Chapitre 1
Courbes paramétrées

Objectifs :

- **C3.1** Savoir étudier un point singulier d'une courbe paramétrée.
- **C3.2** Savoir étudier les branches infinies d'une courbe paramétrée.
- **C3.3** Savoir réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée.
- **C3.4** Savoir étudier et tracer une courbe paramétrée.

Table des matières

I Généralités

I.1 Définitions

Définition 1 *: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}^2$.*
On pose

$$f(t) = (x(t); y(t)) \text{ où } x(t) \text{ et } y(t) \in \mathbb{R} \text{ pour tout } t \in I$$

f est appelé arc paramétré ou courbe paramétrée.

L'ensemble $\Gamma = \{f(t), t \in I\}$ est appelé support ou image de l'arc paramétré.

On dit que f est une représentation paramétrique de Γ ou que Γ est paramétrée par f.

Remarque :

- On dit parfois que Γ est la trajectoire de f pour généraliser la situation d'un point mobile dans le plan dont la position au temps t est donnée par $f(t)$.
- En cinématique, $f'(t)$ correspond à la **vitesse** et $f''(t)$ à l'**accélération**.

Exemples : Quelques exemples de courbes paramétrées.

- Les droites : Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A\,(x_A, y_A)$, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors

  $M\,(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \end{array} \right.$

  Donc la droite $\mathcal{D}$ est paramétrée par $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t) = x_A + a \times t, y(t) = y_A + b \times t) \end{array} \right.$

- Les cercles :

  Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O de rayon 1, alors $\mathcal{C}$ est paramétré par $f : \left\{ \begin{array}{l} [\,0, 2\pi\,[\to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t)) \end{array} \right.$

  Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre $\Omega\,(\alpha, \beta)$ et de rayon R.

  $$M(x, y) \in \mathcal{C}' \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \alpha + R\cos(t) \\ y(t) = \beta + R\sin(t) \end{array} \right.$$

Remarque : L'étude et les propriétés d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ se ramène à l'étude de deux fonctions à valeurs réelles.

I.2 Limite d'une fonction vectorielle

Définition 2 *: Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (x(t); y(t))$ et t_0 qui appartient à I ou qui est une borne de l'intervalle I.*
On dit que f tend vers $l = (a; b)$ lorsque t tend vers t_0 si :

$$\lim_{t \to t_0} \|f(t) - l\| = 0$$

c'est à dire : $\lim\limits_{t \to t_0} (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = 0.$

Théorème 1 : Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (x(t); y(t))$, alors

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = l = (a; b) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b \end{cases}$$

Preuve : **en Annexe**

I.3 Dérivée d'une fonction vectorielle

Définition 3 *: Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par*

$$\forall t \in I,\ f(t) = (x(t); y(t))$$

La fonction f est dérivable si ses fonctions composantes x et y le sont.

La dérivée de f est alors définie par :

$$f'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Remarque : On définit de même la dérivabilité à l'ordre k de f et on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable et si sa dérivée $k^{\text{ème}}$ dérivée est continue sur I.
Donc f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si x et y sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II Etude locale

II.1 Définitions

Définition 4 *: Soit (I, f) un arc paramétré.*

- *Un point M est dit simple s'il existe un unique $t \in I$ tel que $M = f(t)$.*
- *L'arc est dit simple si tous les points de son support sont simples.*
- *Un point du support est dit d'ordre n s'il est atteint pour exactement n valeurs de t distinctes.*
  Si $n = 2$: point double
  Si $n = 3$: point triple ...

Proposition 1 : L'arc (I, f) est simple si et seulement si f est injective.

Définition 5 *: Soit (I, f) un arc paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 1$ et soit $t_0 \in I$.*

- *Le point $M(t_0)$ est un point régulier si $f'(t_0) \neq \vec{0}$.*
  L'arc est régulier si tous les points sont réguliers.
- *$M(t_0)$ est un point stationnaire ou singulier si $f'(t_0) = \vec{0}$.*

Remarque : Un point singulier ou stationnaire correspond à un point d'arrêt de la trajectoire.

II.2 Tangente en un point

Définition 6 *: Soient (I, f) un arc paramétré et $t_0 \in I$.*

- *L'arc (I, f) admet une tangente au point $M(t_0)$ si la droite $(M(t)M(t_0))$ admet une position limite quand t tend vers t_0, c'est à dire si l'on peut trouver, au voisinage de t_0, un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ possédant une limite non nulle en t_0.*
- *La droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par cette limite est alors appelée tangente en $M(t_0)$ à l'arc paramétré (I, f).*

Remarque : Cette définition de la tangente impose $M(t) \neq M(t_0)$ pour $t \neq t_0$ (au moins au voisinage de t_0). Cette propriété étant toujours satisfaite en pratique, on la supposera vérifiée par la suite.

Remarque : On parle de demi-tangentes au point $M(t_0)$ si la droite $(M(t)M(t_0))$ admet un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ possédant des limites non nulles à droite et à gauche en t_0.

Les demi-tangentes sont alors les demi-droites d'extrémité $M(t_0)$ et dirigées par ces limites.

Proposition 2 : Soit (I, f) un arc paramétré.

- Si f est dérivable sur I, alors la tangente en un point régulier $M(t_0)$ est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.
- Si f est indéfiniment dérivable et $M(t_0)$ est un point stationnaire, on appelle $f^{(p)}(t_0)$ le premier vecteur dérivée non nul en t_0 (s'il existe), alors la tangente en $M(t_0)$ est dirigée par $f^{(p)}(t_0)$.

Preuve : **en Annexe**

Point méthode : Pour déterminer la tangente en un point.

1. Si le point est régulier, la tangente est dirigée par le vecteur vitesse.
2. Si le point $M(t_0)$ est stationnaire, il y a plusieurs moyens de déterminer la tangente :
   - On cherche le premier vecteur dérivé non nul $\vec{v} = f^{(p)}(t_0)$, alors la tangente est dirigée par $\vec{v}$.
   - On calcule $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$.

     Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = m$, la courbe admet une tangente de pente m.

     Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}\right| = +\infty$, la courbe admet une tangente verticale (parallèle à (Oy)).
   - On calcule $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

     Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = m$, alors la courbe admet une tangente de pente m.

     Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \pm\infty$, alors la courbe admet une tangente verticale (parallèle à (Oy)).

     Si la limite n'existe pas, on ne peut pas conclure.

Remarque : En un point régulier $M(t_0)$, l'équation de la tangente en $M(t_0)$ de l'arc paramétré (I, f) s'exprime par la condition :

$$\overrightarrow{M(t_0)M} \begin{pmatrix} x - x(t_0) \\ y - y(t_0) \end{pmatrix} \text{ et } f'(t_0) \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

soit,

$$(x - x(t_0))\, y'(t_0) - (y - y(t_0))\, x'(t_0) = 0$$

Remarque : Pour préciser la position d'une courbe par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$ en $M(t_0)$:

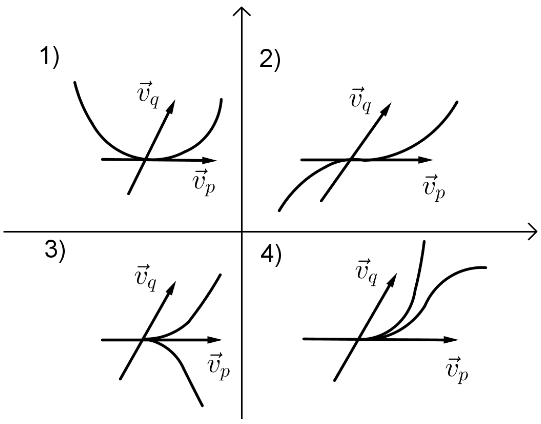
- Si $\mathcal{T}$ est oblique ou horizontale de pente $m \in \mathbb{R}$, on étudie le signe de $y(t) - y(t_0) - m(x(t) - x(t_0))$ au voisinage de t_0.
- Si $\mathcal{T}$ est verticale, on étudie les variations de x au voisinage de t_0.

II.3 Allure de la courbe

Soient (I, f) un arc paramétré et $M(t_0)$ un point de cet arc.
On suppose que $\vec{v}_p = f^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé non nul en t_0 et $\vec{v}_q = f^{(q)}(t_0)$ $(q > p)$ le premier vecteur dérivé non colinéaire à $\vec{v}_p$.

(p, q) sont les entiers caractéristiques de l'arc paramétré.

1. **Disposition ordinaire** : p impair et q pair.
2. **Point d'inflexion géométrique** : p et q impairs.
3. **Point de rebroussement** : p pair et q impair.
4. **Point de rebroussement de deuxième espèce** : p et q pairs.



Remarque :

- Le cas 1. correspond au cas du point birégulier ($p = 1$, $q = 2$ - cas le plus fréquent) ou le cas d'un point $p = 3$ et $q = 4$ appelé méplat. La courbe est alors plus "écrasée" au niveau de sa tangente.
- Dans les cas 1. et 2., les points peuvent être réguliers ($p = 1$), mais dans les cas 3. et 4., les points sont nécessairement stationnaires.
- Une courbe "classique" $y = f(x)$ n'ayant jamais de point stationnaire, elle n'a jamais de point de rebroussement.

III Branches infinies

On considère :

- (I, f) un arc paramétré, avec $f(t) = (x(t), y(t))$.
- t_0 est une extrémité de I n'appartenant pas à I (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).

Définition 7 *: L'arc (I, f) admet une* $\boxed{\textit{branche infinie}}$ *en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.*

Remarque : :

- Si $\lim_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ ou $\lim_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$, alors l'arc paramétré (I, f) admet évidemment une branche infinie en t_0.
- Toutefois l'arc (I, f) peut admettre une branche infinie en t_0, sans que l'on ait $\lim_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ ou $\lim_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$, comme par exemple : $(x(t) = t\cos t, y(t) = t\sin t)$, avec $t_0 = +\infty$.

III.1 Asymptotes

On suppose que l'arc (I, f) admet une branche infinie en t_0.

Définition 8 *: On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est asymptote à l'arc (I, f) en t_0 si $\lim_{t \to t_0} d(M(t), \mathcal{D}) = 0$.*

Proposition 3 *:* L'arc (I, f) admet la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ comme asymptote en t_0 ssi on a :

$$\lim_{t \to t_0} ax(t) + by(t) + c = 0$$

Preuve : Conséquence de l'égalité $d(M(t), \mathcal{D}) = \dfrac{|ax(t) + by(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemples :

1) Si (I, f) est un arc paramétré tel que $\lim_{t \to t_0} |x(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à l'arc (I, f) en t_0, la position de l'arc par rapport à l'asymptote étant donnée par le signe de $y(t) - y_0$.

2) Si (I, f) est un arc paramétré tel que $\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \to t_0} |y(t)| = +\infty$, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à l'arc (I, f) en t_0, la position de l'arc par rapport à l'asymptote étant donnée par le signe de $x(t) - x_0$.

3) Dans le cas général d'une asymptote d'équation $ax + by + c = 0$, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $ax(t) + by(t) + c$.

III.2 Méthode de recherche d'une asymptote

1. Si une seule des coordonnées tend vers l'infini en t_0 :

   - Si x tend vers l'infini et y vers y_0, l'arc admet une asymptote parallèle à (Ox).
     La position de la courbe par rapport à l'asymptote est alors donnée par les variations de y qui indiquent le signe de $y - y_0$.

   - Si y tend vers l'infini et x tend vers x_0, l'arc admet une asymptote parallèle à (Oy).
     La position de la courbe par rapport à l'asymptote est alors donnée par les variations de x.

2. Si les deux coordonnées tendent vers l'infini en t_0 :
   Comme x tend vers l'infini, l'arc ne peut pas admettre une asymptote verticale, donc elle admet une équation du type $y = ax + b$.
   D'après la proposition 4.3, on a : $y(t) = ax(t) + b + \epsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to t_0} \epsilon(t) = 0$.
   On a ainsi :
   - $\dfrac{y(t)}{x(t)} = a + \dfrac{b}{x(t)} + \dfrac{\epsilon(t)}{x(t)}$ et donc $a = \lim\limits_{tt_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.
   - $b = \lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - ax(t))$.

   S'il existe une asymptote en t_0, celle-ci est donc unique.

   Pour commencer à étudier une asymptote, on commence par $\boxed{\text{étudier } \dfrac{y(t)}{x(t)}}$.

   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}$: D'après ce qui précède, une asymptote éventuelle ne peut être que parallèle à la droite d'équation $y = ax$. On dit que la courbe admet cette droite pour $\boxed{\text{direction asymptotique}}$.

     * Lorsque $a = 0$, comme y tend vers l'infini, il ne peut pas y avoir d'asymptote. Il s'agit d'$\boxed{\text{une branche parabolique de direction asymptotique } Ox}$.

     * Lorsque $a \neq 0$:

       — Si $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - ax(t) = b$, la courbe admet comme asymptote $\boxed{\text{la droite}}$ d'équation $y = ax + b$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$.

       — Si $\lim\limits_{t \to t_0} |y(t) - ax(t)| = +\infty$, il y a $\boxed{\text{une branche parabolique de pente } a}$.

       — Dans les autres cas (rares en pratique), il n'y a ni asymptote, ni branche parabolique.

   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| = +\infty$: Il n'y a pas d'asymptote,
     il s'agit d' $\boxed{\text{une branche parabolique de direction asymptotique } Oy}$.

   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right|$ n'existe pas : Il n'y a pas de direction asymptotique et donc pas d'asymptote.

IV Tracé des courbes paramétrées

Γ désigne une courbe paramétrée donnée par une application f de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^2$, où $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, les coordonnées du point courant $M(t)$ étant $(x(t), y(t))$.

IV.1 Réduction du domaine

Réduction du domaine de description totale

Il est parfois possible de tracer tout le support d'une courbe paramétrée sans faire varier le paramètre sur la totalité du domaine $\mathcal{D}$ où f est définie.

Exemple : Soit Γ la courbe paramétrée f

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- Comme $f(t+2\pi) = f(t)$, la courbe est entièrement décrite dans un intervalle I d'amplitude 2π et il suffit de tracer la courbe avec $t \in [a, a+2\pi]$.
- Comme $f(\pi - t) = f(t)$, les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont identiques et si l'on prend a tel que l'intervalle $[a, a+2\pi]$ soit symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$, ie $a = -\frac{\pi}{2}$, on voit que le support est égale au support de : $(x = \cos 2t, y = \sin 3t)$ avec $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Réduction du domaine d'étude

- Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, et $\varphi(t) = t + A$ $(A > 0)$: On peut choisir un intervalle d'amplitude A.
- Si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et $\varphi(t) = -t$: On peut réduire l'intervalle d'étude à $\mathcal{D} \cap [\,0, +\infty\,[$.
- Si $\mathcal{D} = [a, b]$ et $\varphi(t) = a + b - t$: On peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.
- Si $\mathcal{D} = \,]\,0, +\infty\,[$ et $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, on peut réduire l'intervalle d'étude à $]\,0, 1\,]$.

Certaines propriétés de f correspondent à des invariances du support par symétrie ou translation. Dans ce cas, on trace une partie de la courbe que l'on complète ensuite avec la transformation correspondante.

Si on note φ un changement de paramétrage,

Hypothèses	Isométries
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à O
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Oy)
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à (Ox)
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la première bissectrice
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) + a \\ y(\varphi(t)) = y(t) + b \end{cases}$	Translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dans ces différents cas, on construit la courbe sur l'intervalle réduit, puis on la complète en appliquant au morceau de courbe l'isométrie ci-dessus.

IV.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

- Déterminer le domaine de définition de f, le domaine de description totale.
- Déterminer le domaine d'étude réduit $\mathcal{D}_1$, et décrire les transformations géométriques, permettant de déduire toute la courbe de la partie construite.
- Etudier les variations de x et de y sur $\mathcal{D}_1$ et reproduire ces résultats dans un tableau de variations, en faisant figurer dans ce tableau les limites de x et de y aux bornes des intervalles d'étude.
- Etudier la forme de la courbe au voisinage des points stationnaires.
- Etudier les branches infinies et déterminer les asymptotes éventuelles ainsi que leurs positions par rapport à la courbe.
- Tracer l'allure de la courbe en utilisant les résultats précédents : tangentes parallèles aux axes, points stationnaires, branches infinies, évolution du point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathcal{D}_1$, translations et symétries.

Annexe-A

Démonstrations

Preuve : théorème 1 ($\Leftarrow$) Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b$, alors

$$\lim_{t \to t_0} x(t) - a = 0 \text{ et } \lim_{t \to t_0} y(t) - b = 0$$

Donc $\lim\limits_{t \to t_0} (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = 0^2 + 0^2 = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (a; b)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (a; b)$, donc $\lim\limits_{t \to t_0} (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 = 0$.

Comme $(x(t) - a)^2$ et $(y(t) - b)^2$ sont positifs ou nuls, donc $\lim\limits_{t \to t_0} (x(t) - a)^2 = 0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - b)^2 = 0$

Soit $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b$.

Preuve : proposition 2

- La tangente en $M(t_0) = M_0$ est dirigée par la limite du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|}$ quand $M \to M_0$.

  Or, $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|}$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|}\begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \frac{t - t_0}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|}\begin{pmatrix} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{t - t_0}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|} = \frac{t - t_0}{\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}}$$

  Le point est régulier, donc $f'(t_0) \neq \vec{0}$ et donc $\|f'(t_0)\| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \neq 0$.

  Donc $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{t - t_0}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|} = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}$.

  Par suite, $$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{M_0M}\right\|}\begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ \\ y'(t_0) \end{pmatrix}}_{\text{vecteur colinéaire à } f'(t_0)}.$$

- Soit p tel que $f^{(p)}(t_0)$ soit la première dérivée non nulle.

  Le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}$.

On applique la formule de Taylor-Young aux fonctions x et y :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=x\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right) x'\left(t_0\right)+\dfrac{\left(t-t_0\right)^2}{2!} x^{(2)}\left(t_0\right)+\ldots+\dfrac{\left(t-t_0\right)^p}{p!} x^{(p)}\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right)^p \epsilon_1(t) \\ y(t)=y\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right) y'\left(t_0\right)+\dfrac{\left(t-t_0\right)^2}{2!} y^{(2)}\left(t_0\right)+\ldots+\dfrac{\left(t-t_0\right)^p}{p!} y^{(p)}\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right)^p \epsilon_2(t) \end{array}\right.$$

avec $\lim\limits_{t \rightarrow t_0} \epsilon_1(t)=\lim\limits_{t \rightarrow t_0} \epsilon_2(t)=0$.
Or, $x'\left(t_0\right)=x^{(2)}\left(t_0\right)=\ldots=x^{(p-1)}\left(t_0\right)=0$ et $y'\left(t_0\right)=y^{(2)}\left(t_0\right)=\ldots=y^{(p-1)}\left(t_0\right)=0$
Donc, $\overrightarrow{M_0 M}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\left(t-t_0\right)^p}{p!} x^{(p)}\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right)^p \epsilon_1(t) \\ \dfrac{\left(t-t_0\right)^p}{p!} y^{(p)}\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right)^p \epsilon_2(t) \end{pmatrix}$$

Donc $\dfrac{\overrightarrow{M_0 M}}{\left\|\overrightarrow{M_0 M}\right\|}$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{\left|t-t_0\right|^p \sqrt{\left(\frac{x^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}+\epsilon_1(t)\right)^2+\left(\frac{y^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}+\epsilon_2(t)\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\left(t-t_0\right)^p}{p!} x^{(p)}\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right)^p \epsilon_1(t) \\ \dfrac{\left(t-t_0\right)^p}{p!} y^{(p)}\left(t_0\right)+\left(t-t_0\right)^p \epsilon_2(t) \end{pmatrix}$$

Soit,

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{x^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}+\epsilon_1(t)\right)^2+\left(\frac{y^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}+\epsilon_2(t)\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{x^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}+\epsilon_1(t) \\ \dfrac{y^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}+\epsilon_2(t) \end{pmatrix}$$

Par suite, $\lim\limits_{t \rightarrow t_0} \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{M_0 M}\right\|}\begin{pmatrix} x(t)-x\left(t_0\right) \\ y(t)-y\left(t_0\right) \end{pmatrix}=\underbrace{\dfrac{\pm 1}{p!\sqrt{\left(\frac{x^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}\right)^2+\left(\frac{y^{(p)}\left(t_0\right)}{p!}\right)^2}}\begin{pmatrix} x^{(p)}\left(t_0\right) \\ y^{(p)}\left(t_0\right) \end{pmatrix}}_{\text{vecteur colinéaire à } f^{(p)}\left(t_0\right)}$