ED : Probabilités

Exercice n°1 : Une machine fabrique 2000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défaut a et b.

- 15% des pièces présentent le défaut a.
- 7% des pièces présentent le défauts b.
- 4% des pièces présentent les deux défauts et sont mis au rebut.
- 95% des pièces, qui présentent un seul défaut, peuvent être réparées et les autres sont mises au rebut.

On considère les événements suivants :

- A : "La pièce présente le défaut a".
- B : "La pièce présente le défaut b".
- C : "La pièce est acceptée, directement ou après réparation".

On prélève une pièce au hasard dans la production de la journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisie.

Calculer les probabilités suivantes :

1. probabilité que la pièce présente un seul défaut.
2. probabilité que la pièce ne présente aucun défaut.
3. probabilité que la pièce soit acceptée, directement ou après réparation.

Exercice n°2 : Dans un atelier de coupe, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces qui sont ensuite stockées sans distinction de provenance.

- La machine M_1 découpe 70% des pièces et 3% de ces pièces sont défectueuses.
- La machine M_2 découpe les 30% restant et 5% de ces pièces sont défectueuses.

On note

- E_1 l'événement "la pièce a été découpée par la machine M_1".
- E_2 l'événement "la pièce a été découpée par la machine M_2.
- D l'événement "la pièce est défectueuse".

On prélève au hasard une pièce dans la production totale. Calculer les probabilités suivantes :

1. $p(E_1 \cap D)$
2. $p(E_2 \cap D)$
3. $p(D)$
4. $p_D(E_1)$
5. $p_D(E_2)$

Exercice n°3 : On considère A et B deux événements.
On sait que $p(A) = \dfrac{1}{3}$ et $p(A \cup B) = \dfrac{1}{2}$.
Calculer $p(B)$ dans les trois cas suivants :

1. A et B sont indépendants.
2. A et B sont incompatibles.
3. A est une partie de B.

Exercice n°4 : Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces P_1 et P_2. On note :

- A l'événement "la pièce, choisie au hasard dans la production des pièces P_1, est défectueuse".
- B l'événement "la pièce, choisie au hasard dans la production des pièces P_2, est défectueuse".

On admet que les probabilités des événements A et B sont : $p(A) = 0,04$ et $p(B) = 0,06$ et on suppose que les deux événements sont indépendants.
Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

1. "Les deux pièces du modules sont défectueuses".
2. "Au moins une des deux pièces du module est défectueuse".
3. "Aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse".

Exercice n°5 : Un atelier produit un composant optique en deux phases indépendantes. La première est susceptible de faire apparaître un défaut α sur 2% des composants, la seconde un défaut β sur 5% des composants.
On prélève un composant au hasard dans la production. On appelle :

- A l'événement "le composant présente le défaut α".
- B l'événement "le composant présente le défaut β".

Calculer, à 10^{-4} près, les probabilités des événements suivants :

1. le composant présente les deux défauts.
2. le composant ne présente aucun des deux défauts.
3. le composant présente au moins un des deux défauts.
4. le composant présente un et un seul des deux défauts.

Exercice n°6 : Une usine produit des règles en grande quantité. La probabilité qu'une règle présente un défaut est égale à $0,1$. On prélève au hasard un échantillon de 8 règles dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de règles présentant un défaut parmi les 8 règles prélevées.

1. Préciser la loi suivie par X, ainsi que ces paramètres. On justifiera la réponse.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) A : "Il n'y a aucune règle avec un défaut".
   (b) B : "Il y a au moins une règle avec un défaut".
   (c) C : "Il y a exactement deux règles avec un défaut".
   (d) D : "Il y a au moins trois règles avec un défaut".
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.

Exercice n°7 : Dans une entreprise, un contrôle qualité a montré que 30% des pièces produites sont défectueuses. On prend au hasard 50 pièces dans le stock de pièces. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses.

1. Déterminer la loi suivie par X. On justifiera la réponse.
2. Quelle est la probabilité que 25 pièces exactement soient défectueuses ?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins 15 pièces soient défectueuses ?
4. A combien de pièces défectueuses doit-on s'attendre ?

Exercice n°8 : Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes suit une loi de Poisson de paramètre $3,87$.

1. Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.
2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 ou 4 désintégrations durant un intervalle de temps de $7,5$ secondes ?

Exercice n°9 : Dans ce service, à l'ouverture, 6 guichets sont ouverts. Il faut en moyenne 5 minutes à une personne travaillant derrière un guichet pour traiter un client.
On suppose que dans ce service, il arrive en moyenne une personne toutes les minutes, et que les arrivées sont indépendantes.

1. J'arrive dans ce service 5 minutes après l'ouverture. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de clients arrivés avant moi. On admet que X suit une loi de Poisson.
   (a) Donner le paramètre de la loi.
   (b) Quelle est la probabilité que 4 guichets soient occupés lorsque j'arrive ?
   (c) Quelle est la probabilité que je n'attende pas ?
   (d) Quelle est la probabilité que tous les guichets soient occupés ?
   (e) Quelle est la probabilité que j'attende moins de dix minutes ?
2. Une personne arrive dans le service 5 minutes après l'ouverture. Combien doit-on ouvrir de guichet pour que la probabilité qu'elle attende soit inférieure à 5% ?
3. On se rend compte qu'un certain jour de la semaine, la fréquence d'arrivée des clients double par rapport aux autres jours. Si une personne arrive dans le service 5 minutes après l'ouverture, combien devrait-on alors ouvrir de guichet pour quela probabilité qu'elle attende soit inférieure à 5% ?

Exercice n°10 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[1;7]$.

1. Représenter la densité de probabilité de X
2. Calculer les porbabilités suivantes

   (a) $p\,(4 \leq X \leq 5)$ (b) $p\,(X = 2)$ (c) $p\,(X > 3)$

Exercice n°11 : Antoine arrive à l'arrêt de bus sans avoir consulté les horaires. Sur cette ligne, un bus part toutes les huit minutes.
On note X la variable aléatoire donnant, en minutes, le temps d'attente d'Antoine jusqu'u départ du bus.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité qu'Antoine attende
   (a) moins de deux minutes.
   (b) entre trois et six minutes.
   (c) plus de cinq minutes, sachant qu'il a déjà attendu deux minutes.

<u>Exercice n°12</u> : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. On note f la densité de probabilité de X.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-4;4]$.
2. Hachurer sur cette représentation, les régions dont l'aire correspond à

   (a) $p(X \leq -2)$ (b) $p(-1 \leq X \leq 1,)$ (c) $p(X \geq 2,5)$

<u>Exercice n°13</u> : Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. En utilisant le fait que $p(X \leq 1) \simeq 0,841$, déterminer sans calculatrice

1. $p(X < 1)$ 2. $p(X \geq 1)$ 3. $p(X \leq -1)$ 4. $p(0 \leq X \leq 1)$

<u>Exercice n°14</u> : Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Calculer les probabilités

1. $p(X \leq 1,35)$
2. $p(X < -0,76)$
3. $p(X > 1,78)$
4. $p(X \geq -2,13)$
5. $p(-0,5 < X < 1)$
6. $p(-1,5 \leq X \leq 0,75)$

<u>Exercice n°15</u> : Une machine fabrique en grande série des pièces d'acier. Soit X la variable aléatoire qui, à toute pièce choisie au hasard dans la production hebdomadaire, associe sa longueur en cm. On admet que X suit une loi normale $\mathcal{N}(10;0,0004)$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

   (a) $p(X \leq 10,03)$ (b) $p(X \leq 9,972)$ (c) $p(9,972 \leq X \leq 10,03)$

2. Déterminer le nombre réel positif a tel que $p(10-a \leq X \leq 10+a) = 0,8$.

<u>Exercice n°16</u> : La durée de vie, exprimée en mois d'un ordinateur portable est assimilée à une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Une étude statistique permet d'estimer que l'espérance de vie d'un ordinateur est de 5 ans. En déduire la valeur du paramètre λ.
2. Calculer $p(X > 30)$.
3. Calculer $p(X > 45)$.
4. Calculer la probabilité qu'un ordinateur portable fonctionne plus de 45 mois sachant qu'il a déjà fonctionné 30 mois.

<u>Exercice n°17</u> : On considère des composants d'un certain type. On admet que la variable aléatoire T, qui associe à tout composant tiré au hasard dans la production sa durée de vie, exprimée en jours, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$.

1. Déterminer la probabilité que l'un de ces composants ait une durée de vie supérieure à 2000 jours. Donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}.
2. Déterminer la $MTBF$ et l'écart-type de T.
3. Déterminer la valeur de t_0, arrondie à 1 jour, pour laquelle $p(T \leq t_0) = 0,5$.
4. Déterminer la valeur de t_1, arrondie à 1 jour, telle que 70% des composants fonctionnent encore après t_1.
5. Déterminer la valeur de t_2, arrondie à 1 jour, telle que 90% des composants ont arrêté de fonctionner à la date t_2.