Examen de Méthodes Numériques

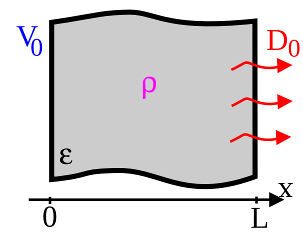
Approximation de Solutions

16 juin 2003 — Durée 1 heure 30

tous documents autorisés

Approximation d'un problème d'électrostatique 1D

On recherche une approximation du potentiel électrique $V(x)$ dans un milieu diélectrique isotrope sous l'hypothèse électrostatique. Les diverses symétries permettent de considérer le problème comme unidimensionnel. La permittivité électrique du matériau est variable et notée $\epsilon(x)$. Le domaine considère d'épaisseur L contient une distribution de charges volumiques notée $\rho(x)$. Il est soumis sur son bord $x = 0$ à un potentiel imposé nul $V_0 = 0$ et sur son bord $x = L$ à un déplacement électrique non nul connu D_0 (voir figure).



Problème électrostatique 1D

Les équations de Maxwell pour ce problème 1D se ramène à :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon(x)\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) + \rho(x) = 0, \qquad \forall x \in [0, L] \tag{1}$$

$$V(0) = 0, \qquad \text{en } x = 0 \tag{2}$$

$$\epsilon(L)\frac{\partial V(x)}{\partial x}_{|L} + D_0 = 0, \qquad \text{en } x = L \tag{3}$$

1. Etablir la formulation intégrale forte de ce problème. On note $P(x)$ la fonction de projection dans le domaine et $\overline{P}(x)$ celle utilisée pour les conditions aux limites.

2. En déduire la formulation intégrale faible. Proposer des relations entre $\overline{P}(x)$ et $P(x)$ qui permette de simplifier au maximum cette formulation. Quel est l'intérêt de cette formulation faible.

3. On cherche une approximation du potentiel solution sous la forme :

$$V(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i \phi_i(x) \tag{4}$$

   On applique la méthode de Galerkin à la formulation faible établie dans la question précédente. On considère que la base d'approximation choisie est telle que la condition en $x = 0$ est automatiquement vérifiée, c'est à dire que les fonctions de base sont telles que $\phi_i(0) = 0$. Donner la forme générale des termes de la matrice de raideur et du vecteur des forces généralisées.

4. On souhaite obtenir une approximation polynomiale quadratique de la solution dans le cas particulier où $\epsilon(x) = cste = \epsilon$ et $\rho(x) = ax$ (où a est donné). Pour cela, on choisi :

$$\phi_1(x) = \frac{x}{L} \qquad , \qquad \phi_2(x) = (\frac{x}{L})^2$$

   Construire la solution approchée. Est-ce la solution exacte?

5. On souhaite construire les caractéristiques d'un élément fini linéaire pour ce problème. Proposer des fonctions de base linéaires pour cet élément. Donner l'expression de la matrice de rigidité élémentaire pour le cas particulier de la question précédente.

Eléments de correction

1. La formulation intégrale forte du problème est : trouver le potentiel $V(x)$ tel que

$$\int_0^L [\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon(x)\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) + \rho(x)]P(x)dx + V(0)\overline{P}(0) + (\epsilon(L)\frac{\partial V}{\partial x}|_L + D_0)\overline{P}(L) = 0.$$

où $\overline{P}(x)$ et $\overline{P}(x)$ sont les fonctions de projection.

2. Pour obtenir la formulation faible, on réalise une intégration par partie du premier terme. La formulation du problème devient : trouver le potentiel $V(x)$ tel que

$$-\int_0^L \epsilon(x)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + \left[\epsilon(x)\frac{\partial V}{\partial x}P(x)\right]_0^L + \int_0^L \rho(x)P(x)dx + V(0)\overline{P}(0) + (\epsilon(L)\frac{\partial V}{\partial x}|_L + D_0)\overline{P}(L) = 0, \qquad \forall P(x), \overline{P}(x)$$

soit

$$-\int_0^L \epsilon(x)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + \epsilon(L)\frac{\partial V}{\partial x}|_L P(L) - \epsilon(0)\frac{\partial V}{\partial x}|_0 P(0) + \int_0^L \rho(x)P(x)dx + V(0)\overline{P}(0) + (\epsilon(x)\frac{\partial V}{\partial x}|_L + D_0)\overline{P}(L) = 0, \qquad \forall P(x), \overline{P}(x)$$

En faisant le choix particulier suivant pour les fonctions de projection :

$$\overline{P}(L) = -P(L) \quad \text{et} \quad P(0) = \overline{P}(0)$$

la formulation se simplifie en : trouver le potentiel $V(x)$ tel que

$$\int_0^L \epsilon(x)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx - \int_0^L \rho(x)P(x)dx + \left(\epsilon(0)\frac{\partial V}{\partial x}|_0 - V(0)\right)P(0) + D_0 P(L) = 0$$

3. Pour appliquer la méthode de Galerkin, on choisit une base de fonctions $\phi_i(x)$, telle que $\phi_i(0) = 0$. Les fonctions de base sont choisies comme fonctions de projection. La formulation devient donc : trouver le potentiel approximé $V(x)$ tel que

$$\int_0^L \epsilon(x)\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx - \int_0^L \rho(x)\phi_j(x)dx + D_0\phi_j(L) = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

En cherchant des approximations dans la base, le problème devient : trouver les composantes q_i de l'approximation $V(x) = \sum_{i=0}^N q_i\phi_i(x)$ telles que :

$$\int_0^L \epsilon(x)q_i\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx - \int_0^L \rho(x)\phi_j(x)dx + D_0\phi_j(L) = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

Il s'agit bien d'un système linéaire sur les q_i :

$$[K]\{q\} = \{f\}, \qquad \text{avec} \quad q = \left\{ \begin{array}{c} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{array} \right\}$$

où les termes de la matrice de rigidité $[K]$ s'espriment sous la forme :

$$k_{ij} = \int_0^L \epsilon(x)\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx$$

et les termes du vecteur forces généralisées $\{f\}$ sous la forme :

$$f_i = \int_0^L \rho(x)\phi_i(x)dx - D_0\phi_i(L) = 0$$

4. Dans le cas paticulier $\epsilon(x) = cste = \epsilon$ et $\rho(x) = ax$, et pour les fonctions de base : $\phi_1(x) = \frac{x}{L}$ et $\phi_2(x) = (\frac{x}{L})^2$, on obtient :

$$k_{11} = \int_0^L \frac{\epsilon}{L^2} dx = \frac{\epsilon}{L} \qquad f_1 = \int_0^L a\frac{x^2}{L} dx - D_0.1 = \frac{aL^2}{3} - D_0$$

$$k_{12} = \int_0^L \frac{\epsilon}{L^3} 2X dx = \frac{\epsilon}{L} \qquad f_2 = \int_0^L a\frac{x^3}{L^2} dx - D_0.1 = \frac{aL^2}{4} - D_0$$

$$k_{11} = \int_0^L \frac{\epsilon}{L^4} 4x^2 dx = \frac{4}{3}\frac{\epsilon}{L}$$

qui conduit au système :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 & = \dfrac{aL^3}{3\epsilon} - \dfrac{D_0 L}{\epsilon} \\ q_1 + \dfrac{4}{3} q_2 & = \dfrac{aL^3}{4\epsilon} - \dfrac{D_0 L}{\epsilon} \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_1 & = \dfrac{7}{12}\dfrac{aL^3}{\epsilon} - \dfrac{D_0 L}{\epsilon} \\ q_2 & = -\dfrac{aL^3}{4\epsilon} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{V(x) = (\frac{7}{12}\frac{aL^2}{\epsilon} - \frac{D_0}{\epsilon})x - \frac{aL}{4\epsilon}x^2}$$

Il ne s'agit bien évidemment pas de la solution exacte. On peut voir en particulier que :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon \frac{\partial V}{\partial x}) = -\frac{aL}{2} \neq -ax$$

5. Dans la cas d'une base de fonctions de type éléments finis linéaires, les fonctions de base utilisées sur un domaine 1D de longeur L sont :

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(x) = \frac{x}{L}$$

qui donnent pour les termes de la matrice de rigidité :

$$k_{11} = \int_0^L \frac{\epsilon}{L^2} dx = \frac{\epsilon}{L}$$

$$k_{12} = \int_0^L -\frac{\epsilon}{L^2} dx = -\frac{\epsilon}{L}$$

$$k_{22} = \int_0^L \frac{\epsilon}{L^2} dx = \frac{\epsilon}{L}$$

soit pour la matrice :

$$\boxed{[K] = \frac{\epsilon}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Examen de Méthodes Numériques

Approximation de Solutions

2 septembre 2003 — Durée 1 heure

tous documents autorisés

Approximation de l'équation de Laplace 1D

On recherche une approximation de la fonction scalaire $u(x)$ obéissant à l'équation de Laplace sur un domaine $[0, h]$ et à diverses conditions aux limites.

Les équations de ce problème 1D sont :

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = f(x), \qquad \forall x \in [0, h] \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \qquad \text{en } x = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x}_{|h} = a, \qquad \text{en } x = h \tag{3}$$

où $f(x)$ est une fonction scalaire connue et a un scalaire connu.

1. Etablir la formulation intégrale forte de ce problème. On note $P(x)$ la fonction de projection dans le domaine et $\overline{P}(x)$ celle utilisée pour les conditions aux limites.

2. En déduire la formulation intégrale faible. Proposer des relations entre $\overline{P}(x)$ et $P(x)$ qui permettent de simplifier au maximum cette formulation. Quel est l'intérêt de cette formulation faible.

3. On cherche une approximation de la solution sous la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i \phi_i(x) \tag{4}$$

   On applique la méthode de Galerkin à la formulation faible établie dans la question précédente. On considère que la base d'approximation choisie est telle que la condition en $x = 0$ est automatiquement vérifiée, c'est à dire que les fonctions de base sont telles que $\phi_i(0) = 0$. Donner la forme générale des termes de la matrice de raideur et du vecteur des forces généralisées.

4. On souhaite obtenir une approximation polynomiale quadratique de la solution dans le cas particulier où $f(x) = bx$ (où b est un scalaire donné). Pour cela, on choisit :

$$\phi_1(x) = \frac{x}{h} \qquad , \qquad \phi_2(x) = (\frac{x}{h})^2$$

   Construire la solution approchée. Est-ce la solution exacte?

Eléments de correction

1. La formulation intégrale forte du problème est : trouver la fonction $u(x)$ telle que

$$\int_0^h [\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - f(x)]P(x)dx + (u(0) - 0)\overline{P}(0) + (\frac{\partial u}{\partial x}|_h - a)\overline{P}(h) = 0.$$

   où $\overline{P}(x)$ et $\overline{P}(x)$ sont les fonctions de projection.

2. Pour obtenir la formulation faible, on réalise une intégration par partie du premier terme. La formulation du problème devient : trouver la fonction $u(x)$ telle que

$$-\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + \left[\frac{\partial u}{\partial x}P(x)\right]_0^h - \int_0^h f(x)P(x)dx + u(0)\overline{P}(0) + (\frac{\partial u}{\partial x}|_h - a)\overline{P}(h) = 0, \qquad \forall P(x), \overline{P}(x)$$

   soit

$$-\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}|_h P(h) - \frac{\partial u}{\partial x}|_0 P(0) - \int_0^h f(x)P(x)dx + u(0)\overline{P}(0) + (\frac{\partial u}{\partial x}|_h - a)\overline{P}(h) = 0, \qquad \forall P(x), \overline{P}(x)$$

   En faisant le choix particulier suivant pour les fonctions de projection :

$$\overline{P}(h) = -P(h) \quad \text{et} \quad P(0) = \overline{P}(0)$$

   la formulation se simplifie en : trouver la fonction $u(x)$ telle que

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + \int_0^h f(x)P(x)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}|_0 - u(0)\right)P(0) - aP(h) = 0$$

3. Pour appliquer la méthode de Galerkin, on choisit une base de fonctions $\phi_i(x)$, telle que $\phi_i(0) = 0$. Les fonctions de base sont choisies comme fonctions de projection. La formulation devient donc : trouver la fonction approximée $u(x)$ telle que

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx + \int_0^h f(x)\phi_j(x)dx - a\phi_j(h) = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

   En cherchant des approximations dans la base, le problème devient : trouver les composantes q_i de l'approximation $u(x) = \sum_{i=0}^N q_i\phi_i(x)$ telles que :

$$\int_0^h q_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx + \int_0^h f(x)\phi_j(x)dx - a\phi_j(h) = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

   Il s'agit bien d'un système linéaire sur les q_i :

$$[K]\{q\} = \{f\}, \qquad \text{avec} \quad q = \begin{Bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}$$

   où les termes de la matrice de rigidité $[K]$ s'expriment sous la forme :

$$k_{ij} = \int_0^h \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx$$

   et les termes du vecteur forces généralisées $\{f\}$ sous la forme :

$$f_i = -\int_0^h f(x)\phi_i(x)dx + a\phi_i(h) = 0$$

4. Dans le cas particulier $f(x) = bx$ et pour les fonctions de base : $\phi_1(x) = \frac{x}{h}$ et $\phi_2(x) = (\frac{x}{h})^2$, on obtient :

$$k_{11} = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx = \frac{1}{h} \qquad f_1 = -\int_0^h b\frac{x^2}{h} dx + a.1 = -\frac{bh^2}{3} + a$$

$$k_{12} = \int_0^h \frac{1}{h^3} 2x dx = \frac{1}{h} \qquad f_2 = -\int_0^h b\frac{x^3}{h^2} dx + a.1 = -\frac{bh^2}{4} + a$$

$$k_{22} = \int_0^h \frac{1}{h^4} 4x^2 dx = \frac{4}{3h}$$

qui conduit au système :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 & = ah - \dfrac{bh^3}{3} \\ \\ q_1 + \dfrac{4}{3} q_2 & = ah - \dfrac{bh^3}{4} \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_1 & = ah - \dfrac{7}{12} bh^3 \\ \\ q_2 & = \dfrac{bh^3}{4} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{u(x) = (a - \frac{7}{12} bh^2)x + \frac{bh}{4} x^2}$$

Il ne s'agit bien évidemment pas de la solution exacte. On peut voir en particulier que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{bh}{2} \neq bx$$

5. Dans la cas d'une base de fonctions de type éléments finis linéaires, les fonctions de base utilisées sur un domaine 1D de longueur h sont :

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{h} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(x) = \frac{x}{h}$$

qui donnent pour les termes de la matrice de rigidité :

$$k_{11} = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx = \frac{1}{h}$$

$$k_{12} = \int_0^h -\frac{1}{h^2} dx = -\frac{1}{h}$$

$$k_{22} = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx = \frac{1}{h}$$

soit pour la matrice :

$$\boxed{[K] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Examen de Méthodes Numériques

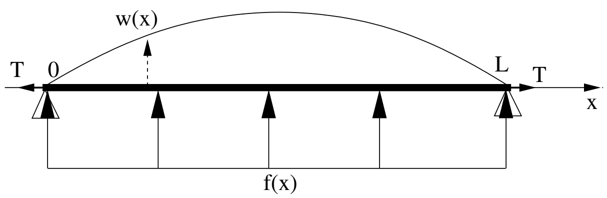
Approximation de Solutions

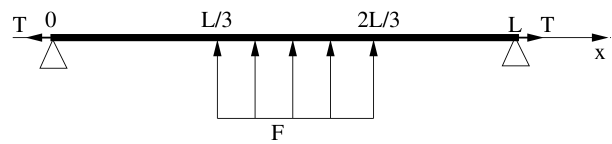
14 juin 2004 — Durée 1 heure 30

tous documents autorisés

Approximation d'un problème de fil tendu

On cherche une approximation de la déformée $w(x)$ d'un fil inextensible tendu (par une tension T constante) et soumis à une densité linéique de force $f(x)$. Ce fil de longueur L est bloqué à ses deux extrémités (figure de gauche).





Les équations de ce problème 1D sont :

$$T\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + f(x) = 0, \qquad \forall x \in [0, L] \tag{1}$$

$$w(0) = 0, \qquad \text{en } x = 0 \tag{2}$$

$$w(x) = 0, \qquad \text{en } x = L \tag{3}$$

1. Etablir la formulation intégrale forte de ce problème. On note $P(x)$ la fonction de projection dans le domaine et $\overline{P}(x)$ celle utilisée pour les conditions aux limites.

2. En déduire la formulation intégrale faible. Proposer des conditions sur $\overline{P}(x)$ et $P(x)$ qui permettent de simplifier au maximum cette formulation. Quel est l'intérêt de cette formulation faible?

3. On cherche une approximation de la déformée solution sous la forme :

$$w(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i \phi_i(x) \tag{4}$$

   On applique la méthode de Galerkin à la formulation faible établie dans la question précédente. On considère que la base d'approximation choisie est telle que les conditions en $x = 0$ et $x = L$ sont automatiquement vérifiées, c'est-à-dire que les fonctions de base sont telles que $\phi_i(0) = 0$ et $\phi_i(L) = 0$. Donner la forme générale des termes de la matrice de raideur et du vecteur des forces généralisées.

4. On souhaite obtenir une approximation polynomiale quadratique ($N = 2$) de la solution dans le cas particulier où $f(x) = F$ pour $L/3 < x < 2L/3$ et $f(x) = 0$ sinon (figure de droite). Expliquer pourquoi cela revient à ne faire l'approximation qu'avec la seule fonction :

$$\phi_2(x) = x(x - L)$$

   Construire la solution approchée. Est-ce la solution exacte?

5. On souhaite construire les caractéristiques d'un élément fini linéaire pour ce problème. Proposer des fonctions de base linéaires pour cet élément. Donner l'expression de la matrice de rigidité élémentaire. Proposer un exemple de maillage pour le problème particulier de la question 4.

Eléments de correction

1. La formulation intégrale forte du problème est : trouver le déplacement $w(x)$ tel que

$$\int_0^L [T\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + f(x)]P(x)dx + w(0)\overline{P}(0) + w(L)\overline{P}(L) = 0$$

quelles que soient les fonctions de projection $\overline{P}(x)$ et $\overline{P}(x)$.

2. Pour obtenir la formulation faible, on réalise une intégration par partie du premier terme. La formulation du problème devient : trouver le potentiel $V(x)$ tel que

$$-\int_0^L T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + \left[T\frac{\partial w}{\partial x}P(x)\right]_0^L + \int_0^L f(x)P(x)dx + w(0)\overline{P}(0) + w(L)\overline{P}(L) = 0, \qquad \forall P(x), \overline{P}(x)$$

soit

$$-\int_0^L T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx + T\frac{\partial w}{\partial x}|_L P(L) - T\frac{\partial w}{\partial x}|_0 P(0) + \int_0^L f(x)P(x)dx + V(0)\overline{P}(0) + w(L)\overline{P}(L) = 0, \qquad \forall P(x), \overline{P}(x)$$

En faisant le choix particulier suivant pour les fonctions de projection :

$$\overline{P}(L) = P(L) = P(0) = \overline{P}(0) = 0$$

la formulation se simplifie en : trouver le déplacement $w(x)$ tel que

$$\int_0^L T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x}dx - \int_0^L f(x)P(x)dx = 0, \qquad \forall P(x)$$

3. Pour appliquer la méthode de Galerkin, on choisit une base de fonctions $\phi_i(x)$, telle que $\phi_i(0) = 0$. Les fonctions de base sont choisies comme fonctions de projection. La formulation devient donc : trouver le déplacement approximé $w(x)$ tel que

$$\int_0^L T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx - \int_0^L f(x)\phi_j(x)dx = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

En cherchant des approximations dans la base, le problème devient : trouver les composantes q_i de l'approximation $w(x) = \sum_{i=0}^N q_i\phi_i(x)$ telles que :

$$\int_0^L Tq_i\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx - \int_0^L f(x)\phi_j(x)dx = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

Il s'agit bien d'un système linéaire sur les q_i :

$$[K]\{q\} = \{f\}, \qquad \text{avec} \quad q = \left\{ \begin{array}{c} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{array} \right\}$$

où les termes de la matrice de rigidité $[K]$ s'espriment sous la forme :

$$k_{ij} = \int_0^L T\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}dx$$

et les termes du vecteur forces généralisées $\{f\}$ sous la forme :

$$f_i = \int_0^L f(x)\phi_i(x)dx$$

4. Une approximation polynomiale de degré deux s'écrit :

$$w(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2$$

La satisfaction des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ impose :

$$q_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad q_1 = -Lq_2$$

L'approximation est donc :

$$w(x) = q_2 x(L - x)$$

Dans le cas de chargement proprosée on obtient :

$$k_{22} = \int_0^L T(2x-L)^2 dx = \frac{TL^3}{3} \qquad\qquad f_2 = \int_{L/3}^{2L/3} Fx(x-L)dx = -\frac{13TL^2}{162}$$

qui conduit à l'équation :

$$\frac{TL^3}{3} q_2 = -\frac{13TL^3}{162}$$

dont la solution est :

$$q_2 = -\frac{13F}{54T} \quad \text{soit} \quad \boxed{w(x) = \frac{13F}{54T} x(L-x)}$$

Il ne s'agit bien évidemment pas de la solution exacte. On peut voir en particulier que :

$$T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{13F}{27T}$$

ne vérifie pas l'équation (1).

5. Dans la cas d'une base de fonctions de type éléments finis linéaires, les fonctions de base utilisées sur un domaine 1D de longeur h sont :

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{h} \qquad \text{et} \qquad \phi_2(x) = \frac{x}{h}$$

qui donnent pour les termes de la matrice de rigidité :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \int_0^h \frac{h}{L^2} dx = \frac{T}{h} \\ k_{12} &= \int_0^h -\frac{h}{L^2} dx = -\frac{T}{h} \\ k_{22} &= \int_0^h \frac{h}{L^2} dx = \frac{T}{h} \end{aligned}$$

soit pour la matrice :

$$\boxed{[K] = \frac{T}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Examen de Méthodes Numériques

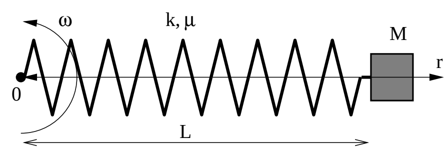
Approximation de Solutions

2 septembre 2003

tous documents autorisés

Déplacement des spires d'un ressort pesant

On considère un ressort pesant (de masse linéïque μ et de longueur L et de raideur par unité de longueur k) retient une masse M pouvant coulisser sans frottement sur une tige. On cherche à approximer le déplacement $u(r)$ de chacun des points du ressort lorsque l'ensemble est entraîné en rotation à une vitesse angulaire fixe ω.



Les équations de ce problème 1D sont :

$$k\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \mu\omega^2 r = 0, \qquad \forall r \in [0, L] \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \qquad \text{en } r = 0 \tag{2}$$

$$k\frac{\partial u(r)}{\partial r}_{|L} = M\omega^2 L, \qquad \text{en } r = L \tag{3}$$

où k, L, μ, M et ω sont des scalaires fixés.

1. Etablir la formulation intégrale forte de ce problème. On note $P(r)$ la fonction de projection dans le domaine et $\overline{P}(r)$ celle utilisée pour les conditions aux limites.

2. En déduire la formulation intégrale faible. Quel est l'intérêt de cette formulation faible.

3. Pour chercher une approximation de ce problème, on souhaite utiliser la méthode de Ritz. On l'applique au principe de minimum de l'énergie potentielle du ressort. C'est-à-àdire que le prolème est formulé de la manière suivante : Le champ de déplacement solution est tel que $u(r = 0) = 0$, et miminise l'énergie potentielle :

$$E_p(u) = \frac{1}{2}\int_0^L k\frac{\partial u(r)}{\partial r}\frac{\partial u(r)}{\partial r}dr - \int_0^L \mu\omega^2 r u(r)dr - M\omega^2 L u(L)$$

   Et on cherche une approximation de la solution sous la forme :

$$u(r) = \sum_{i=0}^{N} q_i\phi_i(r) \tag{4}$$

   On considère que la base d'approximation choisie est telle que la condition en $r = 0$ est automatiquement vérifiée, c'est à dire que les fonctions de base sont telles que $\phi_i(0) = 0$. Donner la forme générale des termes de la matrice de raideur et du vecteur des forces généralisées. *On rappelle que le système linéaire est obtenu par minimisation de la fonctionnelle Ep par rapport à chacune des variables q_i.*

4. On souhaite obtenir une approximation polynomiale quadratique de la solution. Pour cela, on choisit $N = 2$ et :

$$\phi_1(r) = \frac{r}{L} \quad , \qquad \phi_2(r) = (\frac{r}{L})^2$$

   Construire la solution approchée. Est-ce la solution exacte?

Eléments de correction

1. La formulation intégrale forte du problème est : trouver la fonction $u(r)$ telle que

$$\int_0^L [k\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \mu\omega^2 r]P(r)dr + (u(0) - 0)\overline{P}(0) + (k\frac{\partial u}{\partial r}|_L - M\omega^2 L)\overline{P}(L) = 0.$$

quelques soient les fonctions de projection $\overline{P}(r)$ et $\overline{P}(r)$.

2. Pour obtenir la formulation faible, on réalise une intégration par partie du premier terme. La formulation du problème devient : trouver la fonction $u(r)$ telle que

$$-\int_0^L k\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial r}dr + \left[k\frac{\partial u}{\partial r}P(r)\right]_0^L + \int_0^L \mu\omega^2 rP(r)dr + u(0)\overline{P}(0) + (k\frac{\partial u}{\partial r}|_L - M\omega^2 L)\overline{P}(L) = 0, \qquad \forall P(r), \overline{P}(r)$$

soit

$$-\int_0^L k\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial r}dx + k\frac{\partial u}{\partial r}|_L P(L) - k\frac{\partial u}{\partial r}|_0 P(0) + \int_0^h \mu\omega^2 rP(r)dr + u(0)\overline{P}(0) + (k\frac{\partial u}{\partial r}|_L - M\omega^2 L)\overline{P}(L) = 0, \qquad \forall P(r), \overline{P}(r)$$

3. Pour appliquer la méthode de Ritz, on choisit une base de fonctions $\phi_i(r)$, telle que $\phi_i(0) = 0$. Les fonctions de base sont choisies comme fonctions de projection. La formulation devient donc : trouver la fonction approximée $u(q_i)$ qui minimise

$$E_p(q_i) = \frac{1}{2}\int_0^L kq_i\frac{\partial \phi_i(r)}{\partial r}q_j\frac{\partial \phi_j(r)}{\partial r}dr - \int_0^L \mu\omega^2 rq_i\phi_i dr - M\omega^2 Lq_i\phi_i(L)$$

En exprimant le minimum de la fonctionnelle E_p par rapport à chacune des variables q_i, ont obtient :

$$\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = (\int_0^L k\frac{\partial \phi_i(r)}{\partial r}\frac{\partial \phi_j(r)}{\partial r}dr)q_j - \int_0^L \mu\omega^2 r\phi_i dr - M\omega^2 L\phi_i(L) = 0, \forall j \in [0, \ldots, N]$$

Il s'agit bien d'un système linéaire sur les q_i :

$$[K]\{q\} = \{f\}, \qquad \text{avec} \quad q = \left\{\begin{array}{c} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{array}\right\}$$

où les termes de la matrice de rigidité $[K]$ s'expriment sous la forme :

$$k_{ij} = \int_0^L k\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\frac{\partial \phi_j}{\partial r}dr$$

et les termes du vecteur forces généralisées $\{f\}$ sous la forme :

$$f_i = \int_0^L \mu\omega^2 r\phi_i(r)dr + M\omega^2 L\phi_i(L)$$

4. Dans le cas particulier $N = 2$ et pour les fonctions de base : $\phi_1(r) = \frac{r}{L}$ et $\phi_2(r) = (\frac{r}{L})^2$, on obtient :

$$k_{11} = \int_0^L \frac{k}{L^2} dr = \frac{k}{L} \qquad f_1 = -\int_0^L \mu\omega^2 \frac{r^2}{L} dx + M\omega^2 L.1 = L\omega^2(\frac{\mu L}{3} + M)$$

$$k_{12} = \int_0^L \frac{k}{L^3} 2r dr = \frac{k}{L} \qquad f_2 = -\int_0^L \mu\omega^2 \frac{r^3}{L^2} dr + M\omega^2 L.1 = L\omega^2(\frac{\mu L}{4} + M)$$

$$k_{22} = \int_0^L \frac{k}{L^4} 4r^2 dr = \frac{4k}{3L}$$

qui conduit au système :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 & = \dfrac{L^2\omega^2}{k}(\dfrac{\mu L}{3} + M) \\ q_1 + \dfrac{4}{3} q_2 & = \dfrac{L^2\omega^2}{k}(\dfrac{\mu L}{4} + M) \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} q_1 & = \dfrac{L^2\omega^2}{k}(M + \dfrac{7\mu L}{12}) \\ q_2 & = -\dfrac{\mu\omega^2 L^3}{4k} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{u(r) = \frac{L^2\omega^2}{k}(M + \frac{7\mu L}{12k})r - \frac{\mu\omega^2 L^3}{4k} r^2}$$

Il ne s'agit bien évidemment pas de la solution exacte. On peut voir en particulier que :

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{\mu\omega^2 L^3}{2} \neq -\mu\omega^2 r$$