Exercice d'Elasticté

On considère le problème de traction pure suivant. Le domaine étudié Ω est parallélépipède rectangle. les normales à ses faces sont alignées avec les vecteurs de la base orthonormée directe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. La surface latérale, notée S_{lat}, est le regroupement des deux faces normales à $\underline{e}_2$ et des deux normales à $\underline{e}_3$. Elle est libre d'effort. La face S_+, de normale sortante $\underline{e}_1$ est soumise à une densité surfacique de charge $f\underline{e}_1$. La face S_-, de normale sortante $-\underline{e}_1$ est soumise à une densité surfacique de charge $-f\underline{e}_1$. f est un paramètre de charge donné. Le matériau est élastique linéaire de paramètres λ et ν. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et les effets dynamiques sont négligés.

1. Poser le problème d'élasticité. A-t'il une solution unique ?
2. On fait l'hypothèse d'un état de contraite uniaxial uniforme dans la direction $\underline{e}_1$. En déduire l'expression complète de l'opérateur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et de l'opérateur des déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.
3. En déduire le champ de déplacement en tout point $\underline{u}(M)$.

Eléments de correction

1. Problème

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\pm\underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}}\pm\underline{e}_3 = 0,\ \forall M \in S_{lat} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_1 = f\underline{e}_1,\ \forall M \in S_+ \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_1) = -f\underline{e}_1,\ \forall M \in S_-$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\operatorname{Tr}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{1}}, \quad \forall M \in \Omega \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}^T\,\underline{u})$$

Ce problème à une solution unique en contrainte et en déformation. La solution en déplacement est définie à une mouvement de solide rigide près car le système ne possède aucune condition aux limites en déplacement.

2. Opérateur des contraintes et de déformation linéarisées :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{f}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}f & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}f \end{pmatrix}$$

3. Champ de déplacement :

$$\underline{u}(M) = \frac{f}{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où λ_1, λ_1, λ_1, p, q, et r sont les paramètres du mouvement de solide rigide.