

Vibration de poutres en traction

S. Courtois

d'après L. Champaney

Sommaire

I Vibrations libres en traction	1
I.1 Mise en équation	1
I.2 Fréquences et modes propres	2
I.3 Exemples	2
II Mise en évidence d'une base modale	6
II.1 Orthogonalité des modes	6
II.2 Normalisation	7
III Vibrations forcées	7
III.1 exemple : barre encastrée-libre avec un effort en $x = L$	8
IV Vibrations de torsion d'une poutre	9

I Vibrations libres en traction

I.1 Mise en équation

Les variables considérées sont :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad N = ES\varepsilon \quad (1)$$

L'équation d'équilibre local est :

$$\frac{dN}{dx} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

soit : qui devient :

$$\boxed{ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \left(c^2 = \frac{E}{\rho} \right) \quad (3)$$

Les conditions aux limites possibles sont :

- déplacement imposé nul aux extrémités :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad u(L, t) = 0$$

- effort imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$



I.2 Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables :

$$u(x, t) = U(x)T(t) \quad (4)$$

L'équilibre devient :

$$c^2 \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \text{cste} = -\omega^2 \quad (5)$$

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante. Cette constante est choisie négative pour assurer la stabilité de la solution en temps, ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U = 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(x) = A \sin \frac{\omega x}{c} + B \cos \frac{\omega x}{c} \\ T(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \end{cases} \quad (6)$$

Les constantes A , B , C et D sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites. On peut déterminer les pulsations propres grâce à l'**équation caractéristique**

$$\begin{cases} CL_1 \\ CL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\det(\underline{\underline{A}}) = 0}$$

I.3 Exemples

I.3.1 Barre libre aux deux extrémités

Les conditions aux limites :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{dU}{dx}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dU}{dx}(L) = 0$$

donnent :

$$\begin{cases} A \frac{\omega}{c} = 0 \\ \frac{\omega}{c} \left(A \cos \frac{\omega L}{c} - B \sin \frac{\omega L}{c} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \sin \frac{\omega L}{c} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Les modes possibles de vibration sont donc caractérisés par :

$$\frac{\omega L}{c} = i\pi \quad (8)$$

Les «pulsations propres» et les modes propres de vibration sont donc :

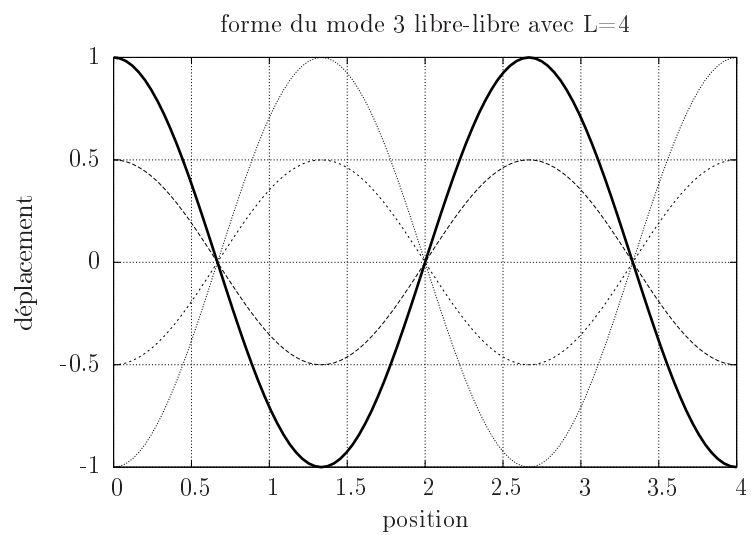
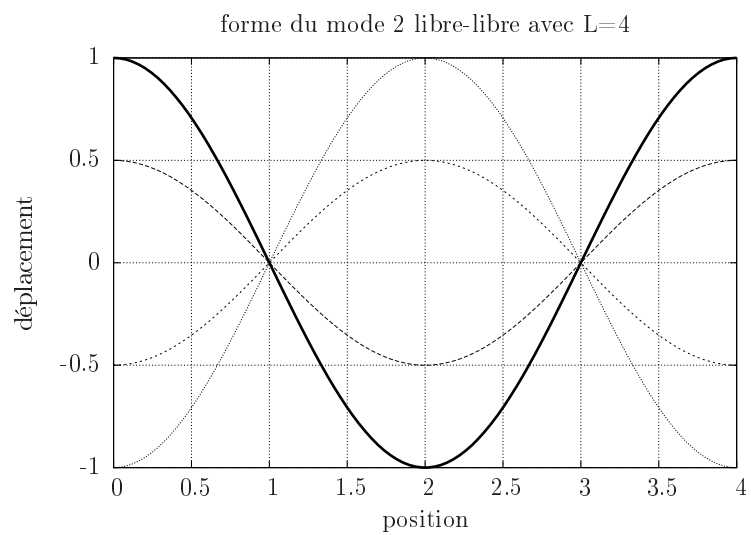
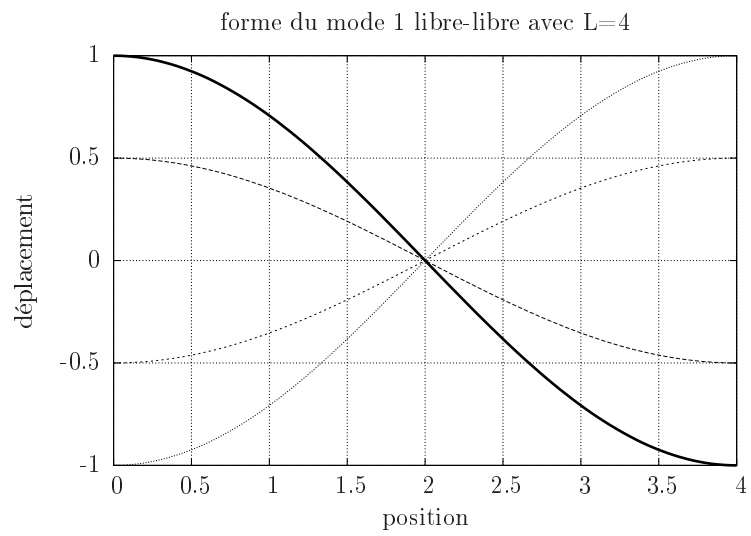
$$\boxed{\omega_i = i \frac{\pi c}{L} = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad \boxed{U_i(x) = \cos \frac{i\pi x}{L}} \quad (9)$$

La solution générale du problème de vibration est finalement :

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{L} (C_i \cos \omega_i t + D_i \sin \omega_i t) \quad (10)$$

où les constantes C_i et D_i dépendent des conditions initiales.

Sur les tracés suivants, on observe le déplacement axial des 3 premiers modes. **Les points immobiles sont appelés "noeuds", les points où les déplacements sont maximaux sont des "ventres".**





I.3.2 Barre encastree-libre

Les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

conduisent à :

$$\cos \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (11)$$

Les « pulsations propres » de vibration et les modes sont donc (rem : ω_i est toujours positive) :

$$\boxed{\omega_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad \boxed{U_i(x) = \sin(2i - 1) \frac{\pi x}{2L}} \quad (12)$$

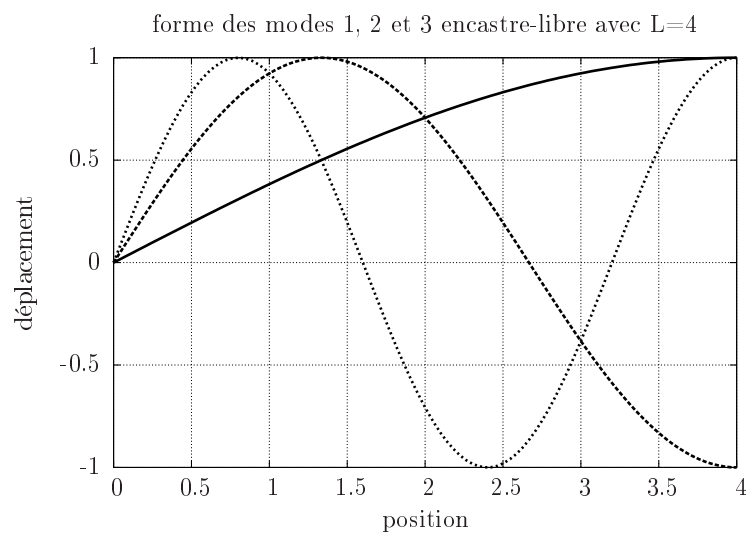


Figure 1 – on voit que les modes correspondent bien avec les conditions aux limites : $U(0) = 0$ et $U'(l) = 0$

I.3.3 Barre encastree-encastree

Les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = 0$$

conduisent à :

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (13)$$

Les « pulsations propres » et le modes de vibration sont donc :

$$\boxed{\omega_i = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad \boxed{U_i(x) = \sin i \frac{\pi x}{L}} \quad (14)$$

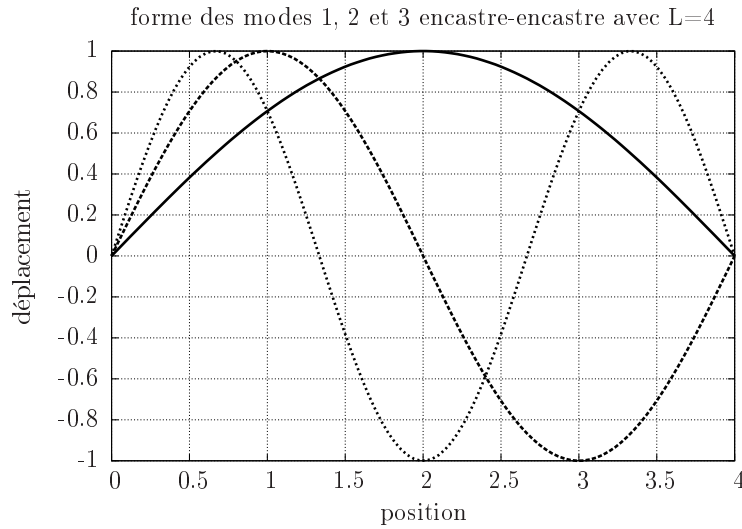


Figure 2 – on voit que les modes correspondent bien avec les conditions aux limites

I.3.4 Barre encastree de masse m et masse M au bout

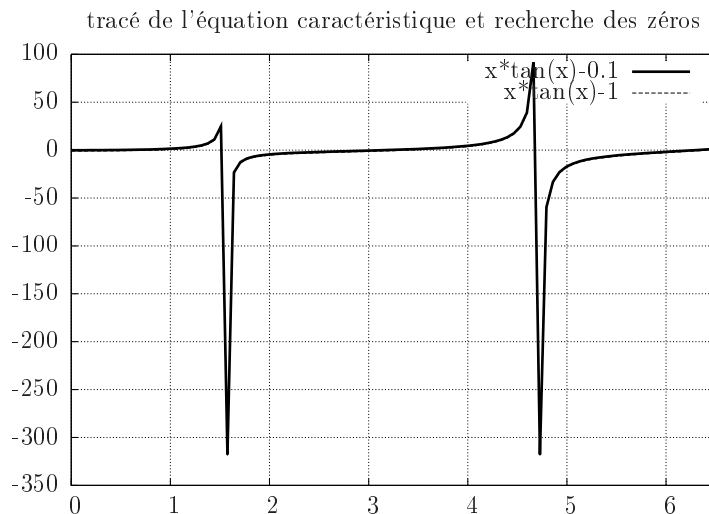
Les conditions aux limites :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L, t) = - \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

conduisent à :

$$\tan \frac{\omega L}{c} = \frac{ES}{M\omega c} = \frac{m}{M} \frac{1}{\frac{\omega L}{c}} \tag{15}$$

Les « pulsations propres » de vibration sont determinees par resolution numerique de l'equation $x \cdot \tan x = \frac{m}{M}$



On obtient le tableau 1.

On remarque dans ce tableau que si $\frac{m}{M} \rightarrow 0$, on tend vers une barre encastree-encastree. De meme si $\frac{m}{M} \rightarrow +\infty$, on tend vers une barre encastree-libre.

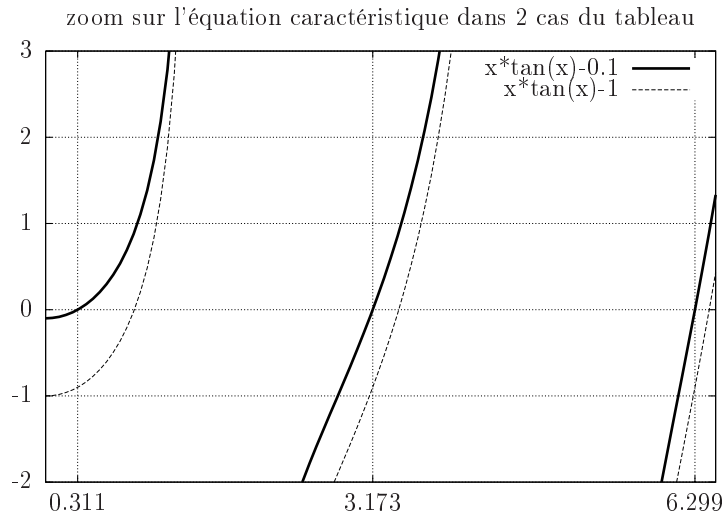


Figure 3 – avec $\frac{m}{M} = 0.1$ (et $\frac{m}{M} = 0.1$)

$\frac{m}{M}$	0	0.1	0.2	0.5	1	$+\infty$
$\left(\frac{\omega L}{c}\right)_1$	π	0.311	0.433	0.653	0.860	$\pi/2$
$\left(\frac{\omega L}{c}\right)_2$	2π	3.173	3.204	3.292	3.426	$3\pi/2$
$\left(\frac{\omega L}{c}\right)_3$	3π	6.299	6.331	6.362	6.437	$5\pi/2$

Tableau 1 – d’après J.L. Armand

II Mise en évidence d’une base modale

II.1 Orthogonalité des modes

Les modes propres sont notés $U_i(x)$. Lorsque $i \neq j$, les deux fréquences sont différentes et on obtient après calcul la propriété :

$$\int_0^L \rho S U_i U_j dx = 0, \quad \text{si } i \neq j \tag{16}$$

qui indique que deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l’opérateur ρS , appelé opérateur de masse. De même,

$$\int_0^L E S U_i' U_j' dx = - \int_0^L (E S U_i')' U_j = 0, \quad \text{si } i \neq j \tag{17}$$

qui indique que deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l’opérateur de raideur $\left(\frac{d}{dx}(E S \frac{d}{dx})\right)$.



II.2 Normalisation

Lorsqu'on considère deux fois le même mode ($i = j$), nous pouvons poser m_i la masse modale du mode i , et k_i la raideur modale

$$\int_0^L \rho S U_i^2 dx = m_i \quad \text{et} \quad - \int_0^L (ES U_i')' U_i = k_i \quad \text{d'où} \quad k_i = \omega_i^2 m_i \quad (18)$$

on normalise en général le mode U_i de manière à ce que :

$$\int_0^L \rho S U_i^2 dx = m_i = 1 \quad (19)$$

Dès lors qu'on fait cette normalisation, on obtient :

$$\int_0^L ES U_i^2 dx = - \int_0^L (ES U_i')' U_i = \omega_i^2 \quad (20)$$

III Vibrations forcées

Lorsque qu'on force la vibration par un effort $f(x, t)$, l'équation d'équilibre devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t) = 0 \quad (21)$$

On cherche une solution décomposée dans la base modale :

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) U_j(x) \quad (22)$$

En introduisant cette décomposition dans l'équation d'équilibre (21), en multipliant chaque membre par U_i et en intégrant le long de la barre on obtient :

$$\int_0^L \rho S U_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \ddot{q}_j(t) U_j(x) \right) dx - \int_0^L U_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} (q_j(t) ES U_j'(x))' \right) dx = \int_0^L U_i f(x, t) dx \quad (23)$$

Le terme

$$Q_i(t) = \int_0^L U_i f(x, t) dx \quad (24)$$

est appelée projection de la force imposée sur le mode i . En utilisant les propriétés d'orthonormalité des modes, ils reste :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 0 \dots \infty \quad (25)$$

La résolution du problème de vibrations forcées se ramène à la résolution d'un ensemble de systèmes scalaires à un degré de libertés indépendants.



III.1 exemple : barre encastée-libre avec un effort en $x = L$

On applique $F \cdot \sin(\omega t)$ en $x = L$. De plus nous connaissons les fréquences propres et les modes propres $U_i(x)$ grâce à l'étude du système libre. La démarche précédente donne donc :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = F \cdot U_i(L) \cdot \sin(\omega t), \quad i = 1 \dots \infty \quad (26)$$

Connaissant ω , on a donc

$$q_i(t) = \underbrace{q_{il}(t)}_{\text{solution libre}} + \underbrace{q_{ip}(t)}_{\text{solution particulière}}$$

Grâce à l'amortissement interne du matériau, la solution libre s'amortit, et il ne reste que la solution forcée q_{ip} , de la même forme que l'excitation, donc sinusoïdale. D'où :

$$q_i(t) = \frac{F \cdot U_i(L)}{\omega_i^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad \text{et} \quad \boxed{u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} F \cdot \underbrace{\frac{U_i(L)}{\omega_i^2 - \omega^2}}_{\text{participation de chaque mode}} \cdot U_i(x) \cdot \sin \omega t}$$

On voit que lorsque l'on est proche de la pulsation ω_1 , la participation du mode 1 est prédominante, et le système prend la forme du mode 1.

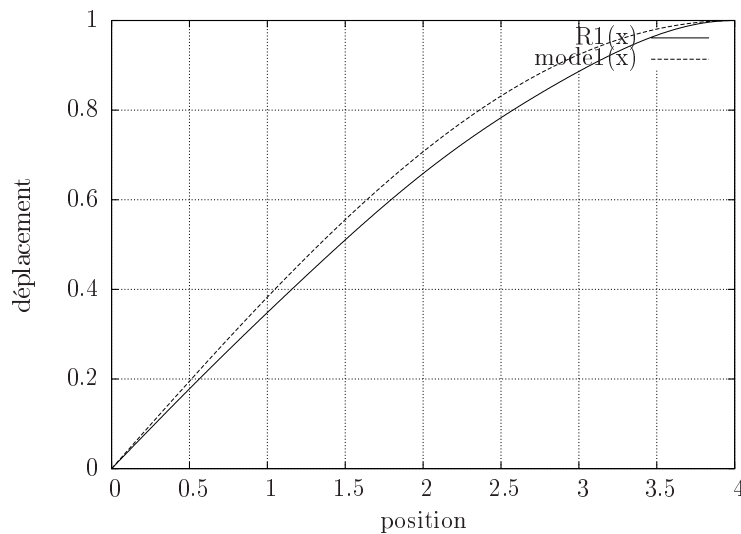


Figure 4 – forme de la réponse proche de ω_1 et forme du mode 1

On voit sur le tracé 4 que lorsque l'on excite la poutre à la fréquence f_1 , la poutre prend la forme du mode 1, et la réponse du mode 1 est prédominante sur les réponses des autres modes (tracé 5). De plus on voit bien sur le tracé 6 qu'une excitation proche d'une fréquence propre peut provoquer une **résonance**.

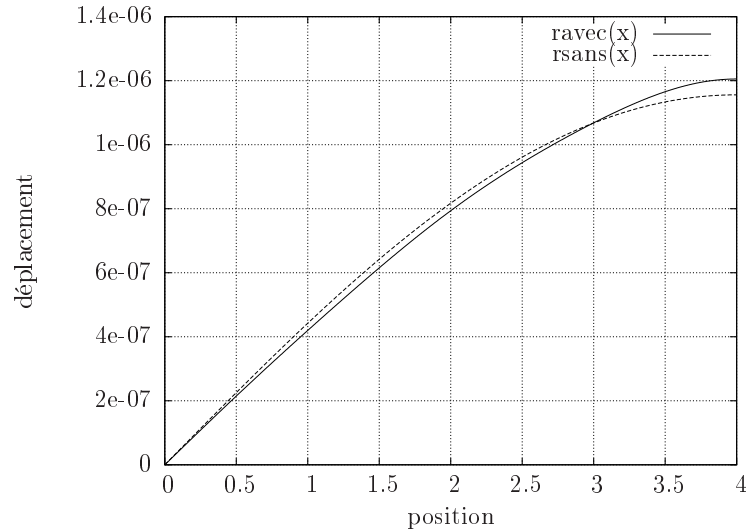


Figure 5 – comparaison des réponses autour de w_1 avec ou sans les participations des modes de 2 à 5

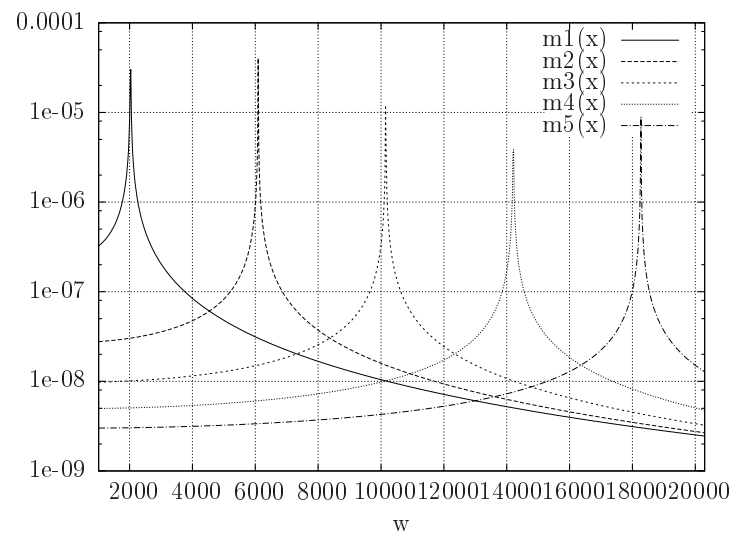


Figure 6 – réponse en fréquence des modes de 1 à 5, poutre en acier de $4m$ de long

IV Vibrations de torsion d'une poutre

Les variables considérées sont :

$$\chi_t = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad M_t = GI_0 \chi_t \quad (27)$$

L'équation d'équilibre local est :

$$\frac{\partial M_t}{\partial x} = \rho I_0 \ddot{\theta} \quad (28)$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (29)$$

Cette forme est identique à celle obtenue pour un problème de vibration longitudinale de barre. Les solutions sont du même type.