'expression de la contrainte normale σ_{11} pendant cette phase du comportement.
4. Donner la valeur du moment M , notée M_{e-} , correspondant à l'apparition de la plasticité sur la face ($x_3 = -h$) en fonction de σ_e , I et h .

Partie VI : modèle plaque

On cherche maintenant la solution du problème à l'aide d'une modélisation plaque. Pour cela, on considère la plaque comme un solide homogène de module d'Young E_a et de coefficient de Poisson nul.

On néglige toujours les déformations transversales en considérant que la solution est une déflexion normale à la surface moyenne y qui ne dépend que de x_1 . Pour cela on ne prendra pas en compte les conditions aux limites sur les faces $x_2 = \pm b$ (tout se passe comme si la plaque était infinie dans la direction 2).

Les conditions aux limites sont :

- Encastrement du bord ($x_1 = 0$),
- Rotation imposée en ($x_1 = L$) : $\varphi_2(x_1 = L) = \omega$,
- Effort tranchant imposé nul sur le bord ($x_1 = L$).

1. Poser le problème.
2. Donner la forme de y qui satisfait à l'équilibre de la plaque.
3. En prenant en compte les conditions aux limites sur les bords ($x_1 = 0$) et ($x_1 = L$), donner l'expression de $y(x_1)$.

FORMULAIRE

Formulaire : comportement élastique

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}}$$

Formulaire : Flexion des plaques

- Déplacement normal à la surface moyenne : y
 - Rotation : $\vec{\varphi} = (\text{grad } y) \wedge \vec{e}_3$
 - Déformations : $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{\text{grad}}} \text{grad } y$
 - Comportement : $\underline{\underline{M}} = D (\nu(\text{Tr} \underline{\underline{K}}) \underline{\underline{I}} + (1 - \nu) \underline{\underline{K}})$; $D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}$
 - Equilibre : $-\text{div}(\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{M}}) + p = 0$
 - Conditions aux limites :
 - Y : effort tranchant imposé
 - \vec{Z} : moment imposé
- $$\begin{cases} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{M}} \cdot \vec{\nu} + Y + \frac{d}{ds} (\vec{\tau} \underline{\underline{M}} \vec{\nu}) - \frac{d}{ds} (\vec{Z} \cdot \vec{\tau}) = 0 \\ -\vec{\nu} \underline{\underline{M}} \vec{\nu} + \vec{Z} \cdot \nu = 0 \end{cases}$$
- Equation d'équilibre en déplacement : $-\Delta \Delta y + \frac{p}{D} = 0$

FORMULAIRE : Intégration du champ de déformation

$\varepsilon_{11} =$
$\varepsilon_{22} =$
$\varepsilon_{33} =$
$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} =$
$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} =$
$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} =$

1. Calcul de $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$

$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} =$
$\omega_{12,2} = \varepsilon_{21,2} - \varepsilon_{22,1} =$
$\omega_{12,3} = \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1} =$

$\omega_{23,1} = \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2} =$
$\omega_{23,2} = \varepsilon_{22,3} - \varepsilon_{32,2} =$
$\omega_{23,3} = \varepsilon_{32,3} - \varepsilon_{33,2} =$

$\omega_{31,1} = \varepsilon_{13,1} - \varepsilon_{11,3} =$
$\omega_{31,2} = \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3} =$
$\omega_{31,3} = \varepsilon_{33,1} - \varepsilon_{13,3} =$

3. Calcul de $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$

$u_{1,1} = \varepsilon_{11} =$
$u_{1,2} = \varepsilon_{12} + \omega_{12} =$	$-r +$
$u_{1,3} = \varepsilon_{13} - \omega_{31} =$	$+q +$

$u_{2,1} = \varepsilon_{21} - \omega_{12} =$	$+r +$
$u_{2,2} = \varepsilon_{22} =$
$u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23} =$	$-p +$

$u_{3,1} = \varepsilon_{31} + \omega_{31} =$	$-q +$
$u_{3,2} = \varepsilon_{32} - \omega_{23} =$	$+p +$
$u_{3,3} = \varepsilon_{33} =$

2. Calcul de ω_{ij}

$\omega_{12} =$	$-r +$
$\omega_{23} =$	$-p +$
$\omega_{31} =$	$-q +$

4. Calcul de u_i

$u_1 =$	$\lambda_1 - rx_2 + qx_3 +$
$u_2 =$	$\lambda_2 - px_3 + rx_1 +$
$u_3 =$	$\lambda_3 - qx_1 + px_2 +$

Examen du 6 janvier 2004 — Eléments de correction :

Partie I : solution exacte du problème homogène

1. Espaces des champs cinématiquement admissibles et des champs statiquement admissibles.

$$\mathcal{U}_{ad} = \{ \vec{v}', \text{ continu, continuellement dérivable} / u_1(x_1 = L) = \omega x_3 ; u_1(x_1 = 0) = 0 \}$$

$$\Sigma_{ad} = \{ \underline{\underline{\sigma}}^*, \text{ symétrique} / \text{div} \vec{\underline{\underline{\sigma}}}^* = 0 \text{ dans } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ \vec{T}^* \cdot \vec{e}_2 = \vec{T}^* \cdot \vec{e}_3 = 0 \text{ en } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = L ; \vec{T}^* = 0 \text{ en } x_2 = \pm b ; \vec{T}^* = 0 \text{ en } x_3 = \pm h \}$$

2. On fait l'hypothèse d'un état local de traction pure de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} a \frac{x_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad \text{avec } a \text{ constante inconnue}$$

donc $\underline{\underline{\sigma}}$ est bien statiquement admissible et

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} a \frac{1}{E} \frac{x_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & -a \frac{\nu}{E} \frac{x_3}{h} & 0 \\ 0 & 0 & -a \frac{\nu}{E} \frac{x_3}{h} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

La construction du champs de déplacement associé donne : [voir page suivante]

$$\omega_{12} = 0 \quad ; \quad \omega_{23} = -a \frac{\nu}{E} \frac{x_2}{h} \quad ; \quad \omega_{31} = -a \frac{1}{E} \frac{x_1}{h}$$

ce qui conduit à :

$$u_1 = a \frac{1}{E} \frac{x_1 x_3}{h} \quad ; \quad u_2 = -a \frac{\nu}{E} \frac{x_2 x_3}{h} \quad ; \quad u_3 = -a \frac{1}{E} \frac{x_1^2}{2h} + a \frac{\nu}{E} \frac{x_2^2}{2h} - a \frac{\nu}{E} \frac{x_3^2}{2h}$$

la condition sur le déplacement en $x_1 = L$ donne

$$a = \frac{\omega E h}{L}$$

donc la solution est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega E}{L} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

et

$$u_1 = \frac{\omega}{L} x_1 x_3 \quad ; \quad u_2 = -\nu \frac{\omega}{L} x_2 x_3 \quad ; \quad u_3 = -\frac{\omega}{L} \frac{x_1^2}{2} + \nu \frac{\omega}{L} \frac{x_2^2}{2} - \nu \frac{\omega}{L} \frac{x_3^2}{2}$$

Intégration

$\varepsilon_{11} =$	$a \frac{1}{E} \frac{x_3}{h}$
$\varepsilon_{22} =$	$-a \frac{\nu}{E} \frac{x_3}{Eh}$
$\varepsilon_{33} =$	$-a \frac{\nu}{E} \frac{x_3}{Eh}$
$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} =$	0
$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} =$	0
$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} =$	0

1. Calcul de $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$

$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} =$	0
$\omega_{12,2} = \varepsilon_{21,2} - \varepsilon_{22,1} =$	0
$\omega_{12,3} = \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1} =$	0

$\omega_{23,1} = \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2} =$	0
$\omega_{23,2} = \varepsilon_{22,3} - \varepsilon_{32,2} =$	$-a \frac{\nu}{Eh}$
$\omega_{23,3} = \varepsilon_{32,3} - \varepsilon_{33,2} =$	0

$\omega_{31,1} = \varepsilon_{13,1} - \varepsilon_{11,3} =$	$-a \frac{1}{Eh}$
$\omega_{31,2} = \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3} =$	0
$\omega_{31,3} = \varepsilon_{33,1} - \varepsilon_{13,3} =$	0

2. Calcul de ω_{ij}

$\omega_{12} =$	0
$\omega_{23} =$	$-a \frac{\nu}{Eh} x_2$
$\omega_{31} =$	$-a \frac{1}{Eh} x_1$

3. Calcul de $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$

$u_{1,1} = \varepsilon_{11} =$	$a \frac{1}{E} \frac{x_3}{h}$
$u_{1,2} = \varepsilon_{12} + \omega_{12} =$	0
$u_{1,3} = \varepsilon_{13} - \omega_{31} =$	$a \frac{1}{E} \frac{x_1}{h}$

$u_{2,1} = \varepsilon_{21} - \omega_{12} =$	0
$u_{2,2} = \varepsilon_{22} =$	$-a \frac{\nu}{E} \frac{x_3}{h}$
$u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23} =$	$-a \frac{\nu}{E} \frac{x_2}{h}$

$u_{3,1} = \varepsilon_{31} + \omega_{31} =$	$-a \frac{1}{E} \frac{x_1}{h}$
$u_{3,2} = \varepsilon_{32} - \omega_{23} =$	$a \frac{\nu}{E} \frac{x_2}{h}$
$u_{3,3} = \varepsilon_{33} =$	$-a \frac{\nu}{E} \frac{x_3}{h}$

4. Calcul de u_i

$u_1 =$	$a \frac{1}{E} \frac{x_1 x_3}{h}$
$u_2 =$	$-a \frac{\nu}{E} \frac{x_2 x_3}{h}$
$u_3 =$	$-a \frac{1}{E} \frac{x_1^2}{2h} + a \frac{\nu}{E} \frac{x_2^2}{2h} - a \frac{\nu}{E} \frac{x_3^2}{2h}$

3. Le moment des actions sur la face ($x_1 = L$) est :

$$M\vec{e}_2 = \iint_{(x_1=L)} (x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \wedge \frac{\omega E}{L} x_3\vec{e}_1 dS = \int_{-h}^h \int_{-b}^b \frac{\omega E}{L} x_3^2 dx_2 dx_3 \vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$$

donc

$$M = \frac{\omega E}{L} \frac{4bh^3}{3} = \frac{\omega E}{L} I$$

on a alors

$$\boxed{\frac{ML}{\omega I} = E}$$

4. Les dimensions transversales étant faibles devant la longueur L , les termes x_2^2 , x_3^2 et x_2x_3 sont négligeables devant les autres dans l'expression du déplacement. Ces termes sont tous multipliés par ν . Choisir un coefficient de Poisson nul, revient à ne pas les prendre en compte. Le champ de déplacement prend alors la forme :

$$\boxed{u_1 = \frac{\omega}{L} x_1 x_3 \quad ; \quad u_2 = 0 \quad ; \quad u_3 = -\frac{\omega}{L} \frac{x_1^2}{2}}$$

Partie II : encadrement du module de rigidité

1. L'énergie potentielle élastique est :

$$\Phi_2(\vec{u}') = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^+} E^+ \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' dV + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^-} E^- \underline{\underline{\varepsilon}}' : \underline{\underline{\varepsilon}}' dV$$

car il n'y a pas d'efforts imposés non nuls.

2. Dans le cas de la solution \vec{u} , et par application du théorème de la divergence, on obtient :

$$\Phi_2(\vec{u}) = \frac{1}{2} \iint_{\partial\Omega} \vec{T}\vec{u} dS = \frac{1}{2} \iint_{x_1=L} \sigma_{11} \omega x_3 dS = \frac{1}{2} M \omega = \frac{1}{2} \frac{I}{L} \omega^2 E_a$$

3. On prend :

$$\vec{u}' = \frac{\omega}{L} x_1 x_3 \vec{e}_1 - \frac{\omega}{L} \frac{x_1^2}{2} \vec{e}_3 \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}' = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{L} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

donc

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{u}') &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^+} E^+ \frac{\omega^2}{L^2} x_3^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^-} E^- \frac{\omega^2}{L^2} x_3^2 dV \\ &= \frac{1}{2} 2bL \frac{\omega^2}{L^2} \left[\int_0^h E^+ x_3^2 dx_3 + \int_{-h}^0 E^- x_3^2 dx_3 \right] = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{L} 4b \frac{h^3}{3} \left(\frac{E^+ + E^-}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{I}{L} \omega^2 \left(\frac{E^+ + E^-}{2} \right) \end{aligned}$$

4. L'énergie complémentaire élastique est :

$$\Phi_1(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^+} \frac{1}{E^+} \underline{\sigma}^* : \underline{\sigma}^* dV + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^-} \frac{1}{E^-} \underline{\sigma}^* : \underline{\sigma}^* dV - \iint_{(x_1=L)} \sigma_{11}^*(\omega x_3) dS$$

5. Pour la famille de champs :

$$\underline{\sigma}^* = \begin{pmatrix} a^* \frac{x_3}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

on obtient :

$$\Phi_1(a^*) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^+} \frac{1}{E^+} \frac{a^{*2}}{h^2} x_3^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega^-} \frac{1}{E^-} \frac{a^{*2}}{h^2} x_3^2 dV - \iint_{(x_1=L)} a^* \frac{x_3}{h} (\omega x_3) dS$$

soit

$$\Phi_1(a^*) = \frac{1}{2} 2bL \frac{a^{*2}}{h^2} \left[\int_0^h \frac{1}{E^+} x_3^2 dx_3 + \int_{-h}^0 \frac{1}{E^-} x_3^2 dx_3 \right] - 2b\omega \frac{a^*}{h} \int_{-h}^h x_3^2 dx_3$$

d'où

$$\Phi_1(a^*) = \frac{1}{2} 2bL \frac{h}{3} \left[\frac{1}{E^+} + \frac{1}{E^-} \right] a^{*2} - 2b\omega a^* \frac{2h^2}{3}$$

Le minimum est atteint pour :

$$a^* = + \frac{\omega 2h}{L} \frac{E^+ E^-}{E^+ + E^-}$$

ce qui donne pour l'énergie complémentaire minimale :

$$\Phi_1(\underline{\sigma}^*) = - \frac{1}{2} \frac{I}{L} \omega^2 \frac{2E^+ E^-}{E^+ + E^-}$$

6. Le théorème d'encadrement

$$-\Phi_1(\underline{\sigma}^*) \leq -\Phi_1(\underline{\sigma}) = \Phi_2(\vec{u}) \leq \Phi_2(\vec{u}')$$

s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{I}{L} \omega^2 \frac{2E^+ E^-}{E^+ + E^-} \leq \frac{1}{2} \frac{I}{L} \omega^2 E_a \leq \frac{1}{2} \frac{I}{L} \omega^2 \frac{E^+ + E^-}{2}$$

ce qui donne pour l'encadrement du module apparent :

$$\frac{2E^+ E^-}{E^+ + E^-} \leq E_a \leq \frac{E^+ + E^-}{2}$$

qui donne bien $E_a = E$ dans le cas de la plaque homogène.

Partie III : comportement plastique

1. Phase élastique :

$$\sigma_{11} = \begin{cases} 2\bar{E}\frac{\omega}{L}x_3 & \text{si } 0 \leq x_3 \leq h \\ \bar{E}\frac{\omega}{L}x_3 & \text{si } -h \leq x_3 \leq 0 \end{cases}$$

le moment est :

$$M = \int_{-h}^h \sigma_{11}x_3 dx_3 = \frac{2b\omega\bar{E}}{L} \left[\int_{-h}^0 x_3^2 dx_3 + 2 \int_0^h x_3^2 dx_3 \right] = \frac{4bh^3}{3} \frac{\bar{E}\omega}{2L} = \frac{3}{2} \bar{E}I \frac{\omega}{L}$$

soit

$$M = \frac{3}{2} \bar{E}I \frac{\omega}{L}$$

2. la zone la plus chargée est en $x_3 = h$ où :

$$\sigma_{11} = 2\bar{E}\frac{\omega h}{L} = \sigma_e \Rightarrow \omega = \frac{\sigma_e L}{2\bar{E}h}$$

ce qui correspond à :

$$M_{e^+} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_e I}{h}$$

3. Phase plastique : lorsque les points situés près de $x_3 = h$ sont plastiques, on a :

$$\sigma_{11} = \begin{cases} \sigma_e & \text{si } e \leq x_3 \leq h \\ 2\bar{E}\frac{\omega}{L}x_3 & \text{si } 0 \leq x_3 \leq e \\ \bar{E}\frac{\omega}{L}x_3 & \text{si } -h \leq x_3 \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \frac{2\bar{E}\omega}{L}e = \sigma_e \Rightarrow e = \frac{L\sigma_e}{\bar{E}\omega}$$

le moment est alors

$$M = 2b\frac{\omega\bar{E}}{L} \left[\int_{-h}^0 \frac{\omega\bar{E}}{L}x_3^2 dx_3 + 2 \int_0^e \frac{\omega\bar{E}}{L}x_3^2 dx_3 + \int_e^h \sigma_e x_3^2 dx_3 \right]$$

qui donne

$$M = 2b \left[\frac{\bar{E}\omega}{L} \frac{h^3}{3} + 2 \frac{\bar{E}\omega}{L} \frac{e^3}{3} + \sigma_e \left(\frac{h^2}{2} - \frac{e^2}{2} \right) \right]$$

qui conduit, en éliminant e , à :

$$M = \left[\frac{\bar{E}\omega I}{2L} + \sigma_e b h^2 - \frac{1}{3} \frac{b L^2 \sigma_e^3}{\bar{E}^2 \omega^2} \right]$$

4. La plastification des points situés en $x_3 = -h$ apparaît pour :

$$\sigma_{11} = -\frac{\bar{E}\omega}{L}h = -\sigma_e \Rightarrow \omega = \frac{L\sigma_e}{\bar{E}h}$$

ce qui donne en remplaçant ω dans l'expression du moment :

$$M_{e^-} = \frac{\sigma_e I}{h}$$

Partie VI : modèle plaque

1. Le problème est bien posé. Les conditions aux limites sont :

- $y(0) = 0$ (encastrement)
- $\varphi_2(0) = 0$ (encastrement)
- $\varphi_2(L) = \omega$ (rotation imposée)
- $Y(L) = 0$ (libre d'effort tranchant)

2. Les équations d'équilibre de la plaque donnent en l'absence d'efforts surfaciques :

$$\Delta\Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$$

3. Les conditions aux limites en déplacement et en rotation imposent :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ -y_{,1}(0) = 0 \\ -y_{,1}(L) = \omega \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ 3aL^2 + 2bL = -\omega \end{cases}$$

Le tenseur des courbures prend donc la forme :

$$k_{\alpha\beta} = y_{,\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_{11} = (6ax_1 + 2b) \\ k_{12} = 0 \\ k_{22} = 0 \end{cases}$$

Pour cette plaque d'épaisseur $2h$ le module de flexion est :

$$D = \frac{2E_a h^3}{3(1-\nu^2)}$$

La relation de comportement donne les tenseur des moment :

$$M_{\alpha\beta} = D(\nu k_{\gamma\gamma} + (1-\nu)k_{\alpha\beta}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_{11} = D(6ax_1 + 2b) \\ M_{12} = \nu(6ax_1 + 2b) \\ M_{22} = \nu(6ax_1 + 2b) \end{cases}$$

La condition aux limites sur l'effort en $x_1 = L$

$$(\text{div} \underline{\underline{M}}) \cdot \vec{e}_1 + Y = M_{11,1} + Y = 0 \quad \text{avec} \quad Y = 0$$

donne

$$6Da = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

La solution en déplacement prend donc la forme

$$a = c = d = 0; \quad b = -\frac{\omega}{2L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x_1) = -\frac{\omega}{L} \frac{x_1^2}{2}}$$

qui correspond à la solution obtenue dans les parties précédentes.