

Examen - Seconde Session - Février 2012

Samedi 13 février 2012 - 3 heures

Aucun document n'est autorisé.
L'usage des calculatrices est interdit.

Nota : L'épreuve comporte deux exercices qui devront être rédigés sur des copies séparées : un exercice "solides" sur 14 points ; un exercice "fluides" sur 6 points. Durée conseillée : 2h00 sur la partie solides et 1h00 sur la partie fluides.

Dans le cadre de recherches scientifiques, plusieurs organismes s'efforcent de caractériser les océans en mesurant leurs grandeurs spécifiques : salinité, température, taux d'oxygène dissout, taux de chlorophylle, taux de fluorine, ... Pour faire ces mesures, il faut mettre au point des véhicules sous-marins capables de se déplacer sur des grandes distances, d'une façon autonome et aptes à effectuer les mesures citées précédemment. Dans ce but l'IFREMER et le laboratoire DTN de l'ENSIETA développent conjointement des planeurs autonomes sous-marins de type GLIDER.

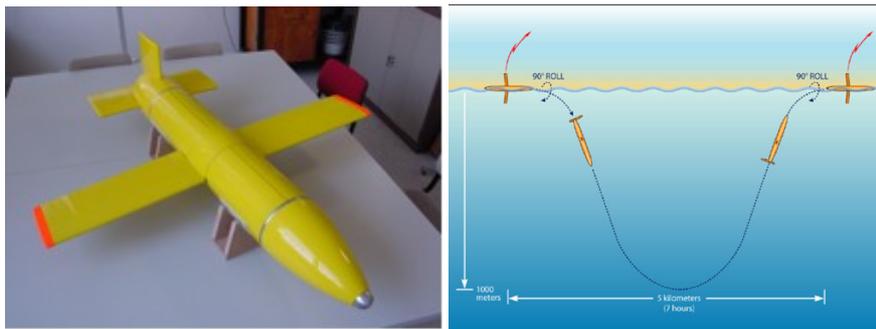


Figure 1 – Véhicule sous-marin autonome et trajet parcouru

Les photos de la figure 1 présentent des vues générales d'un planeur sous-marin développé actuellement et des trajectoires envisagées. Comme son nom l'indique, ce véhicule plane dans l'eau ; il ne possède donc pas d'hélice de propulsion. Pour se déplacer, ce système possède :

- un système de ballast qui permet de faire varier le volume du sous-marin à poids constant. Ceci permet de le faire descendre ou remonter en prenant de la vitesse,
- un système de contrepoids qui permet, en jouant sur la position du centre de gravité du glider, de contrôler les angles de tangage et de roulis. C'est le mécanisme d'orientation.

Le glider peut être séparé en trois parties principales :

Zone centrale ou zone sèche : cette zone, séparée des deux autres par les tapes étanches, est sans eau et contient tous les systèmes utiles au fonctionnement du glider : les batteries, l'électronique de commande, le vérin de ballastage, ...

Zone avant : elle est remplie d'eau par l'intermédiaire de perforages présents sur toute la périphérie de la coque. Le vérin de ballastage permet de faire varier le volume d'eau contenu dans cette zone, ce qui a pour conséquence de modifier le volume immergé du glider et donc son poids relatif par variation des forces d'Archimède. Elle comprend aussi une antenne GPS.

Zone arrière : cette zone, également remplie d'eau, contient tout le matériel de mesure nécessaire à la mission à réaliser.

Le volume de la zone centrale du glider est fonctionnellement séparé en trois sous-zones dont une zone intermédiaire (zone 2) qui contient le système de contrepoids permettant la variation des angles de roulis et de tangage par déplacement du centre de gravité du glider.

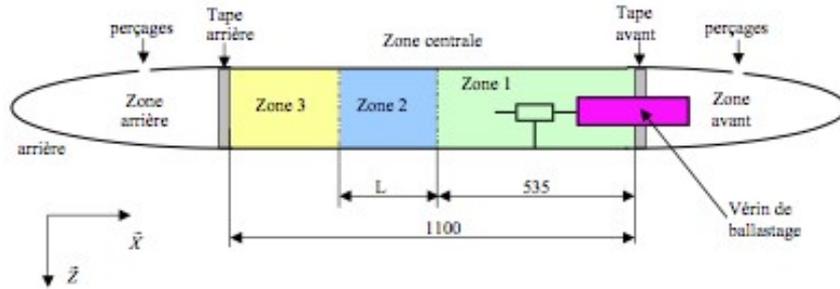


Figure 2 – Coupe du glider

1 Partie Solides : Dimensionnement du tube

On s'intéresse aux déformations du corps de l'engin sous l'action de la pression lorsqu'il est en position horizontale, à l'arrêt, en profondeur. Dans cette situation, on néglige les effets des ailes et des éléments situés à l'intérieur de l'engin (figure 3).

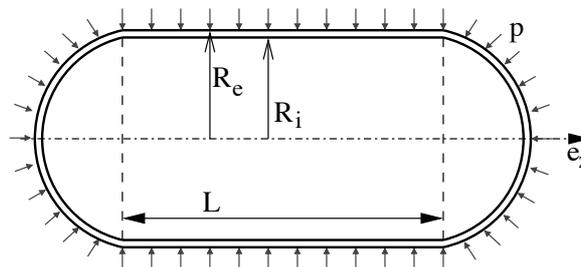


Figure 3 – Coque sous pression

On adopte les notations suivantes dans un référentiel cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, \vec{e}_z étant orienté selon l'axe d'avance du sous-marin :

- $\vec{u}(r, \theta, z) = u(r, \theta, z)\vec{e}_r + v(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + w(r, \theta, z)\vec{e}_z$ est le champ de déplacement cherché,
- $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{z\theta}$ et σ_{rz} sont les composantes du tenseur des contraintes recherché,
- $\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{r\theta}, \epsilon_{z\theta}$ et ϵ_{rz} sont les composantes du tenseur linéarisé des déformations qui s'expriment de la manière suivante :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2\epsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}, \quad 2\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\epsilon_{rz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

On ne s'intéresse pas à la déformation des zones avant et arrière. On considère que celles-ci n'influent pas sur la déformation du cylindre mais elles lui transmettent les effets de compression axiale de l'engin dus à l'action de la pression sur ces zones. Cette compression axiale est représentée par une contrainte $\sigma_{zz} = cste = \sigma_a$ uniforme. On considère donc le corps étudié comme un tube creux de longueur L , de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e (figure 4).

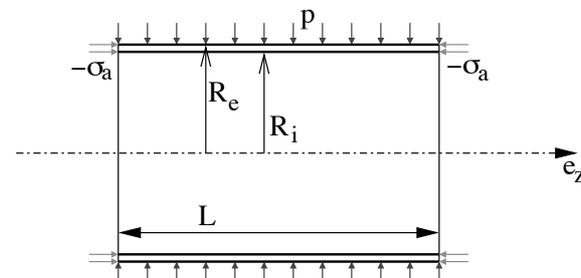


Figure 4 – Modèle de calcul adopté pour le cylindre

On considère que le cylindre est soumis à la pression de l'eau mesurée relativement à la pression interne qui est supposée constante. Le cylindre est donc soumis à une pression extérieure donnée p et à une pression intérieure nulle.

Question 1.1 • Rappeler les lois de Lamé et de Hooke, ainsi que l'expression des coefficients de Lamé en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson

Question 1.1 • Éléments de solution

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad \text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1-2\nu}{E} \text{Tr } \underline{\underline{\sigma}}$$

Question 1.2 • Poser le problème et détailler les conditions aux limites.

Question 1.2 • Éléments de solution

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0, \forall M \in \Omega \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\text{Tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}, \forall M \in \Omega$$

$$r = R_i : \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad ; \quad r = R_e : \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0 \quad ; \quad z = 0, z = L : \sigma_{zz} = -\sigma_a, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$$

Question 1.3 • Donner les hypothèses qui, compte-tenu des caractéristiques du problème, permettent de choisir un champ de déplacement de la forme :

$$\vec{u}(r, \theta, z) = u(r)\vec{e}_r + w(z)\vec{e}_z$$

Pour cela reproduire le tableau ci-dessous et cocher les cases pour lier une hypothèse à un effet sur la forme du champ de déplacement.

Hypothèse / Effet	$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$
Sections droites restent planes				
Axi-symétrie				
Homogénéité axiale du modèle				

Question 1.3 • Éléments de solution

Hypothèse / Effet	$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial r} = 0$
Sections droites restent planes				X
Axi-symétrie du modèle	X	X		
Homogénéité axiale du modèle			X	

Question 1.4 • Rappeler quelle est l'hypothèse formulée par l'utilisation du tenseur linéarisé des déformations.

Question 1.5 • Détailler la forme du tenseur linéarisé des déformations exprimé dans le repère cylindrique et exprimer ses composantes en fonction de u , w et de leurs dérivées.

Question 1.5 • Éléments de solution

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} ; \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} ; \quad \epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} ; \quad \epsilon_{r\theta} = \epsilon_{z\theta} = \epsilon_{rz} = 0$$

Question 1.6 • Sachant que λ et μ sont les coefficients de Lamé du comportement élastique du matériau, déterminer la forme du tenseur des contraintes.

Question 1.6 • Éléments de solution

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dr} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{dw}{dz} \right) ; \quad \sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \left(\frac{du}{dr} + \frac{dw}{dz} \right)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{dw}{dz} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) ; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = \sigma_{rz} = 0$$

Question 1.7 • Montrer que la composante σ_{zz} est de la forme :

$$\sigma_{zz} = \lambda f(r) + (\lambda + 2\mu)g(z)$$

où f et g sont deux fonctions qu'on explicitera.

Question 1.7 • Éléments de solution

$$f(r) = \frac{u(r)}{r} + \frac{du(r)}{dr} ; \quad g(z) = \frac{dw(z)}{dz}$$

Question 1.8 • Sachant que la contrainte σ_{zz} est constante, de valeur σ_a , montrer que les composantes de déplacement sont de la forme :

$$u(r) = \frac{a}{r} + br \quad \text{et} \quad w(z) = cz + d$$

où a, b, c et d sont des constantes à déterminer telles que : $2\lambda b + (\lambda + 2\mu)c = \sigma_a$

Question 1.8 • Éléments de solution

$$f(r) = \text{cste} = 2b \Rightarrow u(r) = \frac{a}{r} + br ; \quad g(z) = \text{cste} = c \Rightarrow w(z) = cz + b$$

Question 1.9 • En utilisant la loi de comportement élastique, déterminer les expressions de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction de E, ν, a, b et σ_a .

Question 1.9 • Éléments de solution

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu} b - \frac{E}{1+\nu} \frac{a}{r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_a ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu} b + \frac{E}{1+\nu} \frac{a}{r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_a$$

Question 1.10 • En utilisant les conditions aux limites, déterminer les expressions des constantes a et b en fonction de E, ν, p, σ_a, R_e et R_i . En déduire l'expression de la constante c .

Question 1.10 • Éléments de solution

$$a = -\frac{1+\nu}{E} \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p ; \quad b = -\frac{1-\nu}{E} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p - \frac{\nu}{E} \sigma_a ; \quad c = \frac{2\nu}{E} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p + \frac{1}{E} \sigma_a$$

Question 1.11 • En réalisant l'équilibre d'une extrémité du corps de l'engin dans la direction \vec{e}_z (figure 5), calculer la contrainte axiale σ_a en fonction de p, R_e et R_i .

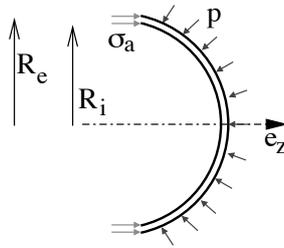


Figure 5 – Partie du corps à isoler

Question 1.11 • Éléments de solution

$$\sigma_a = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p$$

Question 1.12 • Montrer que les expressions analytiques des composantes de contrainte σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} en fonction de p , R_e et R_i , sont :

$$\sigma_{rr} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p \left(1 - \left(\frac{R_i}{r}\right)^2\right) ; \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p \left(1 + \left(\frac{R_i}{r}\right)^2\right) ; \quad \sigma_{zz} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p$$

Question 1.12 • Éléments de solution

$$\sigma_{rr} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p \left(1 - \left(\frac{R_i}{r}\right)^2\right) ; \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p \left(1 + \left(\frac{R_i}{r}\right)^2\right) ; \quad \sigma_{zz} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p$$

Question 1.13 • Donner les expressions analytiques des composantes de déplacement $u(r)$ et $w(z)$ en fonction de p , R_e , R_i , E , ν et d .

Question 1.13 • Éléments de solution

$$u = -\frac{p}{E} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(\frac{R_i^2}{r} + (1 - \nu)r\right) ; \quad w = -\frac{p}{E} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} (1 - 2\nu)z + d$$

Question 1.14 • Donner la variation de longueur ΔL du cylindre ainsi que sa variation de rayon intérieur ΔR_i .

Question 1.14 • Éléments de solution

$$\Delta R_i = u(R_i) = -\frac{p}{E} \frac{R_i R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} (2 - \nu)$$

$$\Delta L = w(L) - w(0) = cL = -\frac{p}{E} \frac{L R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} (1 - 2\nu)$$

Question 1.15 • On appelle $V = \Pi R_i^2 L$ le volume intérieur du cylindre non déformé. Montrer que l'expression de la variation relative de volume $\Delta V/V$ en fonction de L , ΔL , R_i et ΔR_i lorsqu'on ne conserve que les termes du premier ordre est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta R_i}{R_i}$$

Question 1.15 • Éléments de solution

$$V + \Delta V = \Pi(R_i^2 L + R_i^2 \Delta L + 2LR_i \Delta R_i + L\Delta^2 R_i + 2R_i \Delta R_i \Delta L_i + \Delta^2 R_i \Delta L)$$

donc

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta R_i}{R_i}$$

Question 1.16 • En déduire l'expression de la variation relative de volume en fonction de p , R_e , R_i , E , ν . Commenter la validité de ce résultat.

Question 1.16 • Éléments de solution

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{E} \frac{LR_e^2}{R_e^2 - R_i^2} (5 - 4\nu)$$

Question 1.17 • Avec les données suivantes : $E = 2.10^5 MPa$, $\nu = 0.3$, $L = 1.1m$, $R_e = 150mm$, $R_i = 148mm$ et $p = 100.10^5 Pa$, une application numérique des résultats obtenus à la question précédente donne une variation de volume de 0.5%. Que pensez-vous de ce résultat ? Qu'a-t-on négligé dans la démarche suivie jusqu'à maintenant ?

Question 1.17 • Éléments de solution

Cette variation de volume n'est pas très importante. Mais lorsque la coque se déforme, sa pression interne augmente. Cela n'a pas été pris en compte ici : la pression interne est restée nulle.

Question 1.18 • Dans le but de faire un dimensionnement aux risques de plasticité, exprimer la contrainte équivalente de von Mises en tout point situé à une distance r de l'axe du cylindre. En quels points cette contrainte est-elle maximale et quelle est cette valeur ?

Question 1.18 • Éléments de solution

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 \right)} = \sqrt{3} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2 (R_e^2 - R_i^2)} p$$

Cette contrainte est maximale sur les points situés à l'intérieur du cylindre ($r = R_i$) où elle vaut :

$$\sigma_{VM_{max}} = \sqrt{3} \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} p$$

Question 1.19 • En utilisant les données de la question 16, on calcule une contrainte équivalente maximale de 650MPa. Que pensez-vous de ce résultat. La plasticité est-elle le risque majeur ?

Question 1.19 • Éléments de solution

Il s'agit d'une valeur importante mais un certain nombre d'acier traité ont une limite élastique supérieure à cette valeur. Le risque majeur de ruine de la structure est plutôt le flambage.