Corrigé- ED n°1 : Courbes paramétrées

Exercice n°1 :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=t^2+t \\ y(t)=2t-\dfrac{1}{t}\end{array}\right.$

Soient $t,\ t' \in \mathbb{R}^*$, avec $t \neq t'$.

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=x(t') \\ y(t)=y(t')\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t^2+t=t'^2+t' \\ 2t-\dfrac{1}{t}=2t'-\dfrac{1}{t'}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t^2-t'^2+t-t'=0 \\ 2t-2t'-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t'}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t^2-t'^2+t-t'=0 \\ 2t^2t'-2t'^2t-t'+t=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t-t')(t+t'+1)=0 \\ (t-t')(1+2tt')=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t+t'=-1 \\ tt'=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow t \text{ et } t' \text{ sont solutions de } X^2+X-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}\right) \\ t'=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)\end{array}\right. \quad \text{(ou inversement}$$

La courbe admet finalement un point double :

Pour $t=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $t=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$: $\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$.

2. $\left\{\begin{array}{l} x(t)=-t^3+3t \\ y(t)=t^2+\dfrac{1}{t^2}\end{array}\right.$

Soient $t,\ t' \in \mathbb{R}^*$, avec $t \neq t'$.

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=x(t') \\ y(t)=y(t')\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -t^3+3t=-t'^3+3t' \\ t^2+\dfrac{1}{t^2}=t'^2+\dfrac{1}{t'^2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -t^3+3t+t'^3-3t'=0 \\ t^2-t'^2+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t'^2}=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -t^3+3t+t'^3-3t'=0 \\ t^4t'^2-t^2t'^4+t'^2-t^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -(t-t')\left(t^2+t'^2+tt'-3\right)=0 \\ (t-t')(t+t')(tt'-1)(tt'+1)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t^2+t'^2+tt'-3=0 \\ (t+t')(tt'-1)(tt'+1)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t+t'=0 \\ t^2+t'^2+tt'-3=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} tt'-1=0 \\ t^2+t'^2+tt'-3=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} tt'+1=0 \\ t^2+t'^2+tt'-3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'=-t \\ t^2-3=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} t'=1/t \\ t^4-2t^2+1=0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} t'=-1/t \\ t^4-4t^2+1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t'=-t \\ t=\sqrt{3} \text{ ou } -\sqrt{3}\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} t'=1/t \\ t=\pm 1 \text{ (exclus car } t\neq t')\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} t'=-1/t \\ t=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ ou } \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

La courbe admet finalement trois points doubles :

- Pour $t = \sqrt{3}$ et $t = -\sqrt{3}$: $\left(0; \dfrac{10}{3}\right)$.
- Pour $t = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $t = -\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{2\sqrt{3}}$: $\left(\sqrt{2}; 4\right)$.
- Pour $t = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $t = -\dfrac{1}{-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$: $\left(-\sqrt{2}; 4\right)$.

Exercice n°2 :

1. $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Réduction de l'intervalle d'étude :

  $$\begin{cases} x(t+2\pi) = t + 2\pi - \sin(t+2\pi) = x(t) + 2\pi \\ y(t+2\pi) = 1 - \cos(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$$

  On peut donc faire l'étude sur $[-\pi; \pi]$, La courbe Γ sera alors obtenue par translations successives de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Soit $t \in [-\pi; \pi]$, $\begin{cases} x'(t) = 1 - \cos(t) \\ y'(t) = \sin(t) \end{cases}$.

t	$-\pi$		0		π
$x'(t)$	2	$+$	0	$+$	2
x	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	π
y	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
	Tgte Horizontale				Tgte Horizontale

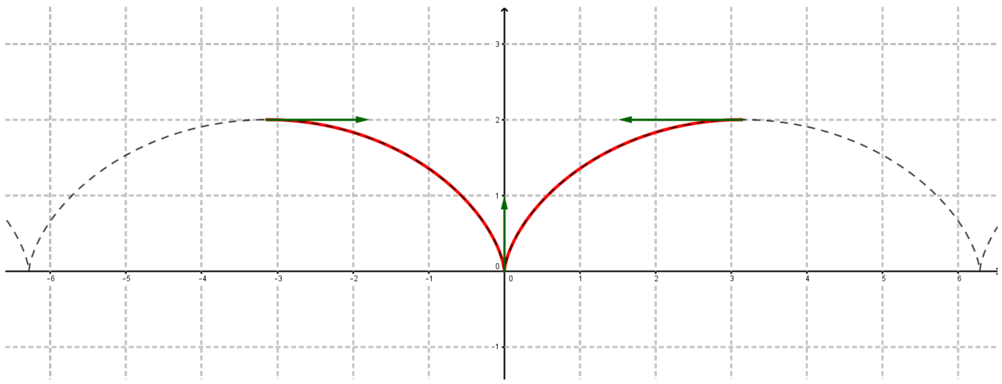
- Il y a un point stationnaire pour $t = 0$:

  $\begin{cases} x''(t) = \sin(t) \\ y''(t) = \cos(t) \end{cases}$, donc $f^{(2)}(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $p = 2$.

  $\begin{cases} x^{(3)}(t) = \cos(t) \\ y^{(3)}(t) = -\sin(t) \end{cases}$, donc $f^{(3)}(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, non colinéaire à $f^{(2)}(0)$, donc $q = 3$.

  C'est un point de rebroussement, et la tangente en ce point est dirigée par $f^{(2)}(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc elle est verticale.

- Pas de branche infinie.
-



2. $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Réduction de l'intervalle d'étude :

$\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$, donc on peut faire l'étude sur $[-\pi;\pi]$.

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$, on peut donc faire l'étude sur $[0;\pi]$, on obtiendra ensuite toute la courbe Γ en faisant la symétrie par rapport à (Ox).

- Soit $t \in [0;\pi]$, $\begin{cases} x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 2\left(-\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t)\right) = 2\sin(t)\left(-1 + 2\cos(t)\right) \\ y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2\left(\cos(t) - \left(2\cos^2(t) + 1\right)\right) = 2\left(-2\cos^2(t) + \cos(t) + 1\right) \end{cases}$

Signe de $x'(t)$: $-1 + 2\cos(t) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(t) \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$

Signe de $y'(t)$: $-2X^2 + X + 1 = 0$, $\Delta = 9$, donc $X_1 = \cos(t_1) = 1$, soit $t_1 = 0$ et $X_2 = \cos(t_2) = -\dfrac{1}{2}$, soit $t_2 = \dfrac{2\pi}{3}$

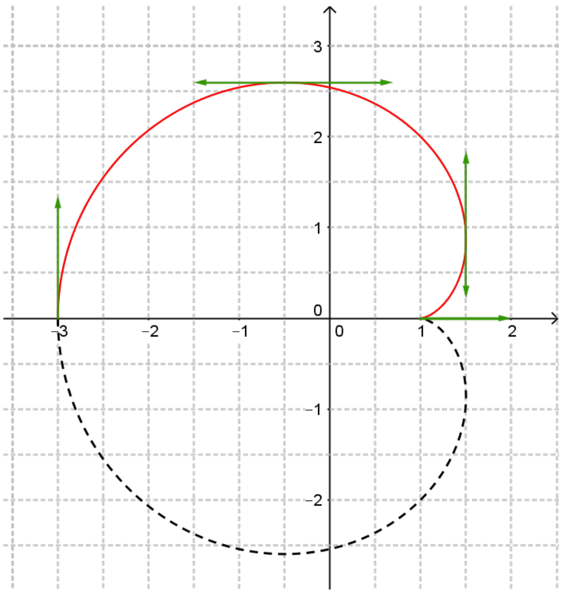
t	0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$	$-$	0
x	1	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$-1/2$	$\searrow$	-3
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2 \approx 0,87$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	-4
			Tgte Verticale		Tgte Horizontale		Tgte Verticale

- Point stationnaire pour $t = 0$:

$\begin{cases} x''(t) = 2\left(-\cos(t) + 2\cos(2t)\right) \\ y''(t) = 2\left(-\sin(t) + 2\sin(2t)\right) \end{cases}$, donc $f^{(2)}(0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $p = 2$.

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(3)}(t) = 2\left(\sin(t) - 4\sin(2t)\right) \\ y^{(3)}(t) = 2\left(-\cos(t) + 4\cos(2t)\right) \end{array}\right., \text{ donc } f^{(3)}(0)\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} \text{ n'est pas colinéaire à } f^{(2)}(0), \text{ donc } q = 3.$$

C'est un point de rebroussement et la tangente est dirigée par $f^{(2)}(0)$, elle est donc horizontale.

- Pas de branche infinie.
- 

3. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{array}\right.$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- Réduction de l'intervalle d'étude :

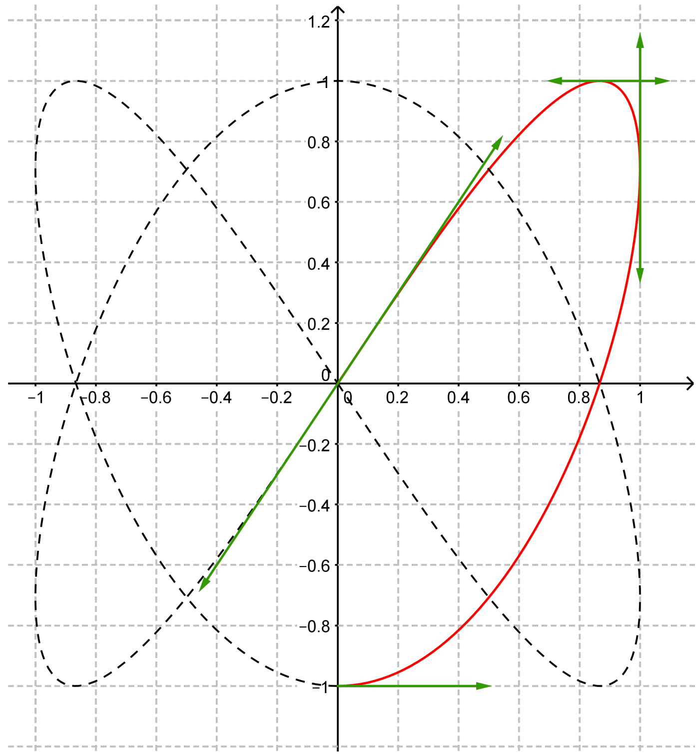
  $\left\{\begin{array}{l} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{array}\right.$, donc on peut faire l'étude sur $[-\pi;\pi]$.

  $\left\{\begin{array}{l} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array}\right.$, donc on peut faire l'étude sur $[0;\pi]$, puis pour obtenir toute la courbe, on fera la symétrie de centre 0.

  $\left\{\begin{array}{l} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{array}\right.$, donc on peut faire l'étude sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, puis on fera la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

- Soit $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 2\cos(2t) \\ y'(t) = 3\cos(3t) \end{array}\right.$

t	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/2$
$x'(t)$	2	$+$	1	$+$	0	$-$	-2
x	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	$-3/\sqrt{2}$	$-$	0
	Tgte dirigée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$		Tgte Horizontale		Tgente Verticale		Tgte Horizontale

- Pas de point stationnaire.
- Pas de branche infinie.
- 

4. $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = \dfrac{1+2t}{t^2} \end{cases}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
- Pas de réduction de l'ensemble d'étude.
- Soit $t \in \mathbb{R}^*$, $\begin{cases} x'(t) = 2t + 2 = 2(t+1) \\ y'(t) = -\dfrac{2(1+t)}{t^3} \end{cases}$

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$ 0	$\|$	0 $\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
	BI		Pt stationnaire		BI		BI

- Point stationnaire en $t=-1$:

  $\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = \dfrac{2(3+2t)}{t^4} \end{cases}$, donc $f^{(2)}(-1)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $p=2$.

  $\begin{cases} x^{(3)}(t) = 0 \\ y^{(3)}(t) = \dfrac{-12(2+t)}{t^5} \end{cases}$, donc $f^{(3)}(-1)\begin{pmatrix}0\\12\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $f^{(2)}(-1)$ et $q=3$.

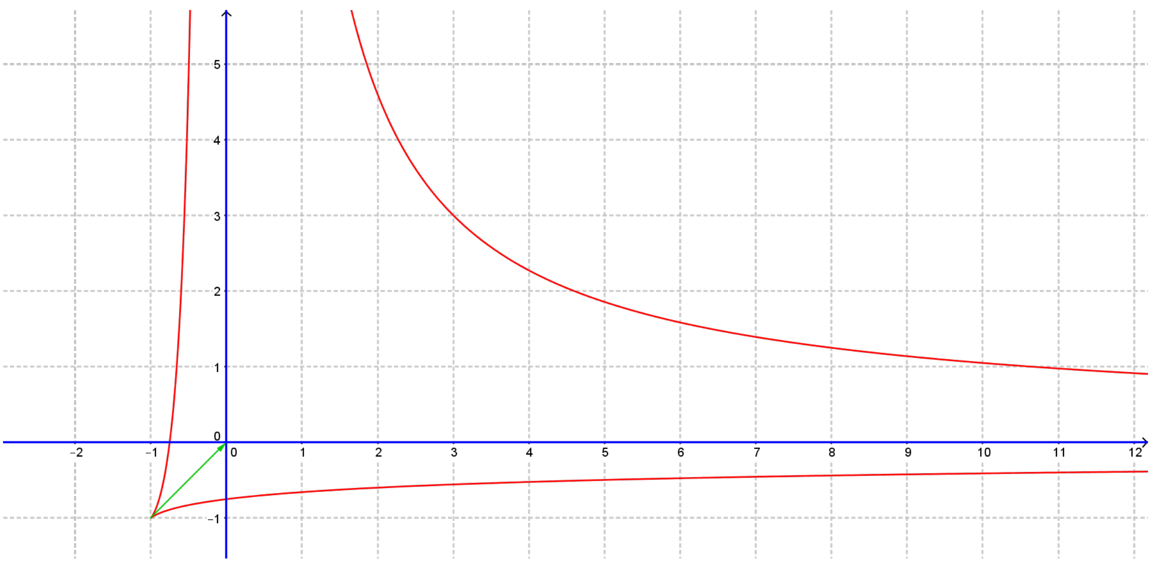
  C'est donc un point de rebroussement et la tangente est dirigée par $f^{(2)}(-1)$, soit $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

- Etude des branches infinies :

  * $\begin{cases} \lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = 0 \end{cases}$, donc la courbe admet une asymptote parallèles à l'axe des abscisses.

  De plus, au voisinage de $+\infty$, la courbe est en dessous de l'asymptote et au voisinage de $-\infty$, la courbe est au dessus de l'asymptote.

  * $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} x(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} y(t) = +\infty \end{cases}$, donc la courbe admet une asymptote d'équation $x=0$.

- 

5. $\begin{cases} x(t) = t^4 - t^3 - t^2 \\ y(t) = t^4 + t^3 + t^2 \end{cases}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- Pas de réduction de l'intervalle d'étude.

- Soit $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = 4t^3 - 3t^2 - 2t = t\left(4t^2 - 3t - 2\right) \\ y'(t) = t\left(4t^2 + 3t + 2\right) \end{cases}$.

  * Signe de $4t^2 - 3t - 2$: $\Delta = 41$, $t_1 = \dfrac{3 - \sqrt{41}}{8} \approx -0,42$ et $t_2 = \dfrac{3 + \sqrt{41}}{8} \approx 1,17$

  * Signe de $4t^2 + 3t + 2$: strictement positif sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$		t_1		0		t_2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -0,07$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\approx -1,1$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\approx 0,14$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\approx 4,9$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
	BI		Tgte Verticale		Pt Stationnaire		Tgte Verticale		BI

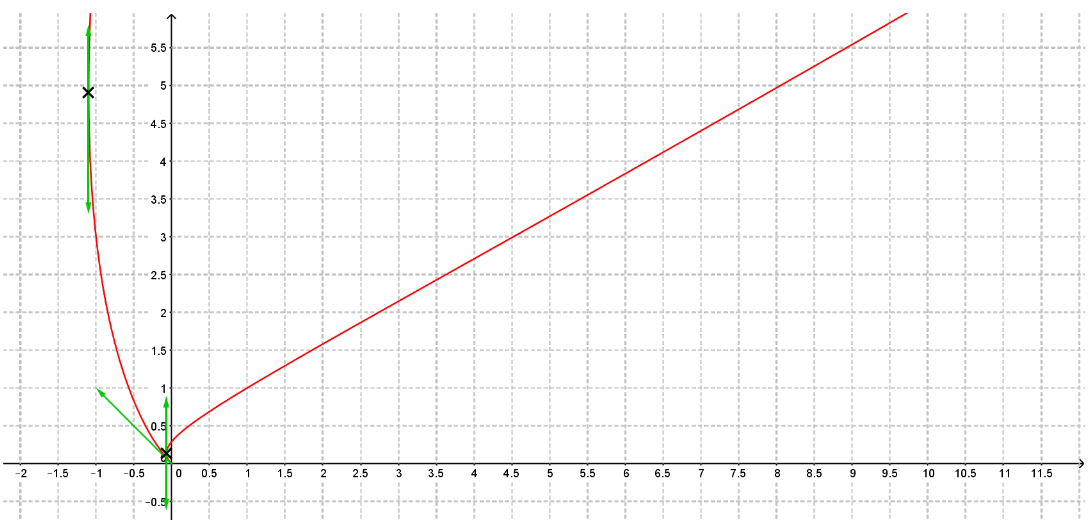
- Point stationnaire pour $t = 0$:
  $\begin{cases} x''(t) = 12t^2 - 6t - 2 \\ y''(t) = 12t^2 + 6t + 2 \end{cases}$, donc $f^{(2)}(0)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $p = 2$.

  $\begin{cases} x^{(3)}(t) = 24t - 6 \\ y^{(3)}(t) = 24t + 6 \end{cases}$, donc $f^{(3)}(0)\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $f^{(2)}(0)$.

  $\begin{cases} x^{(4)}(t) = 24 \\ y^{(4)}(t) = 24 \end{cases}$, donc $f^{(4)}(0)\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \end{pmatrix}$, non colinéaire à $f^{(2)}(0)$, donc $q = 4$.

  C'est un point de rebroussement de deuxième espéce et la tangente est dirigée par $f^{(2)}(0)$, soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Etude des branches infinies :
  $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 1$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) - x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} 2t^3 + 2t^2 + \pm\infty$.
  Donc la courbe admet une branche parabolique de pente 1.

- 

6. $\begin{cases} x(t) = (t+2)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t-2)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = (t+2)e^{\frac{1}{t}} \\ y(t) = (t-2)e^{\frac{1}{t}} \end{cases}$$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
- Soit $t \in \mathbb{R}^*$, $\begin{cases} x'(t) = e^{1/t}\dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2} \\ \\ y'(t) = e^{1/t}\dfrac{t^2-t+2}{t^2} \end{cases}$
-

t	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e \approx 0,37$	$\searrow$	$0 \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{e} \approx 6,6$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-3/e \approx -1,1$	$\nearrow$	$0 \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
	BI		Tgte Verticale		BI		Tgte Verticale		BI

- Pas de point stationnaire.
- Etude des branches infinies :

  $*\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{t-2}{t+2} = 1.$

  $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) - x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} -4e^{1/t} = -4.$

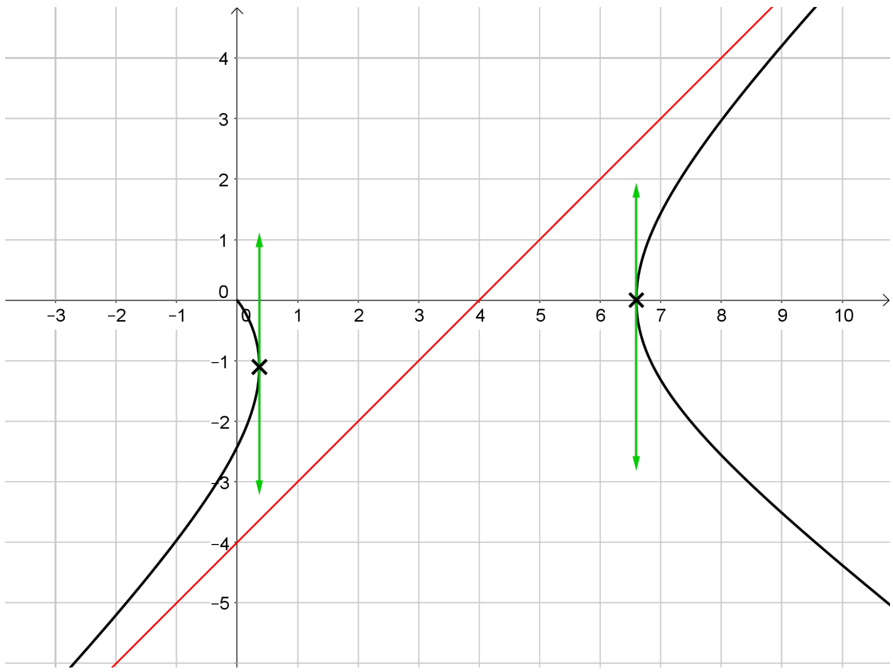
  Donc la courbe admet, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, la droite d'équation $y = x - 4$ comme asymptote.

  De plus, $y(t) - (x(t) - 4) = -4e^{1/t} + 4 = 4\left(1 - e^{1/t}\right)$.

  Donc, au voisinage de $-\infty$, $\dfrac{1}{t} \to 0^-$, donc $e^{1/t} < 1$ et donc la courbe est au dessus de l'asymptote.
  Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{t} \to 0^+$, donc $e^{1/t} > 1$ et la courbe est en dessous de l'asymptote.

  $*\ \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t-2}{t+2} = -1$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) + y(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 2te^{1/t} = +\infty.$

  Donc la courbe admet une branche parabolique de pente -1.

- 

Exercice n°3 : Soit

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2 \end{cases}$

- Si $t \neq 0$, le point $M(t)$ est régulier et la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$.
- Si $t = 0$, le point $M(t)$ est singulier : $\forall t \neq 0$, $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{2t}{3}$, donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0$ et la tangente en $M(0)$ est horizontale, donc dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Donc, dans tous les cas, la tangente au point $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$.

La normale au point $M(t)$ est quant à elle dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}$.

Soient t, $u \in \mathbb{R}$,
La tangente en $M(t)$ et la normale en $M(u)$ sont parallèles

si et seulement si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires
si et seulement si $1 + tu = 0$
si et seulement si $u = \dfrac{-1}{t}$ (t et u sont non nuls).

- Equation de la tangente $\mathcal{T}$ en $M(t)$:

$M(x;y) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M(t)M}\begin{pmatrix}x-3t^2\\y-2t^3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On obtient : $-t\left(x-3t^2\right)+\left(y-2t^3\right)=0$, soit $-tx+y+t^3=0$.

- Equation de la normale $\mathcal{N}$ en $M\left(u=-\dfrac{1}{t}\right)$:

$M(x;y)\in\mathcal{N} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1/t\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M\left(\frac{1}{t}\right)M}\begin{pmatrix}x-3/t^2\\y-2/t^3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On obtient : $\left(x-\dfrac{3}{t^2}\right)-\dfrac{1}{t}\left(y+\dfrac{2}{t^3}\right)=0$, soit $-tx+y+\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{t^3}=0$.

$$\mathcal{T}=\mathcal{N}\Leftrightarrow t^3=\frac{3}{t}+\frac{2}{t^3}\Leftrightarrow t^6-3t^2-2=0\Leftrightarrow \left(t^2+1\right)^2\left(t^2-2\right)=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$$

Donc, les droites à la fois tangentes et normales à la courbes sont :

- la tangente en $M_{\sqrt{2}}\left(6;4\sqrt{2}\right)$ d'équation : $y=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$, qui est normale en $M_{-1/\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- la tangente en $M_{-\sqrt{2}}\left(6;-4\sqrt{2}\right)$ d'équation : $y=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}$, qui est normale en $M_{1/\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice n°4 :

1. $\begin{cases} x(t)=t^2+t \\ y(t)=2t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$ pour tout $t\in\mathbb{R}^*$

$\forall t\neq 0$, $\begin{cases} x'(t)=2t+1 \\ y'(t)=2-1/t^2\end{cases}$, donc $y'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x'\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\neq 0$.

Donc tous les points de la courbe sont réguliers.

Donc $M(t)$ est un point d'inflexion si $p=1$ et $q\geq 3$ impair. En particulier, $\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x''(t)\\y''(t)\end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)=0$

Or, $x'(t)=2t+1$, $x''(t)=2$, $y'(t)=2-\dfrac{1}{t^2}$ et $y''(t)=\dfrac{2}{t^3}$.

Donc, $(2t+1)\dfrac{2}{t^3}-\left(2-\dfrac{1}{t^2}\right)\times 2=0\Leftrightarrow -4+\dfrac{2}{t^3}+\dfrac{6}{t^2}=0\Leftrightarrow -4t^3+6t+2=0\Leftrightarrow t=-1$ ou $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ ou $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Reste à vérifier que les points correspondants sont bien des points d'inflexion :

- Pour $t=-1$:
  $\begin{cases} x(-1)=0 \\ y(-1)=-3\end{cases}$, $\begin{cases} x'(-1)=-1 \\ y'(-1)=1\end{cases}$, donc $f'(-1)\neq\vec{0}$ et $p=1$.

  $\begin{cases} x''(-1)=2 \\ y''(-1)=-2\end{cases}$, donc $f''(-1)$ est colinéaire à $f'(-1)$.

  $\begin{cases} x'''(-1)=0 \\ y'''(-1)=-6\end{cases}$, donc $f'''(-1)$ n'est pas colinéaire à $f'(-1)$, donc $q=3$

  Donc $\boxed{\text{le point } M_{-1}\left(0;-3\right) \text{ est un point d'inflexion.}}$

- Pour $t = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 3/2-\sqrt{3} \\ y\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} x'\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 2-\sqrt{3} \\ y'\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\left(1+\sqrt{3}\right) \end{array}\right. ,$$

donc $f'\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \neq \vec{0}$ et $p=1$.

$$\left\{\begin{array}{l} x''\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \\ y''\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = -4\left(5+3\sqrt{3}\right) \end{array}\right. , \text{ donc } f''\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \text{ est colinéaire à } f'\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l} x'''\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ y'''\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = -24\left(7+4\sqrt{3}\right) \end{array}\right. , \text{ donc } f'''\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \text{ n'est pas colinéaire à } f'\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right),$$

donc $q=3$

Donc $\boxed{\text{le point } M_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right) \text{ est un point d'inflexion.}}$

- Pour $t = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 3/2+\sqrt{3} \\ y\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} x'\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 2+\sqrt{3} \\ y'\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-1+\sqrt{3}\right) \end{array}\right. ,$$

donc $f'\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \neq \vec{0}$ et $p=1$.

$$\left\{\begin{array}{l} x''\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \\ y''\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(-5+3\sqrt{3}\right) \end{array}\right. , \text{ donc } f''\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ est colinéaire à } f'\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l} x'''\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ y'''\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 24\left(-7+4\sqrt{3}\right) \end{array}\right. , \text{ donc } f'''\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ n'est pas colinéaire à } f'\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right),$$

donc $q=3$

Donc $\boxed{\text{le point } M_{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{3};2\sqrt{3}\right) \text{ est un point d'inflexion.}}$

2. $\begin{cases} x(t) = 2\ln|t| - t \\ y(t) = t^2 + 5t \end{cases}$

$\forall t \neq 0$, $\begin{cases} x'(t) = 2/t - 1 \\ y'(t) = 2t + 5 \end{cases}$, donc $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{5}{2}$ et $x\left(-\dfrac{5}{2}\right) \neq 0$.

Donc tous les points de la courbe sont réguliers.

Donc $M(t)$ est un point d'inflexion si $p = 1$ et $q \geq 3$ impair. En particulier, $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit

$$x'(t)y''(t) - y(-t)x''(t) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{t} - 1\right) \times 2 - (2t+5) \times \frac{-2}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{t} - 2 + \frac{4}{t} + \frac{10}{t^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2t^2 + 8t + 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = 5.$$

- Pour $t = -1$:
  $\begin{cases} x(-1) = 1 \\ y(-1) = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} x'(-1) = -3 \\ y'(-1) = 3 \end{cases}$, donc $f'(-1) \neq \vec{0}$ et $p = 1$.

  $\begin{cases} x''(-1) = -2 \\ y''(-1) = 2 \end{cases}$, donc $f''(-1)$ est colinéaire à $f'(-1)$.

  $\begin{cases} x'''(-1) = -4 \\ y'''(-1) = 0 \end{cases}$, donc $f'''(-1)$ n'est pas colinéaire à $f'(-1)$, donc $q = 3$

  Donc $\boxed{\text{le point } M_{-1}\,(1;-4) \text{ est un point d'inflexion.}}$

- Pour $t = 5$: $\begin{cases} x(5) = -5 + 2\ln(5) \\ y(5) = 50 \end{cases}$, $\begin{cases} x'(5) = -3/5 \\ y'(5) = 15 \end{cases}$, donc $f'(5) \neq \vec{0}$ et $p = 1$.

  $\begin{cases} x''(5) = -2/25 \\ y''(5) = 2 \end{cases}$, donc $f''(5)$ est colinéaire à $f'(5)$.

  $\begin{cases} x'''(5) = 4/125 \\ y'''(5) = 0 \end{cases}$, donc $f'''(5)$ n'est pas colinéaire à $f'(5)$, donc $q = 3$

  Donc $\boxed{\text{le point } M_5\,(-5 + 2\ln(5); 50) \text{ est un point d'inflexion.}}$