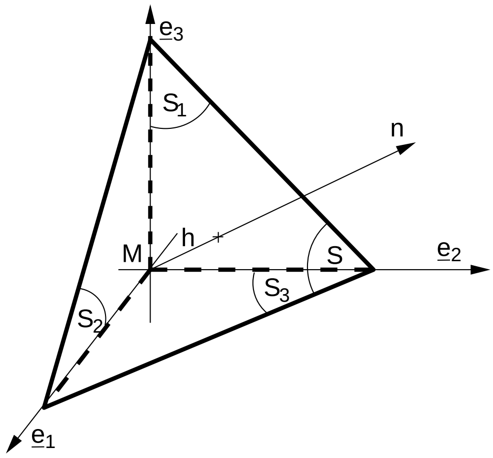
Démonstration du théorème de Cauchy

En un point M d'un milieu continu, on dispose un repère orthonormé $(M, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. On considère un petit volume Ω en forme de tétraèdre de sommet M, dont trois faces (S_j, $j = 1, 2, 3$) sont dans les plans de coordonnées et la quatrième face S, d'aire a, a pour normale extérieure $\underline{n}$, de cosinus directeurs n_j : $\underline{n} = \sum_{j=1}^{3} n_j \underline{e}_j$.



Il est évident que les faces S_j ont pour aire an_j. On nomme h la hauteur issue de M. L'équilibre du petit volume Ω donne, :

$$\int_\Omega \rho \underline{\Gamma} d\Omega - \int_\Omega \underline{f}^d d\Omega = \int_S \underline{T}(N, \underline{n}) dS + \sum_{j=1}^{3} \int_{S_j} \underline{T}(N_j, -\underline{e}_j) dS$$

Où N et N_j désignent des points situés sur les faces de normale $\underline{n}$ et $-\underline{e}_j$ respectivement. Tenant compte de la petite taille de Ω, on obtient :

$$\frac{ah}{3}(\rho \underline{\Gamma} - \underline{f}^d) = a\underline{T}(M, \underline{n}) + \sum_{j=1}^{3} an_j \underline{T}(M_j, \underline{e}_j)$$

En posant :

$$\underline{T}_j = -\underline{T}(M_j, -\underline{e}_j)$$

en divisant par a et en faisant tendre h vers 0, on obtient :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = n_j \underline{T}_j$$

Cette dernière équation, où le vecteur $\underline{n}$ a une orientation quelconque, montre que le vecteur contrainte sur une facette de normale $\underline{n}$ dépend linéairement du vecteur unitaire $\underline{n}$. Cette application peut être étendue de manière évidente aux vecteurs de norme quelconque.

Il existe donc, en tout point M du milieu continu, un tenseur du second ordre $\underline{\underline{\sigma}}(M)$, appelé *tenseur des contrainte de Cauchy*, tel que :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}$$