Probabilités

Objectifs :

- **C2.1** Savoir calculer une probabilités, une probabilité conditionnelle
- **C2.2** Savoir faire et exploiter un arbre pondéré
- **C2.3** Connaître le vocabulaire
- **C2.4** Savoir reconnaître un schéma de Bernoulli
- **C2.5** Savoir justifier qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale
- **C2.6** Savoir calculer une probabilité dans le cas d'une loi binomiale
- **C2.7** Savoir calculer l'espérance et la variance pour une loi binomiale
- **C2.8** Savoir calculer une probabilité dans le cas d'une loi de Poisson
- **C2.9** Savoir calculer l'espérance et la variance pour une loi de Poisson
- **C2.10** Savoir calculer une probabilité dans le cas d'une loi uniforme
- **C2.11** Savoir calculer l'espérance et la variance pour une loi uniforme
- **C2.12** Savoir calculer une probabilité dans le cas d'une loi normale
- **C2.13** Savoir déterminer les quantiles d'une loi normale
- **C2.14** Savoir calculer une probabilité dans le cas d'une loi exponentielle
- **C2.15** Savoir calculer l'espérance et la variance pour une loi exponentielle

Table des matières

I Généralités sur les probabilités . . . 3
- I.1 Vocabulaire . . . 3
- I.2 Probabilité d'un événement . . . 3
- I.3 équiprobabilité . . . 5

II Probabilités conditionnelles . . . 5
- II.1 Définition . . . 5
- II.2 Indépendance entre deux événements . . . 6
- II.3 Indépendance entre plusieurs événements . . . 6

III Variables aléatoires . . . 7
- III.1 Définition . . . 7
- III.2 Loi de probabilité, fonction de répartition . . . 7
- III.3 Variables aléatoires réelles discrètes . . . 7
- III.4 Variables aléatoires réelles continues . . . 8

IV Loi binomiale . . . 10
- IV.1 épreuve de Bernoulli . . . 10
- IV.2 Loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ . . . 10

V Loi de Poisson . . . 11

VI Loi uniforme sur $[a;b]$ . . . 12

VII Loi normale . . . 13
- VII.1 Loi normale centrée réduite . . . 13
- VII.2 Loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ . . . 15

VIII Loi exponentielle . . . 16

A Démonstrations **18**

B Table de la loi normale centrée réduite **23**

I Généralités sur les probabilités

I.1 Vocabulaire

On dit d'une expérience qu'elle est aléatoire lorsque tous les résultats possibles sont déterminés à l'avance, mais que seul le hasard réalise un résultat plutôt qu'un autre.

Définition 1 ❤ :

- *L'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire, appelés* ***issues*** *de l'expérience aléatoire, est appelé* ***univers****, on le note* Ω.
- *On appelle* ***événement*** *une partie de l'univers.*
- *Un* ***événement élémentaire*** *est un événement qui ne contient qu'une seule issue.*
- *La* ***réunion des événements*** *A* ***et*** *B est l'événement, noté $A \cup B$, qui se réalise lorsque A ou B se réalisent. Il est constitué des issues de A et de celles de B.*
- *L'****intersection des événements*** *A* ***et*** *B est l'événement, noté $A \cap B$, qui se réalise lorsque A et B se réalisent simultanément. Il est constitué des issues communes à A et à B.*
- *Le* ***contraire*** *de l'événement A (ou* ***événement contraire****) est l'événement, noté $\overline{A}$, qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. Il est constitué des issues qui ne sont pas dans A.*
- *L'****événement certain*** *est un événement qui se réalise toujours. Il est constitué de toutes les issues.*
- *L'****événement impossible*** *est l'événement qui ne se réalise jamais. Il n'est constitué d'aucune issue.*
- *Deux événements A et B sont* ***incompatibles*** *(ou* ***disjoints****) si $A \cap B = \emptyset$.*

I.2 Probabilité d'un événement

Définition 2 : *On appelle distribution de fréquences d'une expérience aléatoire l'ensemble des fréquences de chaque issue.*

Rappel : La fréquence d'une valeur est égale à l'effectif de cette valeur divisé par l'effectif total.

Proposition 1 ❤ :

- La somme des fréquences de toutes les issues vaut 1.
- La fréquence d'un évènement A est la somme des fréquences des issues qui le constituent.

Proposition 2 ❤ : Loi des grands nombres : Lorsque l'on augmente le nombre de réalisations d'une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue se rapproche d'une valeur limite.

Exemple : Voir le fichier Excel simulation_lancers de dé.xlsx
On simule plusieurs lancers d'un dé et on note les fréquences d'apparition de chacune des faces. On remarque que, si le nombre de lancers est important, les fréquences d'apparition de chacune des faces tend vers $\frac{1}{6}$.

Définition 3 : *Une **probabilité** ou **mesure de probabilité** P sur Ω est une application sur l'ensemble des événements telle que*

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) *Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$*

(iii) *Pour tout suite d'événements A_1, A_2, ... d'événements disjoints (pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$), on a*

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Proposition 3 ❤ :

Soit P une probabilité sur Ω.

- $P(\emptyset) = 0$
- Si A et B sont deux événements disjoints, alors
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
Si A_1, ..., A_n sont n événements disjoints,
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
- Pour tout événement A, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$, alors
$$P(A) \leq P(B) \text{ et } P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Preuve : **en Annexe**

Proposition 4 ❤ :

Soient A et B deux événements quelconques, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve : **en Annexe**

cas particulier d'un ensemble fondamental discret :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Une **probabilité** sur Ω est entièrement déterminée par les probabilités $p_i = P(\{\omega_i\})$, pour $i \geq 1$.
En effet, si A est un événement,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

De plus, $\Omega = \bigcup_i \{\omega_i\}$, donc

$$\sum_i p_i = 1$$

p_i est appelé **probabilité** de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$.

I.3 équiprobabilité

❤

Si $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est un espace fini où les événements élémentaires $\{\omega_i\}$ sont distincts, on définit **la probabilité uniforme** comme la probabilité qui associe à chaque singleton $\{\omega_i\}$ la même valeur, ie

$$P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\}) \text{ pour tout } i, j.$$

$$\text{Soit } j \in \{1, ..., n\},$$

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = n \times P(\{\omega_j\}), \text{ donc } P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{n}.$$

On parle alors de **situation d'équiprobabilité**.

II Probabilités conditionnelles

On considère un univers Ω muni d'une loi de probabilité P.

II.1 Définition

Définition 4 ❤ *: Soit B un événement, telle que $P(B) \neq 0$.*
*La **probabilité que** A **soit réalisé sachant que** B **est réalisé** est :*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition 5 ❤ *:*

Soient A et B deux événements quelconques, tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$$

Preuve : Découle directement de la définition.

Proposition 6 ❤ *:*

Formule des probabilités totales : Soient A et B deux événements quelconques, tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Alors,

$$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P\left(\overline{B}\right)$$

Preuve : **en Annexe**

Cette formule se généralise.
Soit $\{B_i\}_{i \in I}$ un **système complet d'événements** (un ensemble d'événements disjoints, tel que $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$) tous de probabilité non nulle et soit A un événement, alors

$$\boxed{P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P_{B_i}(A) \times P(B_i)}$$

Proposition 7 ❤ : Formule de Bayes : Soient A et B deux événements quelconques, tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \times P(B)}{P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P\left(\overline{B}\right)}$$

Remarque : Cette formule permet de calculer les probabilités à posteriori d'un événement en fonction des probabilités à priori de cet événement.

Preuve : $P_A(B) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} = \dfrac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$
On applique ensuite la formule des probabilités totales pour obtenir la formules de Bayes.

Remarque : $P_{\overline{B}} \neq 1 - P_B(A)$. Par contre $P_B\left(\overline{A}\right) = 1 - P_B(A)$.
La fonction $A \rightarrow P_B(A)$ est une probabilité.

II.2 Indépendance entre deux événements

Dans le langage courant, on dit de deux événements qui ne sont pas liés entre eux, qu'ils sont indépendants. Par conséquent, on a tendance à dire que si A et B sont indépendants, la connaissance de B ne donne aucune information utile pour la connaissance de l'événement A et donc de manière naturelle $P_B(A)$ doit être égale à $P(A)$.

Définition 5 ❤ : *Deux événements A et B de probabilité non nulle sont* ***indépendants*** *si*

$$P\left(A \cap B\right) = P(A)P(B)$$

Remarque : Les notions d'événements indépendants et d'événements disjoints n'ont aucun rapport.

II.3 Indépendance entre plusieurs événements

Définition 6 : *Soient A_1, ..., A_n n événements.*
Les événements sont ***mutuellement indépendants*** *si pour tout $k \leq n$, pour tout i_1, ..., $i_k \in \{1, ..., n\}$ distincts, on a*

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_n}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \times P\left(A_{i_2}\right) \times ... \times P\left(A_{i_n}\right)$$

Remarque : Si des événements sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.

III Variables aléatoires

III.1 Définition

Définition 7 ❤ : *On considère un ensemble Ω muni d'une probabilité P.*
*On appelle **variable aléatoire** toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

III.2 Loi de probabilité, fonction de répartition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire permet de connaître les chances d'apparition des différentes valeurs de cette variable.

On se place sur l'espace probabilisé (Ω, P).

Définition 8 ❤ : *Soit X une variable aléatoire.*
*On appelle **loi de probabilité de** X, notée P_X, l'application*

$$P_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0;1] \\ x \mapsto P_X(x) = P\left(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}\right) \end{cases}$$

Remarque : On utilise la notation abrégée $P\left(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}\right) = P(X = x)$.

Définition 9 : *On appelle **fonction de répartition** de la v.a.r X, la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$F_X(x) = P\left(X \leq x\right)$$

Proposition 8 : La fonction de répartition est une fonction croissante à valeurs dans $[0;1]$ telle que

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

Preuve : **en Annexe**

Proposition 9 : Soient a et b deux réels avec $a < b$, alors

$$P\left(a < X \leq b\right) = F_X(b) - F_X(a)$$

Preuve : Découle de la définition.

III.3 Variables aléatoires réelles discrètes

Définition 10 ❤ : *Une v.a.r X à valeurs dans un ensemble $\mathcal{X}$ fini ou dénombrable est appelée v.a.r discrète.*
Dans ce cas, la loi de X est déterminée par l'ensemble des probabilités

$$P_X(x) = P(X = x),\ x \in \mathcal{X}$$

Ainsi, pour toute partie A de $\mathcal{X}$, on a alors

$$P_X(A) = P(x \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x) \text{ et } P_X(\mathcal{X}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x) = 1$$

Définition 11 ❤ *: Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est*

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On appelle

- ***espérance mathématique de** X*

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} pix_i$$

- ***Variance de** X, qui représente la dispersion des valeurs prises par X*

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + ... + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

- ***écart-type de** X*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : L'espérance est la valeur que l'on peut espérer obtenir en moyenne, lorsque l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience.

Proposition 10 ❤ : Formule de Koenig : Soit X une v.a.r.

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

Preuve : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i_1}^{n} p_i \left(x_i^2 - 2E(X)x_i + E(X)^2\right)$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2}_{=E(X^2)} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_ix_i}_{=E(X)} + E(X)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} = E\left(X^2\right) - 2E(X)^2 + E(X)^2,$$ d'où la formule.

Définition 12 ❤ :

- *Si $E(X) > 0$, le jeu est **favorable** au joueur.*
- *Si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable** au joueur.*
- *Si $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.*

III.4 Variables aléatoires réelles continues

Définition 13 ❤ *: Une variable aléatoire **continue** est une variable qui prend ses valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Définition 14 *: Soit X une v.a.r continue.*
Dans le cas où la fonction de répartition F_X est dérivable, on appelle densité de probabilité de X, la fonction f_X, définie par

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ F'_X(x) = f_X(x)$$

Proposition 11 ❤ :

> Soit f une densité de probabilité de X, v.a.r, continue.
> - f est positive sur $\mathbb{R}$
> - $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$
> - $P(X \leq a) = F_X(a) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt$
> - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Preuve : Ces propriétés découlent des propriétés de l'intégrale.

Définition 15 ❤ : *Soit X une v.a.r continue et f sa densité. On appelle, sous réserve d'existence,*

- ***Espérance de X***

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- ***Variance de X***

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Proposition 12 ❤ :

> Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance et une variance, soient a, $b \in \mathbb{R}$. Alors,
> - $E(aX + b) = aE(X) + b$
> - $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$
> - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Preuve : **en Annexe**

Remarque : Attention ! Dans le cas général,

$$V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$$

On a cependant le résultat suivant : Si les v.a.r. X et Y sont **indéépendantes**

$$V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

IV Loi binomiale

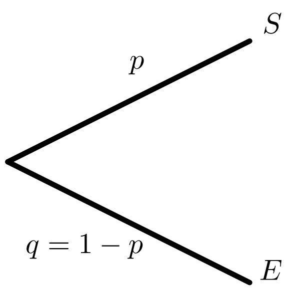
La loi binomiale modélise le nombre de succès obtenus lors de la répétition indépendante de plusieurs expériences aléatoires identiques.

IV.1 épreuve de Bernoulli

Définition 16 ❤ : *On appelle* ***épreuve de Bernoulli****, toute expérience aléatoire ne pouvant conduire qu'à deux résultats :*

- *"Succès", noté S*
- *"Echec", noté E*

Remarque : Si la probabilité du succès est p, la probabilité de l'échec est $q = 1 - p$.



Définition 17 ❤ : *Une suite d'épreuves de Bernoulli est un* ***schéma de Bernoulli*** *si*

- *le nombre d'épreuves n est fixé à l'avance.*
- *toutes les épreuves sont identiques et indépendantes.*
- *la probabilités p d'obtenir un succès est constante d'une épreuve à l'autre.*

IV.2 Loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$

Proposition 13 ❤ : Dans un schéma de Bernoulli, la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de succés en n épreuves s'appelle **loi binomiale** et est notée $\mathcal{B}(n;p)$. Les nombres n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on a : Si k est un entier tel que $0 \leq k \leq n$:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Remarque : $\binom{n}{k}$ se lit "k parmi n", il est aussi noté $\mathcal{C}_n^k$ et $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

C'est le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès lors de n répétitions.

Théorème 1 ❤ : Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

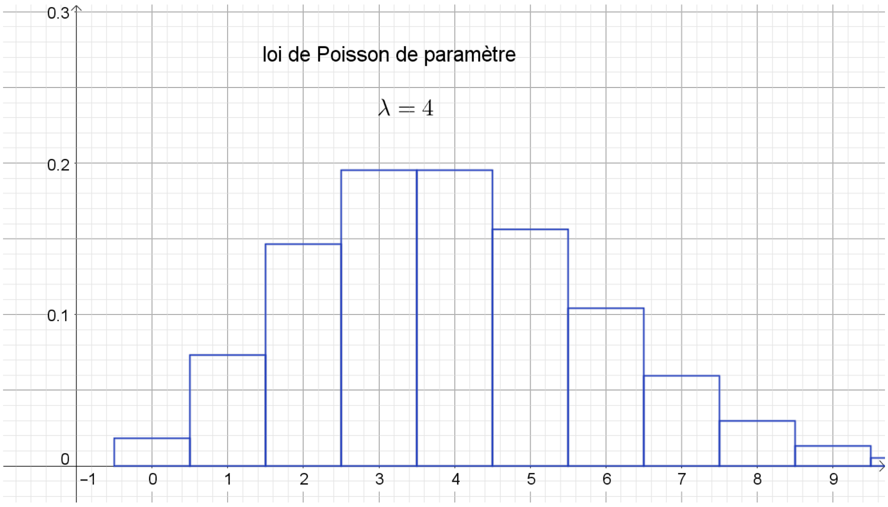
Preuve : **en Annexe**

V Loi de Poisson

La loi de Poisson intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires où le futur est indépendant du passé, comme par exemple les pannes de machines, les appels téléphoniques dans un standard, les sinistres ou les files d'attentes.

Définition 18 ❤ *: Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ, avec $\lambda > 0$, noté $\mathcal{P}(\lambda)$, lorsque pour tout entier naturel k,*

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$



Théorème 2 ❤ : Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ, on a :

$$E(X) = \lambda \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Preuve : admis (fait appel à la notion de série)

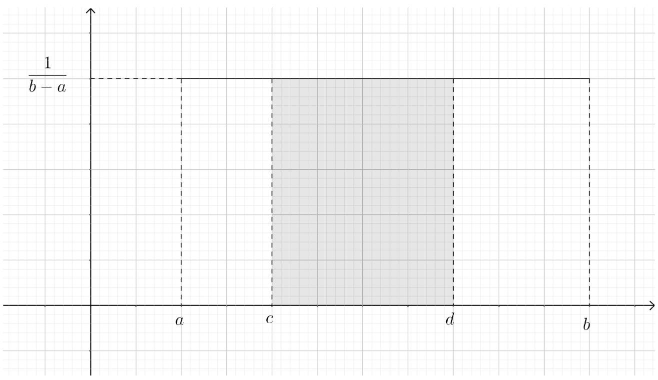
Proposition 14 ❤ : Pour n "assez grand" ($n > 30$) et p "voisin de 0 ($p \leq 0,1$) tel que $np(1-p) \leq 10$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$.

VI Loi uniforme sur $[a;b]$

La loi uniforme permet de modéliser une variable répartie uniformément sur un ensemble borné.

Définition 19 ❤ *: Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \neq b$.*
*Une v.a.r. X suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$, si pour tout réel c et d de l'intervalle $[a;b]$ avec $c \leq d$, $p(c \leq X \leq d)$ est l'aire du rectangle délimité par la droite d'équation $y = \dfrac{1}{b-a}$ et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$.*
On a :

$$p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx$$



La fonction de densité de la loi uniforme sur $[a;b]$ est la fonction f définie sur $[a;b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Remarque : Soit X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Pour tout réel $t \in [a;b]$,

$$p(X = t) = p\left(t \leq X \leq t\right) = 0$$

Donc, pour tout $c, d \in [a;b]$ avec $c \leq d$,

$$p(c \leq X \leq d) = p(c < X \leq d) = p(c \leq X < d) = p(c < X < d)$$

Proposition 15 ❤ : Soit X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[a;b]$, alors :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Preuve : **en Annexe**

VII Loi normale

La loi normale est l'une des lois de probabilités les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires.

VII.1 Loi normale centrée réduite

Définition 20 : *On appelle* ***densité de probabilité de Laplace-Gauss****, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

Remarque : Cette fonction φ correspond bien à une densité de probabilité.

- φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ (c'est la composée de fonctions continues et la fonction exp est positive sur $\mathbb{R}$).
- On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$

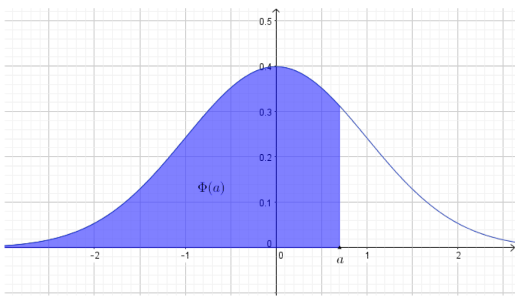
  Il n'existe pas de primitives s'exprimant avec des fonctions élémentaires pour cette fonction.
- φ est une fonction paire.
- La courbe de φ est appelée courbe de Gauss.

Définition 21 : *On dit que la variable aéatoire X suit une* ***loi normale centrée réduite****, notée $\mathcal{N}(0;1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ.*
Sa fonction de répartition Φ est donc définie par :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

Remarque :

- Le nombre $\Phi(a)$ représente l'aire du domaine délimité par la courbe de Gauss, l'axe des abscisse et la droite $x = a$.
- Avant l'arrivée des machines, on utilisait des tables donnant les valeurs de $\Phi(a)$ pour les valeurs de a positives.



Théorème 3 ❤ :

> Soit X une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite.
> Alors, pour tous réels a et b, tels que $a \leq b$, on a :
> - $p(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
> - $p(X \geq a) = 1 - \Phi(a)$
> - $p(X \leq -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$

Preuve :

- Découle de la relation de Chasles pour l'intégrale.
- Découle de la probabilité de l'événement contraire : $p(X \geq a) = 1 - p(X < a) = 1 - p(X \leq a)$.
- Découle de la parité de la fonction φ. L'aire sous la courbe de la partie gauche est égale à l'aire sous la courbe de la partie droite.

Théorème 4 ❤ : Soit X une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite. Alors,

$$E(X) = 0 \text{ et } V(X) = 1$$

Remarque : C'est pour cette raison que l'on note cette loi $\mathcal{N}\left(0; 1^2\right)$.

Preuve : **en Annexe**

Théorème 5 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Soit α un réel de l'intervalle $]\,0; 1\,[$.
Il existe un unique réel strictement positif u_α tel que

$$p\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Preuve : La fonction Φ est continue, strictement positive sur $]\,0; +\infty\,[$.
De plus, $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1$, donc Φ réalise une bijection de $]\,0; +\infty\,[$ dans $\left]\,\dfrac{1}{2}; 1\,\right[$.

Comme $0 < \alpha < 1$, $\dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$ et donc il existe un unique $x = u_\alpha \in$, tel que $\Phi\left(u_\alpha\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

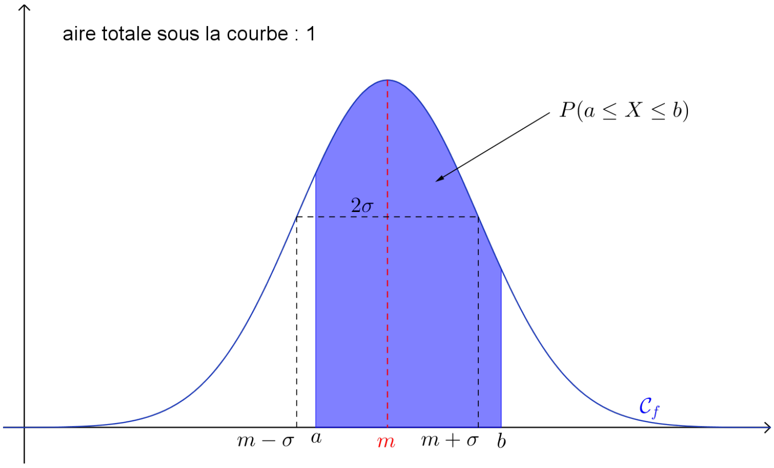
Remarque : On peut retenir les valeurs suivantes.

- $p\left(-1,96 \leq X \leq 1,96\right) \approx 0,95$
- $p\left(-2,58 \leq X \leq 2,58\right) \approx 0,99$

VII.2 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Définition 22 : *Une variable aléatoire X suit une* ***loi normale*** *de paramètres μ (espérance) et σ (écart-type), notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



Pour tous réels a et b, avec $a \leq b$, on a :

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Remarque :

- La courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$. L'aire comprise entre cette courbe et l'axe des abscisses vaut 1.
- $p(X \geq m) = p(X \leq m) = \dfrac{1}{2}$.
- Pour tout réel t, $p(X = t) = 0$, donc

$$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$$

- Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Théorème 6 ❤ : Pour n "assez grand" ($n \geq 30$) et une probabilité p vérifiant $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, alors on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, par la loi normale d'espérance $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

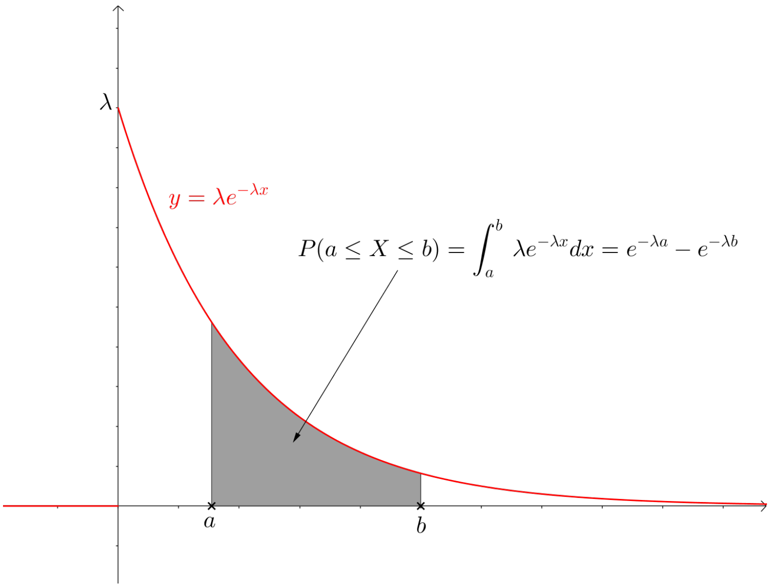
VIII Loi exponentielle

La loi exponentielle s'applique dans de nombreuses situations, notamment à la durée de fonctionnement des systèmes qui ne sont pas soumis à un phénomène d'usure.

Définition 23 ❤ *: Soit λ un réel strictement positif.*
Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

Pour tous réels a et b de $[\,0; +\infty\,[$, avec $a \leq b$, on a :



Remarque : Comme pour les autres lois à densité, pour tout réel t, $P(X = t) = 0$, donc

$$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = p(a \leq X < b) = p(a < X < b)$$

Théorème 7 ❤ :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors

- Pour tout réel t positif,
$$F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Preuve : **en Annexe**

Définition 24 ❤ *: Une variable aléatoire X, à valeurs positives, est dite **sans mémoire** si elle vérifie :*
Pour tous x et y réels positifs,

$$p_{(X \geq y)}\left(X \geq x + y\right) = p\left(X \geq x\right)$$

Remarque : Si X modélise la durée de vie d'un individu A, le fait que X soit sans mémoire exprime le fait que X ne vieillit pas. Si A a vécu y années, la probabilité pour qu'il vive encore x années est la même que la probabilité pour qu'un individu similaire à A qui vient de naître, vive lui aussi x années.

Proposition 16 ❤ : Soit X une v.a. continue.
X suit une loi exponentielle si et seulement si X est sans mémoire.

Preuve : admis.

Définition 25 : *Vocabulaire de la fiabilité.*

- *La variable aléatoire T qui a tout dispositif associe sa durée de vie est appelée* ***temps de bon fonctionnement*** *(T.B.F).*
- *La fonction F définie par $F(t) = p(T \leq t)$ est appelée* ***fonction de défaillance***
- *La fonction R définie par $R(t) = p(T > t) = 1 - F(t)$ est appelée* ***fonction de fiabilité du système****.*
- *L'espérance mathématique de T est la* ***durée de vie moyenne*** *du système, notée M.T.B.F (mean time between failures)*

Dans le cas de la loi exponentielle, on a :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ ; } R(t) = e^{-\lambda t} \text{ et } E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Annexe-A

Démonstrations

<u>*Preuve :*</u> proposition 3

- On pose $A_1 = \Omega$, et pour tout $i \geq 2$, $A_i = \emptyset$. Alors d'après la définition 3 (iii), $P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{i\geq 2} P(\emptyset)$.

  Donc $\sum_{i\geq 2} \underbrace{P(\emptyset)}_{\geq 0} = 0$ et $P(\emptyset) = 0$

- On applique (iii) avec $A_1 = A$, $A_2 = B$ et pour tout $i \geq 3$, $A_i = \emptyset$.

  On obtient $\underbrace{P\left(\bigcup_i A_i\right)}_{=P(A\cup B)} = \sum_i P(A_i) = P(A) + P(B) + \sum_{i\geq 3} \underbrace{P(A_i)}_{=0} = P(A) + P(B)$

  La généralisation à n événements disjoints se démontre par récurrence.

  * Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: Si A_1, ..., A_n sont n événements deux à deux,
  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$
  pour tout $n \geq 2$.
  * Initialisation : $\mathcal{P}_2$ est vraie d'après ce qui précède.
  * Hérédité : Soit $n \geq 2$, tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  Soient A_1, ..., A_n, A_{n+1} $n+1$ événements disjoints, alors :
  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \underbrace{=}_{\text{initialisation}} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) \underbrace{=}_{HR} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

    <u>*Remarque :*</u> On peut ici bien appliquer la formule pour $n = 2$ car comme les $n+1$ événements sont disjoints, les événements $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1} sont aussi disjoints.

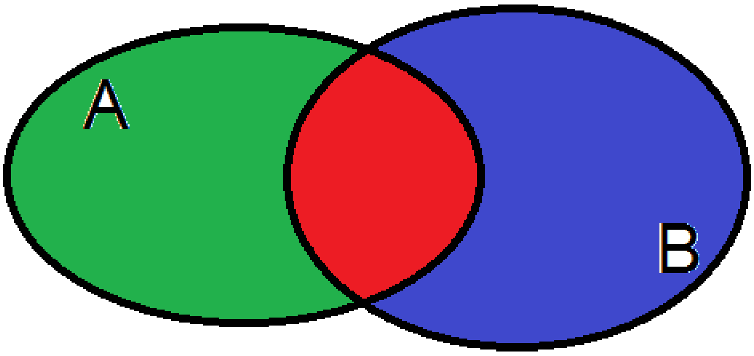
  * Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 2$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

- Les événements A et $\overline{A}$ sont disjoints et $A \cup \overline{A} = \Omega$, donc
  $$P(\Omega) = 1 = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$$
  Donc $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

- Si $A \subset B$, les événements A et $B \setminus A$ sont disjoints et $A \cup (B \setminus A) = B$, donc
  $$P(B) = \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} + P(A) \geq P(A)$$
  et
  $$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

Preuve : proposition 4
On écrit $A \cup B$ comme l'union disjointe de trois événements :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

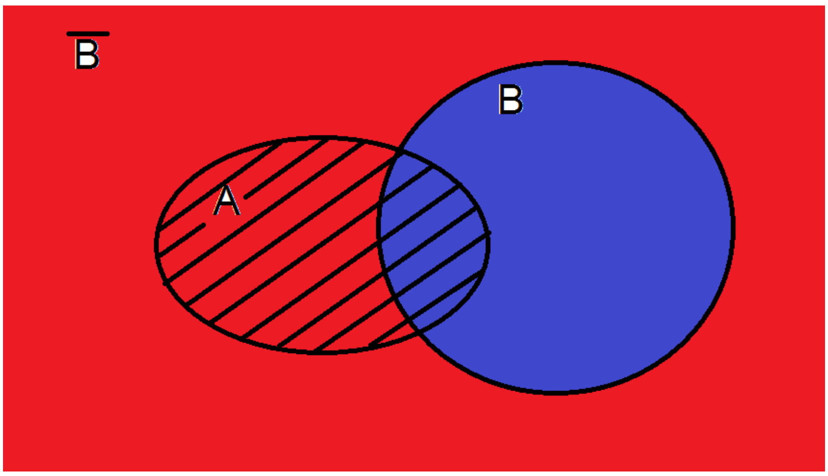


D'après la proposition 3,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Preuve : proposition 6
On écrit A comme l'union de deux événements disjoints

$$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$$



Alors par définition d'une probabilité, on a :
$P(A) = P\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$
Et d'apràs la proposition 5,
$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P\left(\overline{B}\right)$

Preuve : proposition 8
Soient $x_1 \leq x_2$ deux réels, alors $F_X(x_1) = P(X \leq x_1)$ et $F_X(x_2) = P(X \leq x_2)$.

Donc $F_X(x_2) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x_2\}) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x_1\} \cup \{\omega \in \Omega, x_1 < X(\omega) \leq x_2\})$
$= \underbrace{P(X \leq x_1)}_{F_X(x_1)} + \underbrace{P(x_1 < X \leq x_2)}_{\geq 0}$.
Donc $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ et F_X est une fonction croissante.

On admet les résultats sur les limites.

Remarque : Elle n'est pas toujours continue, mais elle est continue à droite.

Preuve : proposition 12
On se place dans le cas de v.a.r. continues.
Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance et une variance et soient a, $b \in \mathbb{R}$.

- $E(aX+b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b)f(x)dx = a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}_{=E(X)} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{=1} = aE(X)+b$

- $V(aX+b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Bigg(\underbrace{ax+b-E(aX+b)}_{=ax+b-(aE(x)+b)}\Bigg)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 (x-E(X))^2 f(x)dx$

  $= a^2 \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 f(x)dx}_{=V(X)}$

  Donc $V(aX+b) = a^2 V(X)$

  et $\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\,\sigma(X)$.

- Admis.

Preuve : théorème 1
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Alors X prend les valeurs 0, 1, ..., n.

- $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i \times P(X=i) = \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

  Or, $i\binom{n}{i} = i \times \dfrac{n!}{i!(n-i)!} = \dfrac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = n \times \dfrac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} = n\binom{n-1}{i-1}$.

  Donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1} p^i q^{n-i} \underbrace{=}_{j=i-1} n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-1-j} = np \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j}}_{=(p+q)^{n-1}} = np.$

- $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right) - (np)^2$

  De plus, $X(X-1)$ prend les valeurs 0, 0, 2, ..., $n(n-1)$.

  Donc, $E\left(X(X-1)\right) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} i(i-1)p(X=i) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

  Or, si $i \geq 2$,

$$i(i-1)\binom{n}{i} = i(i-1)\times\frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} = n(n-1)\frac{(n-2)!}{(i-2)!(n-2-(i-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{i-2}$$

$$\text{Donc } E\left(X(X-1)\right) = n(n-1)\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}p^i q^{n-i} \underbrace{=}_{j=i-2} n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j+2}q^{n-2-j}$$

$$= n(n-1)p^2\underbrace{\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j q^{n-2-j}}_{(p+q)^{n-2}} = n(n-1)p^2.$$

Ainsi $E\left(X^2-X\right) = E\left(X^2\right) - E(X) = E\left(X^2\right) - np = n(n-1)p^2$, soit $E\left(X^2\right) = n(n-1)p^2 + np$.

Donc $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$

Preuve : proposition 15

Soit X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur $[a;b]$.

- $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lim_{A\to-\infty, B\to+\infty}\int_A^B xf(x)dx.$

  Or, Si $A<a$ et $B>b$, comme $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\notin[a;b] \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x\in[a;b]\end{cases}$

$$\int_A^B xf(x)dx = \int_A^a x\times 0dx + \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx + \int_b^B x\times 0dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$

  Donc $E(X) = \dfrac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \dfrac{a+b}{2}$.

- $V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)^3}{3\times 2^2}$$

  Donc $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Preuve : théorème 4

Soit X une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite.

- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b -te^{-t^2/2}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-t^2/2}\right]_a^b = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-b^2/2} - e^{-a^2/2}\right)$

  Donc $E(X) = \displaystyle\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}dt = \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-b^2/2}-e^{-a^2/2}\right) = 0.$

- $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right)$.

$$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b t^2e^{-t^2/2}dt.$$

Pour calculer $\int_a^b t^2 e^{-t^2/2}dt$, on utilise l'intégration par partie avec $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = te^{-t^2/2} \end{cases}$, alors $\begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = -e^{-t^2/2} \end{cases}$.

$$\int_a^b t^2 e^{-t^2/2}dt = \left[-te^{-t^2/2}\right]_a^b + \int_a^b e^{-t^2}/2dt = ae^{-a^2/2} - be^{-b^2/2} + \int_a^b e^{-t^2/2}dt.$$

Or $\lim\limits_{a\to-\infty} ae^{-a^2/2} = 0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} be^{-b^2/2} = 0$ et $\lim\limits_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}$.

Par suite, $V(X) = \lim\limits_{a\to-\infty, b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b t^2 e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0 + \sqrt{2\pi}\right) = 1$.

Preuve : théorème 7
Soit X qui suit $\mathcal{E}(\lambda)$.

- $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda te^{-\lambda t}dt$.

$$\int_0^a \lambda te^{-\lambda t}dt = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-\lambda t}dt = -ae^{-\lambda a} + \int_0^a e^{-\lambda t}dt$$

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-\lambda t} \end{cases}$$

$$= -ae^{-\lambda a} + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^a = -ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

Or $\lim\limits_{a\to+\infty} -ae^{-\lambda a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a} = 0$, donc finalement $E(X) = \lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a \lambda te^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$.

$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right) - \frac{1}{\lambda^2}$ avec $E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt$.

Or, $\int_0^a \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt = \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^a - \int_0^a -2te^{-\lambda t}dt = -a^2 e^{-\lambda a} + \frac{2}{\lambda}\int_0^a \lambda te^{-\lambda t}dt$

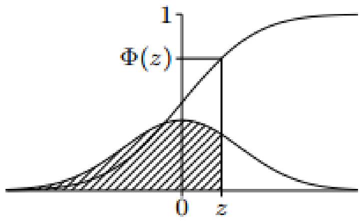
$$\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = -e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Or $\lim\limits_{a\to+\infty} -a^2 e^{-\lambda a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{2}{\lambda}\int_0^a \lambda te^{-\lambda t}dt = 2\lambda \times E(X) = \frac{2}{\lambda^2}$

Donc $E\left(X^2\right) = \frac{2}{\lambda^2}$ et $V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Annexe-B

Table de la loi normale centrée réduite



Fonction de répartition de la loi Normale. — La fonction de répartition Φ de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du/\sqrt{2\pi}$, $z \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Exemples. — $\Phi(0{,}25) \approx 0{,}5987$, $\Phi(-0{,}32) = 1 - \Phi(0{,}32) \approx 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$.