Vibration de poutres en flexion

S. Courtois

d'après L. Champaney

Sommaire

I Vibration de flexion d'une poutre

I.1 Vibrations libres

Les variables considérées sont :
- le déplacement radial : $v(x,t)$
- la rotation de la section : $\theta(x,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ (hypothèse de Bernoulli)
- la courbure : $\chi_f = \dfrac{\partial \theta}{\partial x}$
- le moment fléchissant $M_f = EI\dfrac{\partial}{\partial x}(\chi_f)$
- l'effort tranchant T_t

Les équations d'équilibre local sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_t}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial M_f}{\partial x} + T_t = 0 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Ici, on a négligé les termes d'inertie dus à la rotation des sections devant les termes d'inertie du à leur translation. En éléminant l'effort tranchant, on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

qui devient :

$$\boxed{EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \forall t, \forall x} \tag{3}$$

Les conditions aux limites possibles sont :

- déplacement imposé nul aux extrémités :

$$v(0,t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad v(L,t) = 0$$

- rotation imposée nulle aux extrémités :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0$$

- moment imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L,t) = 0$$

- effort imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0,t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L,t) = 0$$

I.2 Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables :

$$v(x,t) = V(x)T(t) \tag{4}$$

L'équilibre fait apparaître deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie positive pour assurer la stabilité de la solution en temps :

$$\frac{EI}{\rho S}\frac{1}{V}\frac{d^4 V}{dx^4} = -\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2} = +\omega^2 \tag{5}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 V}{dx^4} - \beta^4 V = 0 \\ \dfrac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(x) = A\text{ch}\beta x + B\text{sh}\beta x + C\cos\beta x + D\sin\beta x \\ T(t) = E\sin\omega t + F\cos\omega t \end{cases} \tag{6}$$

avec

$$\beta^4 = \frac{\rho S\omega^2}{EI}$$

Les constantes A, B, C, D, E et F sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites. Comme en traction, on peut facilement faire apparaître l'équation caractéristique permettant de trouver les pulsations propres du système :

$$\begin{cases} CL_1 \\ CL_2 \\ CL_3 \\ CL_4 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \dots & & \\ a_{31} & \dots & & \\ a_{41} & \dots & & \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{det(\underline{\underline{A}}) = 0}$$

I.3 Exemples

I.3.1 Poutre en appuis simples

Les conditions aux limites :

$$v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad \text{et} \quad v''(0,t) = v''(L,t) = 0$$

donnent :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \beta^2(A - C) = 0 \\ A\text{ch}\beta L + B\text{sh}\beta L + C\cos\beta L + D\sin\beta L = 0 \\ \beta^2\big(A\text{ch}\beta L + B\text{sh}\beta L - C\cos\beta L - D\sin\beta L\big) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

qui a pour solution non triviale :

$$\begin{cases} A = C = 0 \\ B\text{sh}\beta L = 0 \Rightarrow B = 0 \\ D\sin\beta L = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Les modes possibles de vibration sont donc caractérisés par :

$$\beta_i = \frac{i\pi}{L} \tag{9}$$

Les «pulsations propres» de vibration sont donc :

$$\boxed{\omega_i = i^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}}} \tag{10}$$

et les «modes propres» associés :

$$\boxed{V_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{L}} \tag{11}$$

La solution générale du problème de vibration est donc :

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sin\frac{i\pi x}{L}\left(E_i\cos\omega_i t + F_i\sin\omega_i t\right) \tag{12}$$

où les constantes E_i et F_i dépendent des conditions initiales.

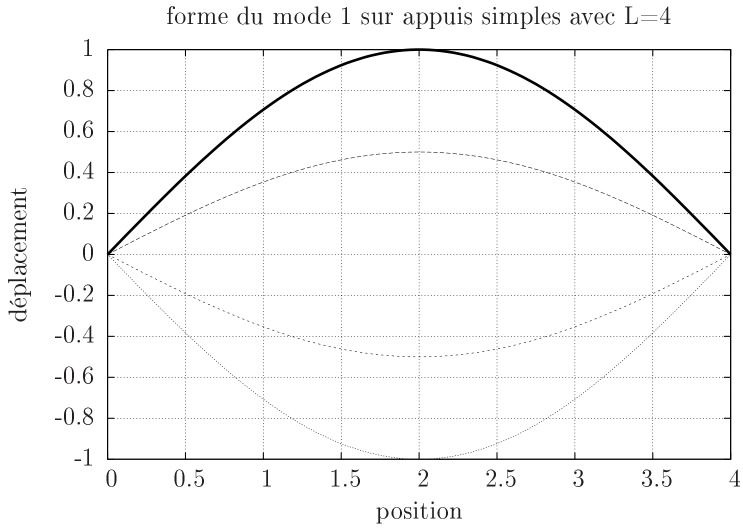
I.3.2 Poutre encastrée-libre

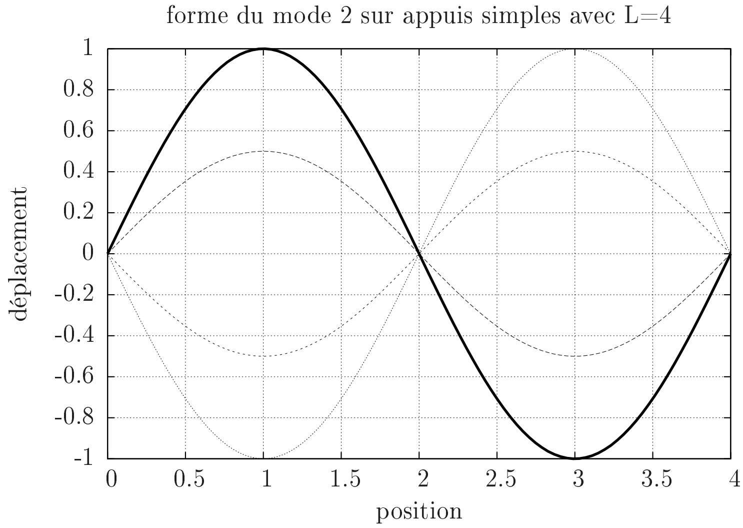
Les conditions aux limites :

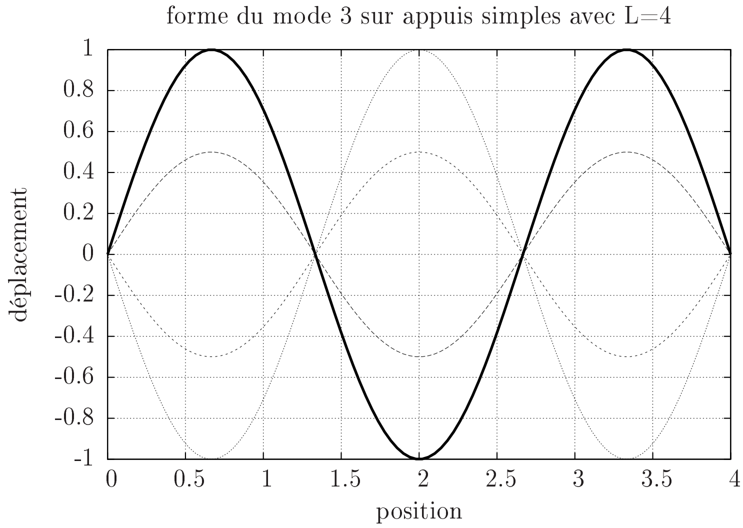
$$v(0,t) = v'(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad v''(L,t) = v'''(L,t) = 0$$

donnent :

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ \beta^2\big(A\text{ch}\beta L + B\text{sh}\beta L - C\cos\beta L - D\sin\beta L\big) = 0 \\ \beta^3\big(A\text{sh}\beta L + B\text{ch}\beta L + C\sin\beta L - D\cos\beta L\big) = 0 \end{cases} \tag{13}$$


forme du mode 1 sur appuis simples avec L=4
déplacement
position
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


forme du mode 2 sur appuis simples avec L=4
déplacement
position
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

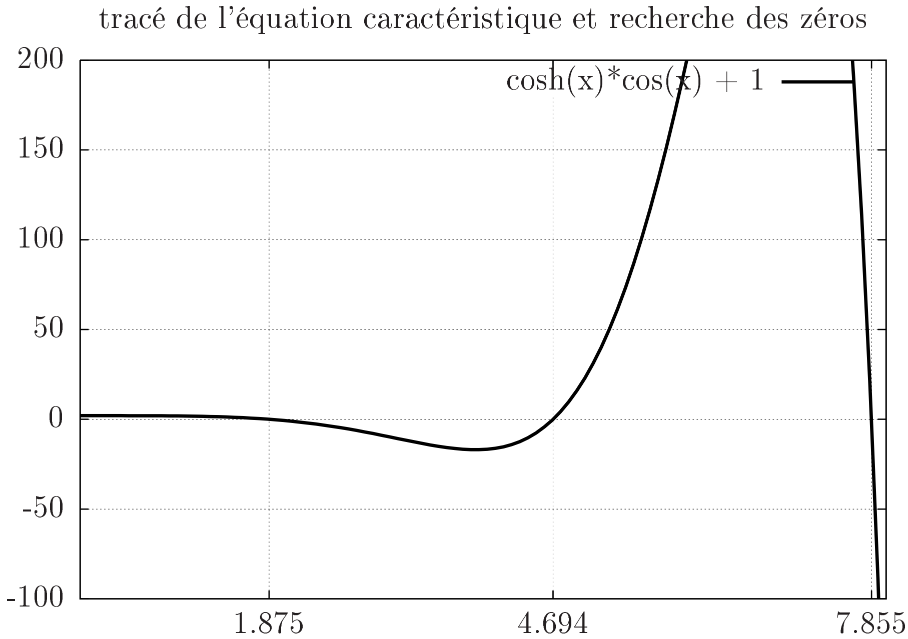

forme du mode 3 sur appuis simples avec L=4
déplacement
position
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

qui une solution non triviale si :

$$\frac{\mathrm{ch}\beta L + \cos\beta L}{\mathrm{sh}\beta L - \sin\beta L} = \frac{\mathrm{sh}\beta L + \sin\beta L}{\mathrm{ch}\beta L + \cos\beta L} \tag{14}$$

soit :

$$\mathrm{ch}\beta L \cos\beta L + 1 = 0 \tag{15}$$



dont les solutions sont : $\beta_1.L = 1.875$, $\beta_2.L = 4.694$, $\beta_3.L = 7.855$, ...
et les fréquences propres sont : $f_1 = \frac{1}{2\pi}\omega_1 = \frac{1}{2\pi}\beta^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1,875}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = \dots$

II Mise en évidence d'une base modale

II.1 Orthogonalité des modes

Les modes propres $V_i(x)$ sont caractérisés par l'équation caractéristique :

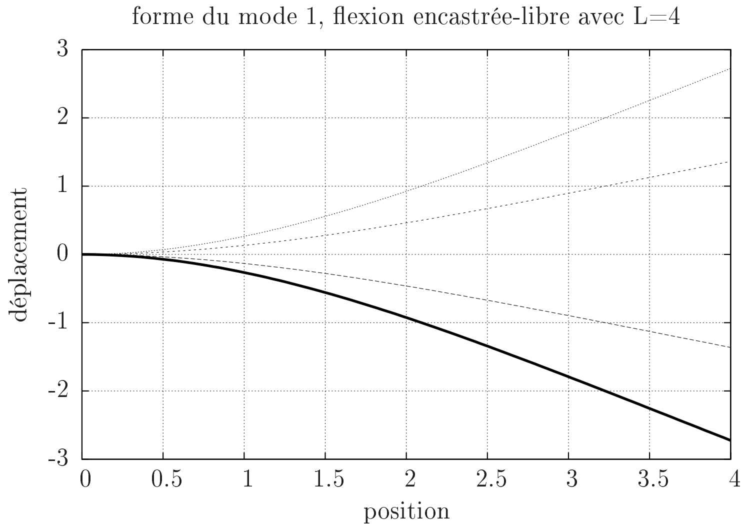
$$(EIV_i'')'' = \omega_i^2 \rho S V_i \tag{16}$$

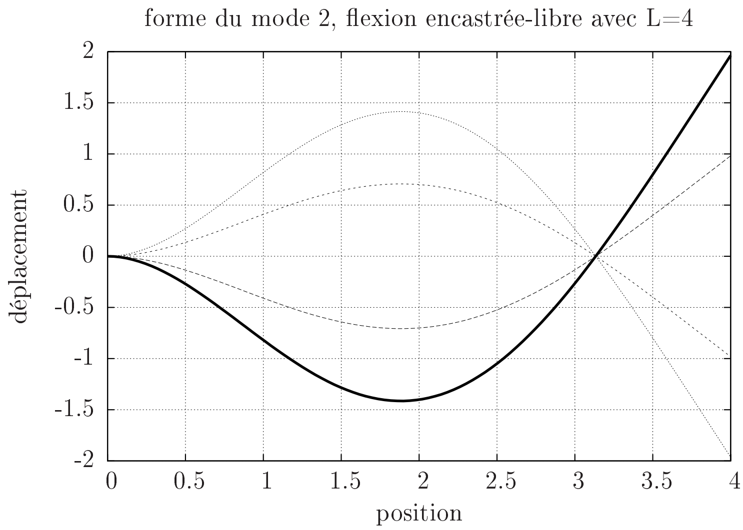
en multipliant chaque membre par un autre mode V_j et en intégrant sur la poutre, on obtient :

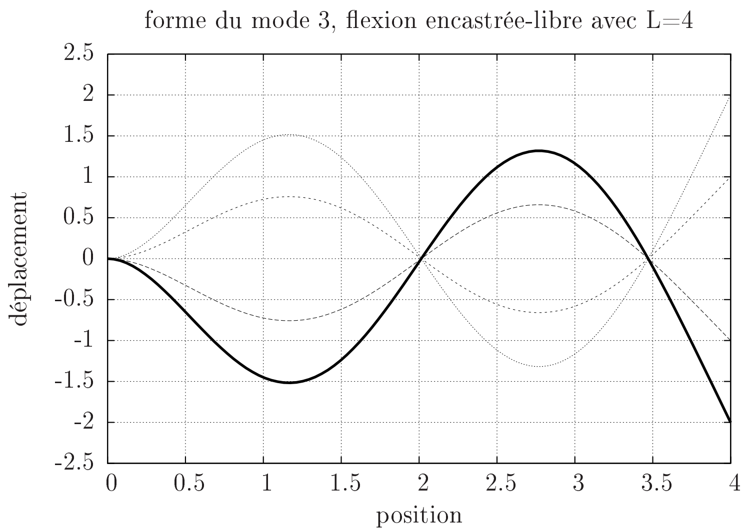
$$\int_0^L (EIV_i'')''V_j dx = -\int_0^L \omega_i^2 \rho S V_i V_j dx \tag{17}$$

En intégrant deux fois par partie le premier terme on obtient :

$$\Big[(EIV_i'')'V_j\Big]_0^L - \Big[EIV_i''V_j'\Big]_0^L + \int_0^L EIV_i''V_j'' dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho S V_i V_j dx \tag{18}$$


forme du mode 1, flexion encastrée-libre avec L=4
3
2
1
0
-1
-2
-3
déplacement
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
position


forme du mode 2, flexion encastrée-libre avec L=4
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
déplacement
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
position


forme du mode 3, flexion encastrée-libre avec L=4
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
déplacement
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
position

Le premier terme est nul car, aux extrémités, la barre est soit appuyée ($V_i = V_j = 0$) soit libre d'effort ($V_i''' = V_j''' = 0$). Le deuxième terme est aussi nul car, aux extrémités, la barre est soit à rotation bloquée ($V_i' = V_j' = 0$) soit libre de moment ($V_i'' = V_j'' = 0$). Il reste :

$$\int_0^L EIV_i''V_j''dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho SV_iV_jdx \tag{19}$$

En répétant la même opération en remplaçant l'équation (16) par :

$$(EIV_j'')'' = \omega_j^2 \rho SV_j \tag{20}$$

en multipliant chaque membre par V_i, en intégrant sur la barre est en suivant la même procédure que ci-dessus ont obtient :

$$\int_0^L EIV_i''V_j''dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho SV_iV_jdx \tag{21}$$

En retirant l'équation 19 de l'équation 21 on obtient :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L \rho SV_iV_jdx = 0 \tag{22}$$

Lorsque $i \neq j$, les deux fréquences sont différentes et on obtient alors la propriété :

$$\int_0^L \rho SV_iV_jdx = 0, \qquad \text{si } i \neq j \tag{23}$$

qui indique que deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l'opérateur ρS, appelé opérateur de masse.
En injectant cette propriété dans l'équation 19 ou dans l'équation 21, on obtient :

$$\int_0^L (EIV_i'')''V_jdx = \int_0^L EIV_i''V_j'' = 0, \qquad \text{si } i \neq j \tag{24}$$

qui indique que deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l'opérateur de raideur $(\frac{d^2}{dx^2}(EI\frac{d^2}{dx^2})$.

II.2 Normalisation

Lorsqu'on considère deux fois le même mode ($i = j$), on normalise en général le mode V_i de manière à ce que :

$$\int_0^L \rho SV_i^2dx = 1 \tag{25}$$

La condition d'orthonormalité des modes par rapport à la masse peut donc s'écrire :

$$\int_0^L \rho SV_iV_jdx = \delta_{ij} \tag{26}$$

Dès lors qu'on fait cette normalisation, on obtient :

$$\int_0^L EIV_i''^2dx = \int_0^L (EIV_i'')''V_i = \omega_i^2 \tag{27}$$

III Vibrations forcées

Lorsque qu'on force la vibration par un effort radial $f(x,t)$, l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{28}$$

On cherche une solution décomposée dans la base modale :

$$v(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t)V_j(x) \tag{29}$$

En introduisant cette décomposition dans l'équation d'équilibre (28), en multipliant chaque membre par V_i et en intégrant le long de la barre on obtient :

$$\ddot{q}_i\,(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \qquad i = 0\ldots\infty \tag{30}$$

en utilisant les propriëtés d'orthonormalité des modes. Le terme

$$Q_i(t) = \int_0^L V_i f(x,t)dx \tag{31}$$

est appelée projection de la force imposée sur le mode i. La résolution du problème de vibrations forcées se ramène à la résolution d'un ensemble de systèmes scalaires à un degré de liberté indépendants.