Chapitre 4
Equations différentielles

Objectifs :

C4.1 Savoir résoudre l'équation homogène associée à une EDL1.

C4.2 Savoir trouver une solution particulière d'une EDL1.

C4.3 Savoir résoudre une EDL1.

C4.4 Savoir résoudre l'équation homogène associée à une EDL2.

C.4.5 Savoir trouver une solution particulière d'une ELD2.

C4.6 Savoir résoudre une EDL2.

C4.7 Savoir résoudre un problème de Cauchy.

Table des matières

Les équations différentielles apparaissent naturellement, à chaque fois qu'on a une relation entre une grandeur et ses dérivées.

- *En mécanique, la loi de Newton relie l'accélération et des forces dépendant de la position et de la vitesse.*
- *En électronique, la loi d'Ohm relie le courant et l'intensité, l'intensité étant la dérivée de la charge d'un condensateur.*
- *Il apparaît aussi des équations différentielles en chimie, lorsque l'on étudie des vitesses de réaction.*

Les équations différentielles (et leur généralisation à plusieurs variables, les équations différentielles partielles EDP) sont donc l'outil de base de la physique. Cependant, il n'y a pas de méthode générales de résolution des équations différentielles et pour la plupart d'entre elles, on doit se contenter de résolutions numériques approchées.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux équations les plus simples : les équations linéaires d'ordre 1 *et linéaires d'ordre* 2 *à coefficients constants. En pratique, les approximations des physiciens permettent de s'y ramener souvent.*

I Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1 *:*

- *Une relation faisant intervenir une fonction inconnue d'une variable réelle appartenant à un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et certaines de ses dérivées successives est appelée* ***une équation différentielle****.*
- *Une équation différentielles est dite* ***du premier ordre*** *lorsque la relation qui la définit comporte explicitement la dérivée première de la fonction inconnue, mais pas les dérivées d'ordre strictement supérieur à* 1*.*
- ***Résoudre une équation différentielle*** *sur un intervalle* I*, c'est déterminer toutes les fonctions* f *dérivables sur* I*, au moins jusqu'à l'ordre de l'équation, vérifiant la relation donnée par l'équation, pour tout* x *appartenant à* I*.*
- *Une fonction, solution de l'équation différentielles est appelée* ***solution particulière*** *de cette équation.*
- *Pour une équation différentielle du premier ordre, on peut imposer la valeur en un réel* x_0 *de la solution cherchée : Cette condition est appelée la* ***condition initiale****.*

Proposition 1 *:* Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ sont les fonctions de la forme $y(x) = \lambda e^{ax}$ avec $\lambda = y(0)$.

Preuve : **en Annexe**

Proposition 2 *:* Caractérisation de la fonction $x \mapsto e^{ax}$
La fonction $x \mapsto e^{ax}$ est l'unique solution de l'équation $y' - ay = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$

I.1 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 2 *: On appelle* ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** *toute équation différentielle de la forme*

$$(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

où a, b et c sont des fonctions numériques (à valeurs complexes ou réelles) continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire :

- On appelle **équation homogène ou équation sans second membre associée à** (E) l'équation
$$(E_h) : a(x)y' + b(x)y = 0$$
- Une solution de (E) sur I est une fonction numérique f dérivable sur I et telle que :
$$\forall x \in I,\ a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$
- **Intégrer** ou **résoudre** (E) consiste à déterminer toutes les solutions de (E) sur I. La courbe d'une fonction f solution de (E) est appelée **courbe intégrale**.
- On appelle **problème de Cauchy** le problème consistant à déterminer les solutions f de (E) satisfaisant à une condition initiale
$$f(x_0) = y_0$$
où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$
- Si la fonction a ne s'annule pas sur I, alors l'équation (E) peut être réduite sous la forme :
$$y' + \alpha(x)y = \beta(x)$$
où α et β sont des fonctions continues sur I.
- Si $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions continues sur I à valeurs réelles, alors une solution de (E) est une fonction réelle f dont la tangente à la courbe intégrale $\mathcal{C}_f$ au point $(x, f(x))$ a pour pente $b(x) - a(x)f(x)$.
Résoudre un problème de Cauchy de condition initiale $f(x_0) = y_0$ revient dans ce cas à rechercher toutes les courbes intégrales passant par le point $M_0(x_0, y_0)$.

On étudie à présent l'équation différentielle suivante

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions numériques continues sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$.

On convient que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon que l'équation est réelle ou complexe, c'est à dire selon que a et b sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solution de l'équation homogène associée

$$(E_h) : y' + a(x)y = 0$$

Si A désigne une primitive sur I de la fonction continue a, alors la fonction h_0 définie par

$$h_0(x) = e^{-A(x)}$$

est dérivable sur I et

$$h_0'(x) = -A'(x)e^{-A(x)} = -a(x)h_0(x)$$

Donc $h_0'(x)+a(x)h_0(x)=0$ et h_0 est une solution de (E_h).

Réciproquement si h est une solution de (E_h), et si on pose, pour tout $x\in I$,

$$g(x)=h(x)e^{A(x)}$$

Alors, $g'(x)=h'(x)e^{A(x)}+h(x)A'(x)e^{A(x)}=e^{A(x)}\underbrace{\left(h'(x)+a(x)h(x)\right)}_{=0}=0$

Donc g est une fonction constante sur I et il existe $\lambda\in\mathbb{R}$, tel que, pour tout $x\in I$, $g(x)=h(x)e^{A(x)}=\lambda$, soit $h(x)=\lambda e^{-A(x)}=\lambda h_0(x)$

Proposition 3 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction continue sur I.
L'ensemble des solutions de l'équation $(E_h): y'+a(x)y=0$ est :

$$\mathcal{S}_h=\left\{x\in I\mapsto\lambda e^{-A(x)},\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

où A est une primitive de a sur I.

Théorème 1 :

Soient a et b deux fonctions continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E): y'+a(x)y=b(x)$.
La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène associée.

$$\mathcal{S}_{(E)}=\left\{x\mapsto f_p(x)+\lambda e^{-A(x)},\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Preuve : **en Annexe**

Remarque :

- On note $\mathcal{S}=f_0+\mathbb{K}h_0$ avec f_0 une solution particulière de (E) et h_0 définie par $h_0(x)=e^{-A(x)}$.
  L'ensemble des solutions de (E) est une droite affine passant par le "point fonction" f_0 et dirigée par le "vecteur fonction" h_0.
- **Pour résoudre une EDL du premier ordre, il suffit de connaître une solution particulière et la solution de l'équation homogène**.

I.2 Solution particulière de l'équation avec second membre

Une fois déterminée la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$, il suffit pour achever la résolution de trouver une solution particulière.

I.3.1. Principe de superposition

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

avec $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$.

Supposons que f_1 est une solution de $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et f_2 une solution de $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$.

Alors $f_1'(x) + a(x)f_1(x) = b_1(x)$ et $f_2'(x) + a(x)f_2(x) = b_2(x)$, donc si on considère la fonction $f = f_1 + f_2$,
$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) = b_1(x) - a(x)f_1(x) + b_2(x) - a(x)f_2(x) = b_1(x) + b_2(x) - a(x)\underbrace{(f_1(x) + f_2(x))}_{=f(x)}$,

donc $f'(x) + a(x)f(x) = b_1(x) + b_2(x) = b(x)$.

Donc,

Proposition 4 :

> Soit $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b des fonctions continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$.
>
> Si le second membre se décompose sous la forme $b = b_1 + b_2$ et si f_1 et f_2 sont respectivement des solutions particulières de $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$, alors
>
> $$f = f_1 + f_2 \text{ est solution de } (E)$$

Remarque : Le principe se généralise au cas où $b = b_1 + b_2 + ... + b_n$.

I.3.2. Utilisation d'une solution évidente

Dans certain cas, il peut exister des solutions évidentes données le plus souvent par analyse de cas particuliers du problèmes physique ou géométrique dont est issue l'équation.

I.3.3. Méthode de variation de la constante

Lorsqu'il n'y a aucune solution particulière évidente, on peut appliquer la méthode dite de **variation de la constante** qui consiste à cherche une solution particulière sous la forme $f_p(x) = \lambda(x)h_0(x)$.

On considère que la "constante" est en fait une fonction dérivables sur I (ce n'est plus une constante puisqu'elle varie en fonction de x).

Soit $(E) : y' + a(x)y = b(x)$, $h_0(x) = e^{-A(x)}$ avec A une primitive de a.
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme : $h(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

La méthode va consister à chercher une solution particulière de (E), y_p sous la forme $f_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$.

Alors $f_p'(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - A'(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = (\lambda'(x) - a(x)\lambda(x))\, e^{-A(x)}$.

f_p solution de (E) ssi $f_p'(x) + a(x)f_p(x) = b(x)$

ssi $\left(\lambda'(x) - a(x)\lambda(x)\right) e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = b(x)$.
ssi $\lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x)$
ssi $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$

Finalement, λ est une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$,
donc $\lambda(x) = \int b(x)e^{A(x)}dx$ et $y_p(x) = \left(\int b(x)e^{A(x)}dx\right) e^{-A(x)}$.

Proposition 5 : La solution générale de l'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ s'exprime sous forme intégrale

$$f(x) = \underbrace{\lambda e^{-A(x)}}_{\text{sol de } (E_h)} + \underbrace{\left(\int b(x)e^{A(x)}dx\right) e^{-A(x)}}_{\text{sol particulière de } (E)}$$

I.3.4. **Cas particulier des EDL du premier ordre à coefficients constants**

Soient a, $k \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Equation de la forme $y' + ay = P(x)e^{kx}$.
  On cherche une solution particulière sous la forme :
  * $x \mapsto Q(x)e^{kx}$ avec $deg(Q) = n$ si $k \neq -a$
  * $x \mapsto xQ(x)e^{kx}$ avec $deg(Q) = n$ si $k = -a$
- Equation de la forme $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ ou $P(x)\sin(kx)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
  On cherche une solution particulière complexe $y_{\mathbb{C}}$ de l'équation complexe
  $$y' + ay = P(x)e^{ikx}$$
  en appliquant la méthode du point précédent.
  Alors $Re\left(y_{\mathbb{C}}\right)$ est solution de $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ et $Im\left(y_{\mathbb{C}}\right)$ est solution de $y' + ay = P(x)\sin(kx)$.

I.3 Problèmes de Cauchy

Théorème 2 : Unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale
Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ admet une unique solution f sur I telle que $f(x_0) = y_0$

Preuve : Soit f_p une solution particulière de (E) (il en existe toujours d'après la méthode de variations de la constante) et h_0, définie par $h_0(x) = e^{-A(x)}$, une solution de l'équation homogène associée.

Alors les solutions de (E) sont de la forme $f = f_p + \lambda h$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow f_p(x_0) + \lambda e^{-Ax_0} = y_0 \Leftrightarrow \lambda e^{-Ax_0} = y_0 - f_p(x_0) \Leftrightarrow \lambda = \left(y_0 + f_p(x_0)\right) e^{Ax_0}$.

Donc il existe une unique fonction f, solution de (E), qui vérifie la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

I.4 Problème de recollement des solutions

Pour aller plus loin.

L'étude précédente montrer que pour tout intervalle I où la fonction a ne s'annule pas, la solution générale de l'équation différentielle (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ dépend d'un unique paramètre (λ) et tout problème de Cauchy admet une solution unique.

Lorsque la fonction a s'annule, on peut appliquer cette étude sur chaque intervalle où elle n'est pas nulle et tenter alors de "recoller" les diverses solutions obtenues pour obtenir une solution globale sur le domaine de continuité de a.

L'équation différentielle (E) peut alors ne pas admettre de solution, en admettre une seule, ou encore admettre une solution générale qui dépend d'un paramètre ou plus. Tous les cas sont possibles et aucune règle ne peut être énoncée à priori.

II Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

II.1 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 3 : *On appelle* ***équation différentielle linéaire du second ordre*** *toute équation différentielle de la forme :*

$$(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

où a, b, c et d sont des fonctions numériques continues sur un intervalle I.

*L'****équation homogène associée à*** (E) *est l'équation sans second membre :*

$$(E_h) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Proposition 6 :

Soit $(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ avec a, b, c et d des fonctions continues sur I.
L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S}_{(E)} = \{f_0 + h, h \text{ solution de } (E_h)\}$$

avec f_0 une solution particulière de (E).

Preuve : **en Annexe**

Ici, nous nous limiterons au cas où les fonctions a, b et c sont des constantes ; donc aux équations différentielles du type :

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$$

avec a, b et c des réels ou des complexes, $a \neq 0$ et d une fonction continue sur un intervalle I.

II.2 Résolution de l'équation homogène

Proposition 7 :

Soit $(E_h) : ay'' + by' + cy = 0$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$.
Pour tout $r \in \mathbb{K}$, $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E_h) ssi

$$ar^2 + br + c = 0$$

Preuve : **en Annexe**

Définition 4 : *L'équation $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$ est appelée* ***équation caractéristique associée à*** (E).

Proposition 8 :

Soit $(E_h) : ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.
Si (E_c) admet

- deux racines distinctes r_1 et r_2 complexes, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme

  $$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

  avec $A, B \in \mathbb{C}$
- une racine double r_0 complexe, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme

  $$x \mapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$$

Preuve : **en Annexe**

Proposition 9 *:*

Soit $(E_h) : ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(E_c) : ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.
Si (E_c) admet

- deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$
- une racine double réelle r_0, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$
- deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$, alors les solutions de (E_h) sont de la forme
$$x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\beta x) + Be^{\alpha x} \sin(\beta x)$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$
ou de la forme
$$x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi)$$
avec $A, \varphi \in \mathbb{R}$

Preuve : **en Annexe**

II.3 Résolution de l'équation complète

On vient de voir comment déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_h) associée à une équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$.
Il "suffit" donc pour résoudre (E) d'en connaître une solution particulière.

Le principe de superposition

Proposition 10 :

Soit (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et d une fonction continue sur I.
Si le second membre se décompose sous la forme $d = d_1 + d_2$ et si f_1 e tf_2 sont des solutions particulières respectivement des équations (E_1) : $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et (E_2) : $ay'' + by' + cy = d_2(x)$, alors

$$f = f_1 + f_2 \text{ est une solution particulière de } (E)$$

Preuve : **en Annexe**

Remarque : Le principe se généralise aisément par récurrence au cas où $d = d - 1 + d_2 + ... + d_n$.

Cas où il existe une solution évidente

Dans certains cas, il peut y avoir des solutions évidentes.

Cas où le second membre est un polynôme

Notation : $\mathbb{K}_n[X] = \{$polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré inférieur ou égal à $n\}$.

On considère (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, où $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, $d \in \mathbb{K}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

Proposition 11 :

- Si $c \neq 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p = P(X) \in \mathbb{K}_n[X]$$
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p = X \times P(X), \text{ où } P \in \mathbb{K}_n[X]$$
- Si $c = 0$ et $b = 0$, on cherche une solution particulière de (E) sous le forme
$$y_p = X^2 \times P(X), \text{ où } P \in \mathbb{K}_n[X]$$

Cas où le second membre est un polynôme exponentielle

On considère (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $d(x) = e^{\gamma x}P(x)$ où $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\gamma \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Proposition 12 :

- Si γ n'est pas racine de (E_c), on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p(x) = e^{\gamma x} Q(x) \text{ avec } Q \in \mathbb{K}_n[X]$$
- Si γ est racine simple de (E_c), on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p(x) = e^{\gamma x} x Q(x) \text{ avec } Q \in \mathbb{K}_n[X]$$
- Si γ est racine double de (E_c), on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p(x) = e^{\gamma x} x^2 Q(x) \text{ avec } Q \in \mathbb{K}_n[X]$$
Dans ce cas, on peut aussi changer de fonction inconnue et poser $y(x) = e^{\gamma x} z(x)$.

Cas d'une équation réelle où $d(x) = P(x)\cos(\gamma x) + Q(x)\sin(\gamma x)$

On considère $(E) : ay''+by'+cy = P(x)\cos(\gamma x)+Q(x)\sin(\gamma x)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 13 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, P,Q, P_1, $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
$\forall x \in I$, $P(x)\cos(\gamma x) + Q(x)\sin(\gamma x) = P_1(x)\cos(\gamma x) + Q_1(x)\sin(\gamma x) \Leftrightarrow P = P_1$ et $Q = Q_1$

Proposition 14 :

- Si $i\gamma$ n'est pas racine de (E_c), alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p(x) = P_1(x)\cos(\gamma x) + Q_1(x)\sin(\gamma x) \text{ avec } P_1,\ Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$$
- Si $i\gamma$ est racine de (E_c), alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme
$$y_p(x) = x\left(P_1(x)\cos(\gamma x) + Q_1(x)\sin(\gamma x)\right) \text{ avec } P_1,\ Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$$

Cas où $d(x) = P(x)\cos(\gamma x)\, e^{\delta x}$ ou $P(x)\sin(\gamma x)\, e^{\delta x}$

Dans ce cas, on utilise les formules d'Euler :
$$\cos(\gamma x) = \frac{e^{i\gamma x} + e^{-i\gamma x}}{2} \text{ et } \sin(\gamma x) = \frac{e^{i\gamma x} - e^{-i\gamma x}}{2i}$$
et on se ramène au cas $Q(x)e^{\epsilon x}$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\epsilon \in \mathbb{C}$.

Méthode de variations des constantes

en Annexe

II.4 Problème de Cauchy

On suppose ici que l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et d est une fonction continue sur I, admet une solution particulière f_p (ce qui est toujours le cas si d a une des formes particulières traitée dans la partie précédente).

Théorème 3 : Soit $x_0 \in I$, alors pour tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, l'équation différentielle

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$$

admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.

Annexe-A

Etude de la fonction $x \mapsto e^{ax}$, $a \in \mathbb{C}$

Preuve : proposition 1
Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par

$$\varphi(x) = a(x) + ib(x)$$

où a et b sont deux fonctions réelles, respectivement appelées **partie réelle** et **partie imaginaire** de φ, dérivables sur I.

Alors φ est dérivable sur I et

$$\varphi'(x) = a'(x) + ib'(x)$$

Soit f la fonction complexe définie sur I par

$$f(x) = e^{\varphi(x)} = e^{a(x)}e^{ib(x)} = e^{a(x)}\cos(b(x)) + ie^{a(x)}\sin(b(x))$$

est, en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur I, une fonction dérivables sur I et

$$f'(x) = a'(x)e^{a(x)}e^{ib(x)} + ib'(x)e^{a(x)}e^{ib(x)} = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$$

- En particulier, la fonction f définie par $f(x) = e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

  $$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$$

  Elle est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielles $(E) : y' - ay = 0$.
- Réciproquement, soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' - ay = 0$.

  Posons $z(x) = f(x)e^{-ax}$.

  Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = e^{-ax}\underbrace{(f'(x) - af(x))}_{=0} = 0$.

  Ainsi, pour toute solution f sur $\mathbb{R}$ de (E), la fonction $z : x \mapsto f(x)e^{-ax}$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
  Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $z(x) = f(x)e^{-ax} = \lambda$, soit $f(x) = \lambda e^{ax}$.

Remarque :

- La fonction $x \mapsto e^{ax}$ vérifie l'équation fonctionnelle de transformation de sommes en produits :

  $$(F) : \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)f(y)$$

  En effet, $e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}e^{ay}$.
- Réciproquement, si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant a relation (F), montrons que f est de la forme $f(x) = e^{ax}$.

  Si on applique la relation (F) à $x = y = 0$, on obtient :

  $f(0+0) = f(0)^2 \Leftrightarrow f(0) = f(0)^2 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

* Si $f(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \times 0 = 0$, donc f est la fonction nulle.

* Si $f(0) = 1$, alors si on dérive la relation (F) par rapport à la variable x (on considère y comme une constante), on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f'(x+y) = f'(x)f(y)$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f'(y) = f'(0)f(y)$$

Donc f est solution de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ avec $a = f'(0)$ et la condition $f(0) = 1$ et donc d'après la proposition précédente, $f(x) = e^{ax}$.

Donc,

Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui transforme les sommes en produits sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Annexe-B

Démonstrations

<u>*Preuve :*</u> théorème 1

- Soit f est une solution de (E). Considérons la fonction $h = f - f_p$ où f_p est une solution particulière de (E).

  Alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ et $f_p'(x) + a(x)f_p(x) = b(x)$.

  Montrons que h est une solution de (E_h) : h est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
  $h'(x) = f'(x) - f_p'(x) = (b(x) - a(x)f(x)) - (b(x) - a(x)f_p(x)) = b(x) - a(x)f(x) - b(x) + a(x)f_p(x) = -a(x)\,[f(x) - f_p(x)] = -a(x)h(x)$
  Donc, $h'(x) + a(x)h(x) = 0$ et h est solution de (E_h).

  Donc $f = h + f_p$ avec h une solution de (E_h) et f_p une solution particulière de (E).

- Réciproquement soient f_p une solution particulière de (E) et h une solution de (E_h).

  Montrons que $f = f_p + h$ est une solution de (E).

  Pour tout $x \in I$, $f_p'(x) + a(x)f_p(x) = b(x)$ et $h'(x) + a(x)h(x) = 0$.

  f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, $f'(x) = f_p'(x) + h'(x) = b(x) - a(x)f_p(x) - a(x)h(x) = b(x) - a(x)\underbrace{(f_p(x) + h(x))}_{=f(x)}$

  Donc, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ et f est une solution de (E).

<u>*Preuve :*</u> proposition 6

Soit (E) : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ avec a, b, c et d des fonctions continues sur I.

- Soit f_0 une solution de (E).
  Montrons que $\{f_0 + h, h \text{ solution de } (E_h)\} \subset \mathcal{S}_{(E)}$

  Soit $h \in \mathcal{S}_{(E_h)}$ et $f = f_0 + h$.

  * h est deux dérivable sur I et $\forall x \in I$, $a(x)h''(x) + b(x)h'(x) + c(x)h(x) = 0$.

  * f_0 est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in I$, $a(x)f_0''(x) + b(x)f_0'(x) + c(x)f_0(x) = d(x)$.

  Alors f est deux fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

  $$\begin{aligned} a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) &= a(x)\underbrace{(f_0(x) + h(x))''}_{=f_0''(x)+h''(x)} + b(x)\underbrace{(f_0(x) + h(x))'}_{=f_0'(x)+h'(x)} + c(x)\,(f_0(x) + h(x)) \\ &= \underbrace{a(x)f_0''(x) + b(x)f_0'(x) + c(x)f_0(x)}_{=d(x)} + \underbrace{a(x)h''(x) + b(x)h'(x) + c(x)h(x)}_{=0} = d(x). \end{aligned}$$

  Donc $f \in \mathcal{S}_{(E)}$.

- Montrons que $\mathcal{S}_{(E)} \subset \{f_0 + h, h \text{ solution de } (E_h)\}$

Soit $f \in \mathcal{S}_{(E)}$ et $h \in \mathcal{S}_{(E_h)}$. On considère alors la fonction $f_0 = f - h$.

f et h sont deux fois dérivables sur I, donc f_0 est deux fois dérivables sur I.

Et $\forall x \in I$, $a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) = d(x)$ et $a(x)h''(x) + b(x)h'(x) + c(x)h(x) = 0$.
Donc,
$a(x)\underbrace{\left(f''(x) - h''(x)\right)}_{=f_0''(x)} + b(x)\underbrace{\left(f'(x) - h'(x)\right)}_{=f_0'(x)} + c(x)\underbrace{\left(f(x) - h(x)\right)}_{=f_0(x)} = d(x) - 0 = d(x)$.

Donc $a(x)f_0''(x) + b(x)f_0'(x) + c(x)f_0(x) = d(x)$ et f_0 est une solution de (E).

Donc $f = f_0 + h$ et $f \in \{f_0 + h, h \text{ solution de } (E_h)\}$

Preuve : proposition 7
Soit φ_r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_r(x) = e^{rx}$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_r'(x) = re^{rx}$ et $\varphi_r''(x) = r^2e^{rx}$, donc

$a\varphi_r''(x) + b\varphi_r'(x) + c\varphi_r(x) = ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = \left(ar^2 + br + c\right)e^{rx}$.

Donc,

$$\begin{aligned}
\varphi_r \text{ est solution de } (E_h) &\text{ ssi } \forall x \in \mathbb{R},\ a\varphi_r''(x) + b\varphi_r'(x) + c\varphi_r(x) = 0\\
&\text{ ssi } \forall x \in \mathbb{R},\ \left(ar^2 + br + c\right)\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} = 0\\
&\text{ ssi } ar^2 + br + c = 0
\end{aligned}$$

Preuve : (en deuxième lecture) proposition 8

- remarque : Si r est une solution de l'équation caractéristique, alors φ_r est une solution de (E_h) et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\varphi_r$ est aussi une solution de (E_h). En effet,
  si on pose $g = \lambda\varphi_r$, $g' = \lambda\varphi_r'$ et $g'' = \lambda\varphi_r''$ et donc :
  $ag'' + bg' + cg = a\lambda\varphi_r'' + b\lambda\varphi_r' + c\lambda\varphi_r = \lambda\underbrace{\left(a\varphi_r'' + b\varphi_r' + c\varphi_r\right)}_{=0} = 0$.
- On va s'inspirer de la méthode de variation de la constante vu pour les EDL1.
  On cherche une solution de (E_h) sous la forme $f(x) = \lambda(x)e^{rx}$, avec λ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $\forall x \in \mathbb{R}$,
  $f'(x) = \lambda'(x)e^{rx} + r\lambda(x)e^{rx} = \left(\lambda'(x) + r\lambda(x)\right)e^{rx}$
  $f''(x) = \lambda''(x)e^{rx} + r\lambda'(x)e^{rx} + r\lambda'(x)e^{rx} + r^2\lambda(x)e^{rx} = \left(\lambda''(x) + 2r\lambda'(x) + r^2\lambda(x)\right)e^{rx}$.

  Donc,
  $$\begin{aligned}
  af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= a\left(\lambda''(x) + 2r\lambda'(x) + r^2\lambda(x)\right)e^{rx} + b\left(\lambda'(x) + r\lambda(x)\right)e^{rx} + c\lambda e^{rx}\\
  &= \left(a\lambda''(x) + (2ar + b)\lambda'(x) + \underbrace{\left(ar^2 + br + c\right)}_{=0 \text{ car } r \text{ racine de } (E_c)}\right)e^{rx}.
  \end{aligned}$$

  f solution de $(E_h) \Leftrightarrow af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda'$ solution de $ay' + (2ar + b)y = 0$.

  On se place dans le cas complexe, alors (E_c) a soit 2 racines complexes distinctes, soit une racine complexe (double).
- Si (E_c) admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.
  Alors $r_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Donc $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $b = -a\,(r_1 + r_2)$.

D'après le point précédent appliqué avec $r = r_1$,
f est solution de $(E_h) \Leftrightarrow \lambda'$ (dérivée de $\lambda(x) = f(x)e^{-r_1 x}$) est solution de $ay' + \underbrace{(2ar_1 + b)}_{=a(r_1-r_2)\neq 0} y = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \alpha e^{(r_2-r_1)x}\\
&\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2-r_1)x} + \beta\\
&\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda(x)e^{r_1(x)} = \underbrace{\frac{\alpha}{r_2 - r_1}}_{=B} e^{r_2 x} + \underbrace{\beta}_{=A} e^{r_1 x}.
\end{aligned}$$

- Si (E_c) admet une racine complexe double $r_0 = -\dfrac{b}{a}$, ie $2ar_0 + b = 0$.

  On applique le point précédent avec $r = r_0$.

  f est solution de $(E_h) \Leftrightarrow \lambda'$ (dérivée de $\lambda(x) = f(x)e^{-r_0 x}$) est solution de $ay' + \underbrace{(2ar_0 + b)}_{=0} y = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda''(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = A + Bx\\
&\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda(x)e^{r_0 x} = (Ax + B)e^{r_0 x}
\end{aligned}$$

Preuve : (en deuxième lecture) proposition 9

Si on se place dans $\mathbb{R}$, l'équation caractéristique (E_c) peut admettre

- deux racines simples réelles ou une racine double réelle et alors les solutions de (E_h) ont la même forme que dans la cas complexe, avec des coefficients réels (la preuve est identique à la preuve dans le cas complexe).
- deux racines complexes conjuguées distinctes $\alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  Alors, d'après la proposition précédente, il existe C, $D \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(x) = Ce^{(\alpha+i\beta)x} + De^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(Ce^{i\beta x} + De^{-i\beta x}\right)$$

  On obtient :

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(C\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right) + D\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)\right) = e^{\alpha x}\left(\underbrace{(C+D)}_{=A}\cos(\beta x) + \underbrace{i(C-D)}_{=B}\sin(\beta x)\right)$$

  Reste à montrer que $A = C + D$ et $B = i(C - D)$ sont des constantes réelles :

  $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{R}$, donc $f(x) = \overline{f(x)}$.

  Pour $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2\beta}$, on obtient :

  $\begin{cases} C + D = \overline{C} + \overline{D} = \overline{C + D}\\ C - D = -\overline{C} + \overline{D} = -\left(\overline{C - D}\right)\end{cases}$, donc $A = C + D \in \mathbb{R}$ et $C - D \in i\mathbb{R}$, donc $B = i\,(C - D) \in \mathbb{R}$.

Preuve : proposition 10

Soient f_1 une solution de $(E_1) : ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et f_2 une solution de $(E_2) : ay'' + by' + cy = d_2(x)$. Alors f_1 et f_2 sont deux fois dérivables sur I et $\forall x \in I$,

$$af_1''(x) + bf_1'(x) + cf_1(x) = d_1(x) \text{ et } af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x) = d_2(x)$$

Soit $f = f_1 + f_2$, alors f est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in I$,
$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$, $f''(x) = f_1''(x) + f_2''(x)$, donc

$$\begin{aligned} af''(x) + bf'(x) + cf(x) &= a\left(f_1''(x) + f_2''(x)\right) + b\left(f_1'(x) + f_2'(x)\right) + c\left(f_1(x) + f_2(x)\right) \\ &= \underbrace{\left(af_1''(x) + bf_1'(x) + cf_1(x)\right)}_{=d_1(x)} + \underbrace{\left(af_2''(x) + bf_2'(x) + cf_2(x)\right)}_{=d_2(x)} = d(x). \end{aligned}$$

Donc f est solution de $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$.

Annexe-C
Méthode de variations des constantes-Cas des EDL2

Il existe une méthode de variations des constantes, analogue au cas des EDL1, pour déterminer une solution particulière de (E) si le second membre ne fais pas partie des cas traités précédemment.

On sait que les solutions de l'équation homogène (E_h) : $ay'' + by' + cy = 0$ s'écrivent

$$y_h(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x)$$

- Dans $\mathbb{C}$,
  — Si $\Delta \neq 0$, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$
  — Si $\Delta = 0$, $y_1(x) = e^{r_0 x}$ et $y_2(x) = xe^{r_0 x}$
- Dans $\mathbb{R}$,
  — Si $\Delta > 0$, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$
  — Si $\Delta = 0$, $y_1(x) = e^{r_0 x}$ et $y_2(x) = xe^{r_0 x}$
  — Si $\Delta < 0$, $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

On cherche alors y_p sous la forme $y_p(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x)$
où K_1 et K_2 ne sont plus des constantes, mais des fonctions de x.

Alors $y_p'(x) = K_1'(x)y_1(x) + K_1(x)y_1'(x) + K_2'(x)y_2(x) + K_2(x)y_2'(x)$

Lagrange propose d'imposer aux fonctions inconnues une condition supplémentaire :

$$\boxed{K_1'(x)y_1(x) + K_2'(x)y_2(x) = 0}$$

On obtient alors, $y_p'(x) = K_1(x)y_1'(x) + K_2(x)y_2'(x)$

et en dérivant une nouvelle fois, $y_p''(x) = K_1'(x)y_1'(x) + K_1(x)y_1''(x) + K_2'(x)y_2'(x) + K_2(x)y_2''(x)$

y_1 et y_2 sont des solutions de (E_h), donc $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$.

Donc,
y_p solution de (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$ si et seulement si

$$\begin{gathered} a\left(K_1(x)y_1'(x) + K_1(x)y_1''(x) + K_2'(x)y_2'(x) + K_2(x)y_2''(x)\right) + b\left(K_1(x)y_1'(x) + K_2(x)y_2'(x)\right) \\ +c\left(K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x)\right) = d(x) \end{gathered}$$

si et seulement si

$$K_1(x)\underbrace{\left(ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)\right)}_{=0} + aK_1'(x)y_1'(x) + K_2(x)\underbrace{\left(ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)\right)}_{=0} + aK_2'(x)y_2'(x) = d(x)$$

si et seulement si

$$K_1'(x)y_1'(x) + K_2'(x)y_2'(x) = \frac{d(x)}{a}$$

Finalement, on obtient en ajoutant la relation imposée par Lagrange,
y_p est solution de (E) ssi K_1' et K_2' sont solutions de

$$\begin{cases} K_1'y_1 + K_2'y_2 = 0 \\ K_1'y_1' + K_2'y_2' = d(x)/a \end{cases}$$