Arts et Métiers
Sciences et Technologies

# PROBABILITES

Mohamad FARHAT

2022 - 2023

# Probabilités

**Objectifs :**

I. *Savoir calculer une probabilité, une probabilité conditionnelle*
II. *Savoir faire et exploiter un arbre pondéré*
III. *Connaître le vocabulaire*
IV. *Savoir reconnaître un schéma de Bernoulli*
V. *Savoir justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale*

*Savoir calculer une probabilité dans le cas d'*

a) *une loi binomiale*
b) *une loi de Poisson*
c) *une loi uniforme*
d) *une loi normale*
e) *une loi exponentielle*

*Savoir calculer l'espérance et la variance pour une loi*

a) *binomiale*
b) *de Poisson*
c) *uniforme*
d) *exponentielle*

*Savoir déterminer les quantiles d'une loi normale*

## ***Définitions***

***Expérience aléatoire :*** *expérience dont tous les résultats possibles sont déterminés à l'avance, mais que seul le hasard réalise un résultat plutôt qu'un autre.*

***Univers : décrit tous les issues (résultats) possibles de l'expérience aléatoire (Ω).***
***Événement : partie de l'univers.***

***Événement élémentaire : événement ne contenant qu'une seule issue.***

## ***Introduction***

*Les probabilités vont nous servir à modéliser une expérience aléatoire*

1) *Décrire les différentes issues possibles de l'expérience aléatoire*
2) *Décrire (calcul) la chance de chacune des éventualités de se réaliser*

***PROBABILITES***

## Exemple - Comment modéliser un lancer de dé ?

*Lancer un dé à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et s'intéresser au résultat obtenu sur la face supérieure constitue une expérience aléatoire.*

---

***Issues possibles = 1, 2, 3, 4, 5 et 6***

*L'univers de cette expérience est l'ensemble : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}*

*À chaque issue, on va mesurer la probabilité, c'est-à-dire la « chance » d'obtenir ce résultat.*

*On dit que l'on définit la loi de probabilité sur {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}*

***Un exemple d'événement : ?*** ***A = "on obtient un chiffre pair" → A = {2, 4, 6}***

***Un exemple d'événement élémentaire : ?***

## Réunion et intersection d'événements

Soient A et B deux événements

***Définitions***

Réunion de A et B, notée **A ∪ B** : événement qui se réalise lorsque **A ou B** se réalisent. Constitué des issues de A ou de B.

Intersection de A et B, notée **A ∩ B** : événement qui se réalise lorsque **A et B** se réalisent simultanément. Constitué des issues communes à A et à B.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

***"On tire une carte dans un jeu de 52 cartes"***

On considère les événements suivants :

***A : "Tirer un roi"***
***B : "Tirer une carte noire"***

Déterminer les ensembles A ∩ B et A ∪ B

***Définitions***

• L'événement certain est un événement qui se réalise toujours. Il est constitué de toutes les issues.

• L'événement impossible est l'événement qui ne se réalise jamais. Il n'est constitué d'aucune issue.

• L'événement contraire de A, est $\bar{A}$ : qui se réalise lorsque A ne se réalise pas

• Deux événements A et B sont incompatibles (ou disjoints) si A ∩ B = ∅.

***Rq : A et $\overline{A}$ sont incompatibles***

## Exemple - Comment modéliser un lancer de dé ?

*Lancer un dé à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et s'intéresser au résultat obtenu sur la face supérieure constitue une expérience aléatoire.*

---

***Issues possibles = 1, 2, 3, 4, 5 et 6***

*L'univers de cette expérience est l'ensemble : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}*

*À chaque issue, on va mesurer la probabilité, c'est-à-dire la « chance » d'obtenir ce résultat.*

*On dit que l'on définit la loi de probabilité sur {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}*

***Un exemple d'événement :*** ***A = "on obtient un chiffre pair" → A = {2, 4, 6}***

***L'événement contraire de A : ?***

# Probabilités

| Notations | Vocabulaire ensembliste | Vocabulaire probabiliste |
|---|---|---|
| $\Omega$ | Ensemble plein | Événement certain |
| $\emptyset$ | Ensemble vide | Événement impossible |
| $\omega$ | Élément de $\Omega$ | Événement élémentaire |
| A | Sous-ensemble de $\Omega$ | Événement |
| $\mathrm{A} \cup B$ | Réunion de A et B | $A \; ou \; B$ |
| $A \cap B$ | Intersection de $A \; et \; B$ | $A \; et \; B$ |
| $\bar{A}$ | Complémentaire de $A$ | Événement contraire de $A$ |
| $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$ | A et B sont disjoints | A et B incompatibles |

# Probabilités

***Définition :*** *Une probabilité est une application sur $P(\Omega)$, l'ensemble des parties de $\Omega$ telle que :*

*1)* $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall$ *événement* $A \subseteq \Omega$
*2)* $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \quad \forall A$
*3)* $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$
*4)* $A_1, A_2, \ldots A_n$. *n Événements disjoints* $\Rightarrow$ $P(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$P(A) = 0{,}91$ → $A$ va très probablement se produire
$P(A) = 0{,}01$ → $A$ a très peu de chance d'être réalisé
$P(A) = 0{,}5$ → une chance sur deux
$P(A) = 0$ → aucune chance que $A$ soit réalisé
$P(A) = 2$ → incorrect
$P(A) = -1$ → incorrect

***Propriété : Soit P une probabilité sur Ω et A et B deux événements, alors***

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Fréquence

***Définition***

- La fréquence d'une valeur est égale à l'effectif de cette valeur divisé par l'effectif total.
- Distribution de fréquences d'une expérience aléatoire : ensemble des fréquences de chaque issue.

**Proposition**

- La somme des fréquences de toutes les issues vaut 1.
- La fréquence d'un événement A est la somme des fréquences des issues qui le constituent

***Proposition***

Soient A et B deux événements.

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3) $P(\emptyset) = 0$
4) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
5) Si $A \subset B$ alors $P(B / A) = P(B) - P(A)$ ( $P(A) \leq P(B)$ )

Arts et Métiers Sciences et Technologies

***Exercice On lance un dé à 6 fois :***

| FACES | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilités | 1/12 | 1/12 | 1/10 | 1/10 | 1/8 | |

1) ***Compléter le tableau pour obtenir une loi de probabilité***
2) ***On considère l'événement A : « OBTENIR UN NOMBRE PAIR »***
   ***Calculer la probabilité de A***
3) ***Que pensez-vous de ce dé ?***

***Exercice On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.***
***On considère les événements suivants :***
- ***V : "Obtenir une dame"***
- ***C : "Obtenir un cœur"***
- ***D : "Obtenir une carte dont la valeur est strictement inférieure à celle d'un roi"***

***Calculer P(V), P ($V \cup C$) et P(D).***

# *Indépendance et conditionnement « probabilité conditionnelle »*

Soient A et B deux événements, avec P(A) > 0

***Définition***

On appelle probabilité de B conditionnellement à A, ou sachant A, la probabilité notée P(B|A) (ou $P_A(B)$ ) définie par :

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)}$$

## Indépendance et conditionnement « probabilité conditionnelle »

Une urne contient $r$ boules rouges et $v$ boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Choisissons Ω qui décrit les résultats de l'expérience précisément.

$$\Omega = \{rouge, verte\} \times \{rouge, verte\}$$

Un événement élémentaire est un couple (x, y) où x est la couleur de la première boule tirée et y la couleur de la seconde.
Soit A l'événement "la première boule est rouge"
Et B l'événement "la seconde boule est rouge"

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \times \frac{r}{r+v}$$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

# Indépendance et conditionnement « probabilité conditionnelle »

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0 \; et \; P(B) \neq 0$

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

***Propositions***

*1)* $P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$

***Généralisation :*** $(B_i)_{i \in I}$ $un \; SCE \; ; \; avec \; P(B_i) \neq 0 \;\; \forall i \;\; \Rightarrow$

$$P(A) = \sum_{i \in I} P_{B_i}(A) \times P(B_i)$$

2) $P_A(B) = \dfrac{P_B(A) \times P(B)}{P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})}$ (Formule de Bayes)

## *Indépendance et conditionnement « probabilité conditionnelle »*

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si :

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Soient $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ $\boldsymbol{n}$ événements.
Les événements sont mutuellement indépendants si,

$$\forall k \leq n, \qquad \forall\ i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}\ distincts \text{ on a :}$$

$$\boldsymbol{P\left(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \times P\left(A_{i_2}\right) \times \cdots \times P\left(A_{i_n}\right)}$$

événements mutuellement indépendants ⇒ événements indépendants deux à deux

## Indépendance et conditionnement « probabilité conditionnelle »

Exercice – Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
On suppose que $A \cap B = \emptyset$.
À quelle condition les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice – Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
On considère les événements suivants :
A : "La carte tirée est un carreau"
B : "La carte tirée est un trèfle"
C : "La carte tirée est un as"

1 Quels sont les événements incompatibles ?
2 Quels sont les événements indépendants ?

## Indépendance et conditionnement « probabilité conditionnelle »

Exercice – Supposons que les faces d’un dé sont truquées de telle manière que les numéros impairs ont chacun la même chance d’apparaître, chance qui est deux fois plus grande que pour chacun des numéros pairs. On jette le dé. Quelle est la probabilité d’obtenir un nombre supérieur ou égal à 4 ?

## Variables aléatoires

***On définit une variable aléatoire v.a. « X » en associant un nombre réel à chaque éventualité d'une expérience aléatoire***

***« Nombre dépendant du résultat d'une expérience aléatoire »***

Exercice – On lance deux dés cubiques distincts.

A. Si on s'intéresse à la somme des deux faces obtenues :

1 Déterminer l'univers $\Omega$ de l'expérience aléatoire.

2 Peut-on définir une fonction $X : \Omega \rightarrow R$ qui illustre cette expérience ?

B. Si on s'intéresse au plus grand chiffre obtenu : 1) 2)

***La loi de probabilité d'une v.a. X :***

***Permet de connaître les chances d'apparition des différentes valeurs de X***
***→ la probabilité de l'événement X=a : P(X=a)***

## Variables aléatoires

*La loi de probabilité d'une v.a. X :*

*Permet de connaître les chances d'apparition des différentes valeurs de X*
*→ la probabilité de l'événement X=a : P(X=a)*

### Définition

*Soit (Ω, P) un espace probabilisé, X une v.a.*

*Loi de probabilité de X :*

$$
\begin{aligned}
P_X : IR &\to [0,1] \\
x &\to P_X(\{\omega \in \Omega,\ X(\omega\} = x) = P(X = x)
\end{aligned}
$$

Arts et Métiers Sciences et Technologies

## Fonction de répartition

***Si $X$ : Ω → $IR$ est une variable aléatoire réelle v.a.r.***
***On appelle fonction de répartition de $X$ la fonction***

$F: \ IR \rightarrow [0,1]$ ***définie pour tout $\boldsymbol{a} \in IR$ par***

$$F(\boldsymbol{a}) = P_X(]-\infty, \boldsymbol{a}]) = P(X \leq \boldsymbol{a})$$

***Soient a, b ∈ IR avec a < b, P(a < X ≤ b) = ? ?***

*Cette fonction est croissante continue à droite sur $IR$.*

*Elle varie de 0 à 1, autrement dit :*

$$\lim_{x\rightarrow -\infty} F(x) = 0 \qquad \& \qquad \lim_{x\rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Arts et Métiers Sciences et Technologies

## Fonction de répartition

**v.a.r. discrète : v.a.r. X à valeurs dans un ensemble χ fini ou dénombrable.**

$\forall A$ partie de **χ on a :**

$$P_X(A) = P(x \in A)$$
$$= \sum_{x \in A} P(X = x) \quad et \quad P_X(\chi) = \sum_{x \in \chi} P(X = x) = 1$$

**Si $X$ est une variable aléatoire réelle prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$**
**on appelle espérance de $X$ le réel**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P_i$$

**On appelle variance de $X$ la quantité :**

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \, P_i \quad = \quad E\left((X - E(X))^2\right)$$

**et écart-type de $X$ la quantité $\sigma_X = \sigma = \sqrt{V(X)}$.**

## Définitions

*On dit que* $X$ *est centrée si* $\mathrm{E}(X) = 0$
*L'espérance vérifie les propriétés suivantes :*

- ***Linéaire :*** $\mathrm{E}(aX + \boldsymbol{b}) = aE(X) + \boldsymbol{b}$
  $\mathrm{E}(aX + \boldsymbol{Y}) = aE(X) + E(Y)$
- ***Positive : si*** $X \geq 0 \ \rightarrow E(X) \geq 0$
- ***Croissante : si*** $X \leq Y \ \rightarrow E(X) \leq E(Y)$

***Si*** $X$ ***et*** $Y$ ***sont indépendantes, alors*** $\mathrm{E}(XY) = E(X)E(Y)$ ***. La réciproque est fausse en général***

***La variance vérifie les relations suivantes :***

$$\mathrm{V}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \qquad \textbf{\textit{Formule de Koenig}}$$

$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 Var(X)$
***On dit que*** $X$ ***est réduite si*** $\mathrm{V}(X) = 1$

## Définitions

.

Soit X une v.a.r. discrète.

- Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.
- Si $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur.
- Si $E(X) = 0$, le jeu est équitable.

*Exercice On lance trois pièces de monnaie équilibrées.*

- *1 Quel est l'univers Ω associé ?*

*On gagne 1 euro chaque fois que face apparaît et on perd 1 euros chaque fois que pile apparaît.*

*On note X la fonction qui, à chaque issue, associe le gain algébrique (positif ou négatif) correspondant.*

- *2 Quelles sont les valeurs prises par X ?*
- *3 Donner la loi de probabilité de X.*
- *4 Le jeu est-il équitable ?*

## Définitions

*X est une v.a.r. continue sur X → prend ses valeurs dans un intervalle de IR.*

*Soit X une v.a.r. continue.*

*Si F(X) est dérivable, la **densité de probabilité** de X :*

*fonction f définie par, ∀x ∈ R,* $f(x) = F'(x)$

*Si la variable aléatoire est continue :*

$$p(X \leq a) = F(a) = \int_{-\propto}^{a} f(x)dx$$

- *La fonction de densité* $f$ *est positive sur IR*
- $P_X(x \in [a,b]) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
- $\int_{-\propto}^{+\propto} f(x)dx = 1$

Arts Sciences et Technologies et Métiers

## Exercice

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1 \\ x + 1 \text{ si } -1 < x \leq 0 \\ -x + 1 \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 2e^{-2x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

***Justifier que les trois fonctions sont bien des densités de probabilités et tracer ces trois fonctions.***

Arts Sciences et Technologies et Métiers

## Définitions

***Si la variable aléatoire est continue :***

$$p(X \leq a) = F(a) = \int_{-\propto}^{a} f(x)dx$$

- ***Espérance de X :*** $E(X) = \int_{-\propto}^{+\propto} xf(x)dx$
- ***Variance de X :*** $V(X) = \int_{-\propto}^{+\propto} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$
- ***Ecart-type de X :*** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Si on reprend la fonction $f_2$ définie par :

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 \quad si\ x \leq -1 \\ x+1 \ \ si \ \ -1 < x \leq 0 \\ -x+1 \ \ si\ 0 < x \leq 1 \\ 0 \quad si\ x > 1 \end{cases}$$

Calculer l’espérance et la variance associée.

## Lois discrètes finies usuelles

### 1. Épreuve de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, que l'on note $B(p)$,

lorsque $X$ ne prend que deux valeurs {Succès, Echec}, {Face, Pile}, … avec :

$$P(X = \textit{Succès}) = p$$
$$P(X = \textit{Echec}) = 1 - p$$

On a alors $\mathrm{E}(X) = p \quad \& \quad Var(X) = p(1-p)$

## Lois discrètes finies usuelles

### Définition Suite de Bernoulli

*Une suite d'épreuves de Bernoulli est un schéma de Bernoulli si :*

- *le nombre d'épreuves n est fixé à l'avance.*
- *toutes les épreuves sont identiques et indépendantes.*
- *la probabilités p d'obtenir un succès est constante d'une épreuve à l'autre.*

## Lois discrètes finies usuelles

### 2. Loi binomiale

**On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n \in IN^*$ et $p \in [0,1]$, que l'on note $B(n,p)$,**

**lorsque $X$ est à valeurs dans {0, …, $n$}, avec, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,**

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

**On a alors** $\mathrm{E}(X)=np \quad \& \quad Var(X)=np(1-p)$

$\binom{n}{k}$ **se lit « k parmi n » que l'on note** $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

**« K succès lors de n répétitions »**

## Lois discrètes finies usuelles

*Exercice*

*Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises.*

*La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes.*

*Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses ?*

Arts Sciences et Technologies et Métiers

## Lois discrètes finies usuelles

**Correction**

*On effectue 25 tirages aléatoires, identiques et indépendants.*

*À chaque tirage il n’y a que deux issues :*
*L’événement A “l’entreprise lui répond” et $\bar{A}$.*

*De plus P(A)=0.2*

*La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres*
$n=25$ & $p=0.2$

Ainsi $p(X \geqslant 5)=1-p(X \leqslant 4) \approx 0.579$

***Exercice***

Une entreprise fabrique une grande quantité de tubes.

Dans un lot de tubes, 3% des tubes ne sont pas conformes pour la longueur.

On prélève au hasard 50 tubes de ce lot et ce lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.

On considère la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1 Justifier que la variable aléatoire Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2 Calculer la probabilité $P(Z = 0)$.

3 Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un tube ne soit pas conforme pour la longueur.

***Exercice***

Une entreprise fabrique des conserves alimentaires dont l'étiquette annonce une masse de 250g. Les masses obtenues pour un échantillon de 500 conserves prises au hasard sont données dans le tableau suivant :

| *Masse (en g)* | *[235;240[* | *[240;245[* | *[245;250[* | *[250;255[* | *[255;260[* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Nbrs de conserves* | *33* | *67* | *217* | *132* | *51* |

I. 1. Calculer, en utilisant le milieux des classes, la masse moyenne, ainsi que l'écart type des conserves de cet échantillon. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
2. Calculer le pourcentage de conserves alimentaires ayant une masse comprise entre 240 et 255g

***Exercice***

Une entreprise fabrique des conserves alimentaires dont l'étiquette annonce une masse de 250g. Les masses obtenues pour un échantillon de 500 conserves prises au hasard sont données dans le tableau suivant :

| *Masse (en g)* | *[235;240[* | *[240;245[* | *[245;250[* | *[250;255[* | *[255;260[* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Nbrs de conserves* | *33* | *67* | *217* | *132* | *51* |

II. On prélève au hasard une conserve dans l'échantillon.

On considère les deux événements suivants :

A : "la conserve a une masse strictement inférieure à 250g"

B : "la conserve a une masse au moins égale à 240g"

1 Calculer p(A) et p(B).

2 Déterminer $P_B(A)$ au millième.

3 Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Arts Sciences et Technologies et Métiers

III. Parmi l'échantillon de 500 conserves, on choisit successivement, au hasard, et avec remise, 30 conserves.
On note X la variable aléatoire qui à un tel prélèvement associe le nombre de conserves de masse strictement inférieure à 250g

1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres
2 Calculer l'espérance E(X). Interpréter ce résultat
3 Calculer p(X = 15) et p(X = 20) au millième et interpréter les résultats

## Lois discrètes finies usuelles

### 3. Loi de Poisson

La loi de Poisson est aussi appelé la Loi des évènements rares notée $P(\lambda)$.
On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi de Poisson qui est une loi de probabilité discrète. Elle décrit la probabilité qu'un

- événement se réalise durant un intervalle de temps donné
- la probabilité de réalisation d'un événement est très faible
- le nombre d'essais est très grand ainsi
- le futur est indépendant du passé.

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

On a alors $\mathrm{E}(X) = \lambda \quad \& \quad Var(X) = \lambda$

## Lois discrètes finies usuelles

### 3. Loi de Poisson

Soit une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre 2.3

Calculer les probabilités suivantes : $p(X = 4)$ & $p(X \leq 4)$

**Proposition**

Pour $n > 30$, $p < 0.1$, 1 tels que $np < 10$

On peut approcher :
la loi binomiale $\mathrm{B}(\mathrm{n}, p)$ par la loi de Poisson $\mathrm{P}(\lambda = np)$.

## Lois discrètes finies usuelles

### 3. Loi de Poisson

Il y a $7.10^6$ joueurs qui misent au loto. La probabilité de gagner est environ 1 chance sur $5.10^6$ .

Quelle est la loi qui décrit le nombre de joueurs gagnants ?

***Loi Binomiale B*** $\left(7.10^6, \frac{1}{5.10^6}\right)$

Mais à l'évidence cette loi décrit décrit des événements rares.

On remplace la loi binomiale par

la loi de Poisson de même espérance $\mathrm{E}(X) = np = \frac{7}{5} = 1,4$

$$\rightarrow \lambda = 1,4 \quad \rightarrow \quad P(X = k) = 1,4^k . \frac{e^{-1,4}}{k!}$$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Uniforme

*On dit que $X$ suit une loi uniforme discrète sur un ensemble fini $E$ lorsque $X$ prend toutes ses valeurs dans $E$ et que, pour chaque $x \in E$,*

$$P(X = x) = \frac{1}{Card(E)}$$

*Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle [a;b].*
*On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme lorsque sa densité de probabilité est une fonction constante sur [a;b].*
*Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [a,b] si, pour tout réels $c, d \in [a, b]$ avec $c < d$ on a*

$$p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx$$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Uniforme

*La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle [a;b] est définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a,b] \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

*L'espérance mathématique de X qui suit une loi uniforme n'est autre que la moyenne des deux valeurs a et b :*

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

*Ainsi*

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Uniforme

**Exercice**

Soit X la variable aléatoire continue qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0;10].

$$f(x) = \frac{1}{10}$$

1°) Déterminer la fonction densité f associée à cette variable aléatoire continue.

2°) Calculer :

a) P(X=3) ;

$$P(X = 3) = P(3 \leq X \leq 3) = \frac{3-3}{10}$$

b) $P(2 \leqslant X \leqslant 8)$ ;

$$P(2 \leq X \leq 8) = \frac{3}{5}$$

c) $P(X \leqslant 6)$ ;

$$P(X \leq 6) = P(0 \leq X \leq 6) = \frac{3}{5}$$

d) $P(X \geqslant 8)$.

$$P(X \geq 8) = P(8 \leq X \leq 10) = \frac{1}{5}$$

3°) Calculer l'espérance de X sur [0;10].

$$E(X) = \frac{10}{2} = 5$$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Normale

**4.1 Loi Normale centrée réduite NCR**

La loi normale centrée réduite (ou loi de Gauss)

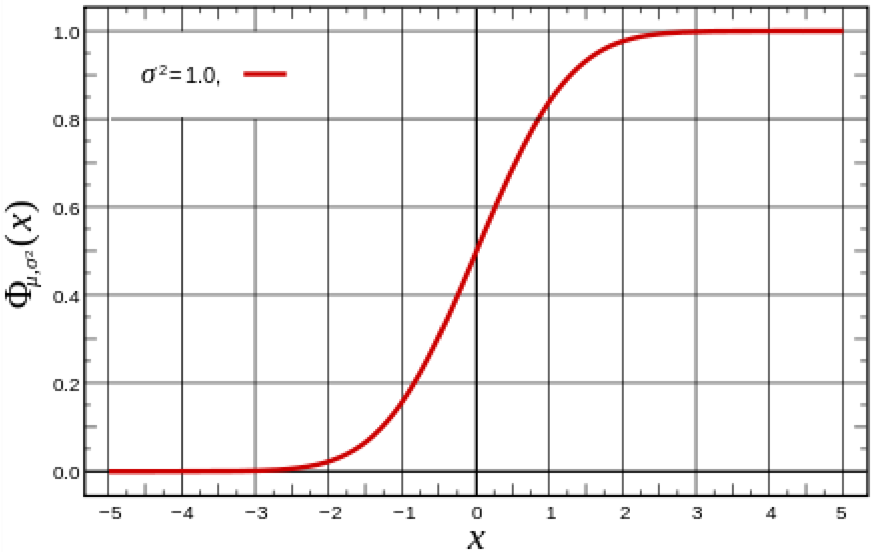
C'est la loi de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

L'espérance est égale à 0 et l'écart-type est égal à 1.

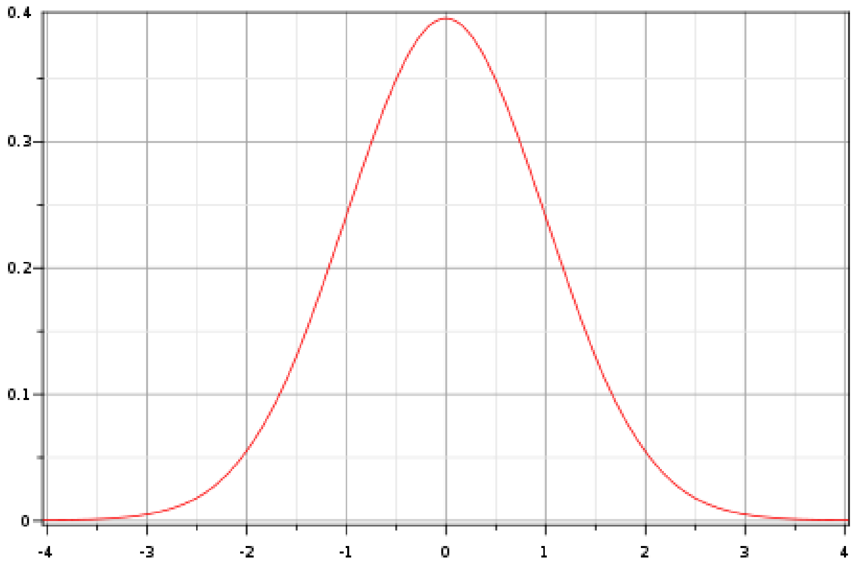
On note $N(0,1)$

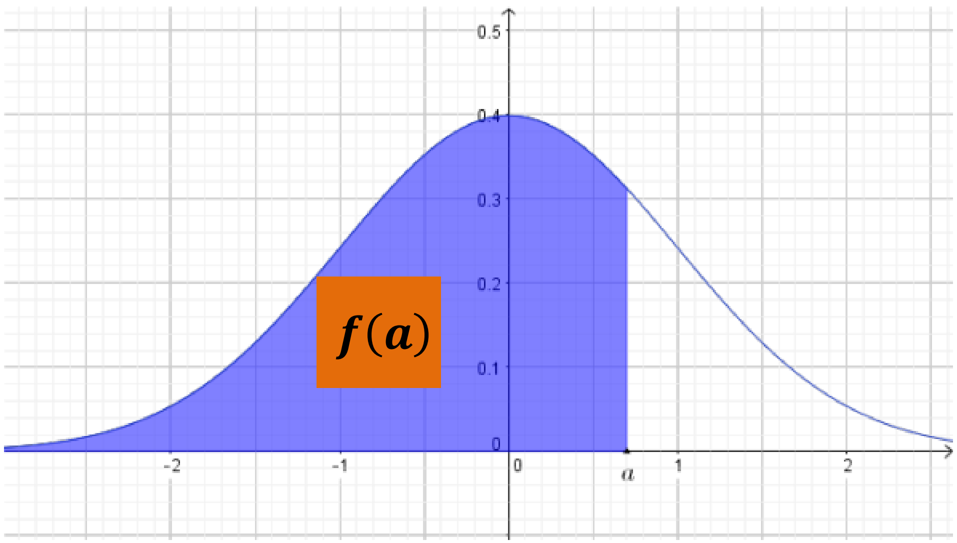
# Probabilité




Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$






Fonction de densité de la loi normale centrée réduite (dite courbe de Gauss)

# Probabilité

*X suit une loi Normale centrée réduite NCR*

$$P(X \leq 0,36) = F(0,36) = 0,641$$
$$F(-a) = 1 - F(a)$$

| X | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5 | 0,504 | 0,508 | 0,512 | 0,516 | 0,52 | 0,524 | 0,528 | 0,532 | 0,536 |
| 0,1 | 0,54 | 0,544 | 0,548 | 0,552 | 0,556 | 0,56 | 0,564 | 0,567 | 0,571 | 0,575 |
| 0,2 | 0,579 | 0,583 | 0,587 | 0,591 | 0,595 | 0,599 | 0,603 | 0,606 | 0,51 | 0,614 |
| 0,3 | 0,618 | 0,622 | 0,626 | 0,629 | 0,633 | 0,637 | 0,641 | 0,644 | 0,648 | 0,652 |
| 0,4 | 0,655 | 0,659 | 0,663 | 0,666 | 0,670 | 0,674 | 0,677 | 0,681 | 0,684 | 0,688 |
| 0,5 | 0,691 | 0,695 | 0,698 | 0,702 | 0,705 | 0,709 | 0,712 | 0,716 | 0,719 | 0,722 |
| 0,6 | 0,726 | 0,729 | 0,732 | 0,736 | 0,739 | 0,742 | 0,745 | 0,749 | 0,752 | 0,755 |
| 0,7 | 0,758 | 0,761 | 0,764 | 0,767 | 0,77 | 0,773 | 0,776 | 0,779 | 0,782 | 0,785 |
| 0,8 | 0,788 | 0,791 | 0,794 | 0,797 | 0,8 | 0,802 | 0,805 | 0,808 | 0,811 | 0,813 |
| 0,9 | 0,816 | 0,819 | 0,821 | 0,824 | 0,826 | 0,829 | 0,831 | 0,834 | 0,836 | 0,839 |
| 1 | 0,841 | 0,844 | 0,846 | 0,848 | 0,851 | 0,853 | 0,855 | 0,858 | 0,86 | 0,862 |

Arts et Métiers Sciences et Technologies

## 4. Loi Normale

### 4.1 Loi Normale centrée réduite NCR

*X suit une loi* $N(0,1)$ *alors* $\forall a \leq b$ :

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F(a)$
- $P(X \leq -|a|) = 1 - F(|a|)$

**Intervalle de Confiance :**

*X suit une loi* $N(0,1)$ *et* $\alpha \in ]0;1[$ , Il existe un unique réel $u_\alpha$ strictement positif, tel que :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

*Valeurs à retenir*

$$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$$
$$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Normale

#### 4.2 Loi Normale

On dit que X v.a qui suit une loi Normale notée $N\left(m, \sigma^2\right)$

Si sa densité est la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

Alors :

Sa courbe a pour axe de symétrie $x = m$

- $E(X) = m, \ \ V(X) = \sigma^2$
- $\forall a \leq b \in IR, \ \ P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- $P(X \geq m) = P(X \leq m) = 0.5$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Normale

### 4.2 Loi Normale

On dit que X v.a qui suit une loi Normale notée $N(m, \sigma^2)$

Si sa densité est la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

Alors :

- $P(X = a) = 0 \quad \forall a \, réel$
- $P(X \leq a) = P(X < a)$
- $P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) = 0.683$
- $P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = 0.954$
- $P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) = 0.997$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Normale

**Exercice**

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale N (13;16).

Calculer les probabilités suivantes :

$P(X \leq 15)$; $P(X < 10)$; $P(11 < X < 15)$; $P(X > 11)$ $P(X \geq 17)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\forall a \leq b \in IR, \qquad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$P(X \leq 15) \approx 0,6915$

$P(X < 10) \approx 0,2266$

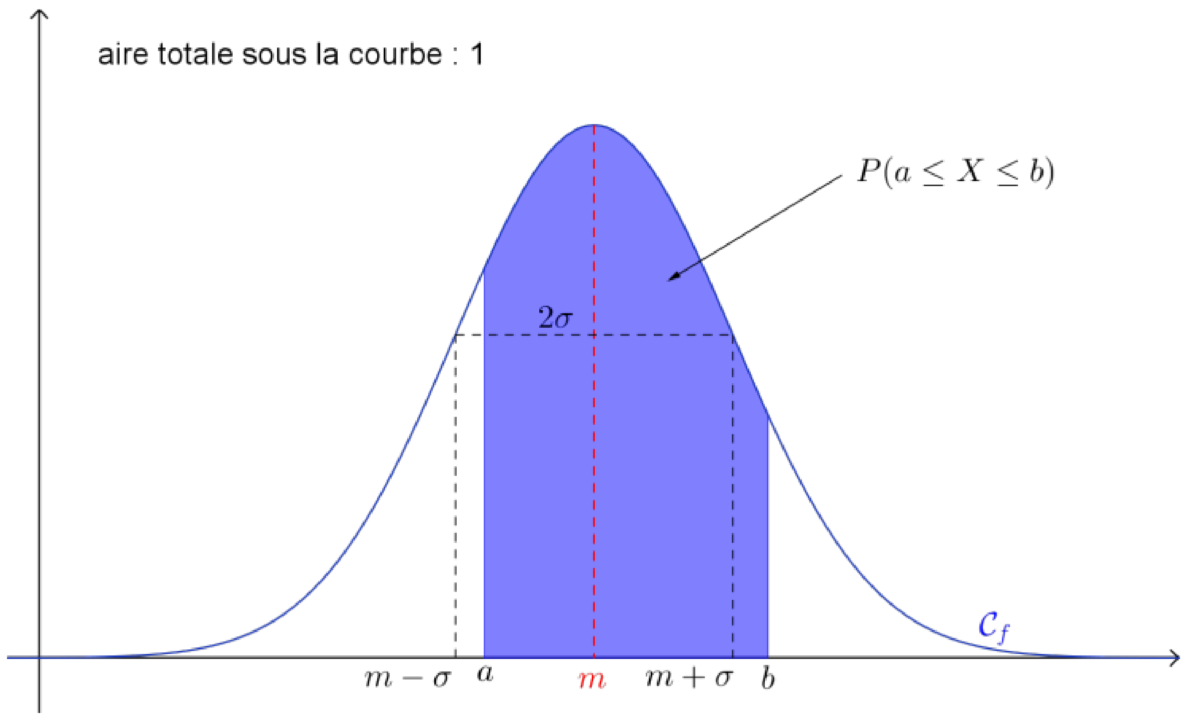
$P(11 < X < 15) \approx 0,3829$

$P(X > 11) \approx 0,6915$

$P(X \geq 17) \approx 0,1587$

## Lois discrètes finies usuelles

### 4. Loi Normale




$$\forall a \leq b \in IR, \qquad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

## Lois discrètes finies usuelles

***Proposition 1***

***Si X suit une loi de Normale $N\left(m,\sigma^2\right)$ alors la variable $\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi NCR $N(0;1)$***

***Proposition 2***

Pour $n \geq 30$, $np \geq 5$, 1 tels que $n(1-p) \geq 5$

On peut approcher :

la loi binomiale $\mathrm{B}(\mathrm{n},p)$ par la loi de Normale $\mathrm{N}(np\ ;\ np(1-p))$.

## Lois discrètes finies usuelles

### 5. Loi Exponentielle

*On dit que X v.a qui suit une loi Exponentielle de paramètre λ notée* $E(\lambda)$
*Si sa densité est la fonction :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

- $P(X \leq a) = F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $E(X) = \frac{1}{\lambda},\ \ V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $\forall a \leq b \in IR,\ \ P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

## Lois discrètes finies usuelles

### 6. Loi sans mémoire

Une v.a. X, à valeurs positives, est dite sans mémoire si elle vérifie, pour tous x et y réels positifs,

$$P_{X\geq y}(X \geq x+y) = P(X \geq x)$$

Soit X une v.a. continue.

X suit une loi exponentielle si et seulement si X est sans mémoire