

Contact unilatéral entre solides élastiques*

L. CHAMPANEY

Résumé

Ce cours sur le contact entre solides présente les formulations classiques employées pour la description des conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement. Il se restreint aux cas du contact entre solides élastiques mais les conditions établies restent applicables dans des situations plus complexes de contact. Les méthodes de résolution les plus courantes sont présentées.

Sommaire			
1 Introduction	2	4 Frottement	9
1.1 Non-linéarités	2	4.1 Lois de frottement	10
1.2 Problème	2	4.2 Loi de Coulomb en quasi- statique	13
1.3 Notations	3	4.3 Problème de point fixe	14
2 Contact unilatéral sans frotte- ment	3	4.4 Forme incrémentale de la loi de Coulomb	14
2.1 Problème local	3	4.5 Méthode des statuts	15
2.2 Formulation variationnelle . . .	4	5 Problèmes d'existence et d'uni- cité	15
2.3 Théorème de l'énergie	5	6 Analogie avec la plasticité	15
2.4 Prise en compte des jeux initiaux	5	7 Éléments de contact	16
3 Résolution des problèmes de contact	6	8 Condensation statique - Sous- structuration	16
3.1 Discrétisation	6	8.1 Buts	16
3.2 Méthodes de projection	7	8.2 Condensation	16
3.3 Méthode des statuts	8	8.3 Sous-structuration	18
3.4 Autres méthodes	9	9 Problèmes plus complexes	18
3.5 Graphe de la loi de contact . .	9		
3.6 Régularisation	9		

*Notes du cours "Éléments Finis" du DESS Dynamique des Structures Modernes dans leur Environnement

1 Introduction

1.1 Non-linéarités

Dans les problèmes de mécanique des solides et des structures, il existe trois formes de non-linéarité :

- Les non-linéarités de type *comportement* qui portent sur la loi de comportement du matériau : plasticité, endommagement, ...
- Les non-linéarités de type *géométrique* qui sont prises en compte dans le cas de grandes déformations ou de grand déplacements (lorsque la configuration déformée ne peut plus être confondue avec la configuration non déformée).
- Les non-linéarités de type *contact* associées au fait que dans un contact parfait entre deux solides du décollement ou du glissement peut apparaître. Elles se séparent en deux catégories, les non-linéarités de *contact unilatéral* et celles de *frottement*.

Les non-linéarités de type contact sont parmi les plus difficiles à traiter car elles mettent en jeu des changements brusques de comportement (au passage contact-décollement et au passage adhérence-glisement).

1.2 Problème

On considère deux solides élastiques Ω_1 et Ω_2 . On note $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ l'ensemble des deux corps. Ils sont soumis à des déplacements imposés \vec{u}_d sur la zone $S_u = S_{u_1} \cup S_{u_2}$, à des efforts imposés \vec{F}_d sur la zone $S_F = S_{F_1} \cup S_{F_2}$ et à des forces de volume \vec{f}_d agissant sur les deux domaines.

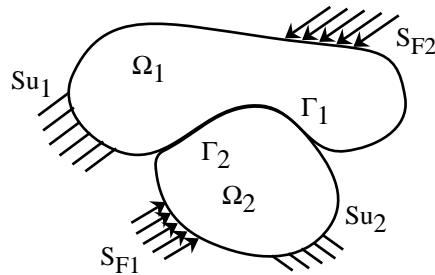


FIG. 1 – *Problème de contact unilatéral*

Les deux solides sont en contact sur une zone $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ supposée connue. Les équations classiques du problème d'élasticité posé sont les suivantes :

$$\overrightarrow{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f}_d = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \vec{n} = \vec{F}_d \quad \text{sur } S_F \quad (2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{sur } S_u \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{A} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega \quad (4)$$

Les équations supplémentaires qui définissent l'interaction entre les deux corps sur la zone de contact sont définies dans le paragraphe suivant.

1.3 Notations

On partitionne le champ solution \vec{u} en \vec{u}_1 dans Ω_1 et \vec{u}_2 dans Ω_2 . Il en va de même pour le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

On note \vec{n}_1 la normale sortante de Ω_1 et \vec{n}_2 celle de Ω_2 . Sur la zone de contact, lorsque les deux corps sont initialement en contact, les deux normales coïncident ($\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$). Pour simplifier, on considère seulement la normale $\vec{n} = \vec{n}_1$.

Relativement à ces normales, on note les efforts normaux :

$$\begin{aligned} F_{n_1} &= \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 \\ F_{n_2} &= \vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 \end{aligned}$$

et les efforts tangentiels :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{t_1} &= \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 - F_{n_1} \vec{n} \\ \vec{F}_{t_2} &= \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 - F_{n_2} \vec{n} \end{aligned}$$

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème de contact unilatéral et celles dans le plan tangent au problème de frottement. Pour étudier l'interaction dans la direction normale on d'abord s'intéresse au cas du contact unilatéral sans frottement.

2 Contact unilatéral sans frottement

Le contact unilatéral est la relation qui existe, sur la zone de contact, entre les efforts normaux (*pressions de contact*) et le mouvement relatif des deux corps dans la direction normale (*décollement*).

2.1 Problème local

Sur l'interface Γ , les conditions de contact unilatéral sans frottement s'écrivent :

$$(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \geq 0 \tag{5}$$

$$F_n = F_{n_1} = -F_{n_2} \leq 0 \tag{6}$$

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{t_1} = -\vec{F}_{t_2} = 0 \tag{7}$$

$$((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}) F_n = 0 \tag{8}$$

L'équation (5) indique qu'il ne peut y avoir que décollement et non pénétration. L'équation (6) indique que les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression. L'équation (7) indique l'absence de forces tangentielles de frottement. Pour finir, l'équation (8), appelée *condition de complémentarité*, indique qu'en un point il y soit contact, soit décollement.

2.2 Formulation variationnelle

On définit l'espace des champ cinématiquement admissibles :

$$U_{ad} = \{\vec{v}, \text{régulier} / \vec{v} = \vec{u}_d \text{ sur } S_u\}$$

On définit le convexe fermé K , sous ensemble de U_{ad} , des champs vérifiant les conditions de décollement sur l'interface de contact.

$$K = \{\vec{v} \in U_{ad} / (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

La formulation variationnelle en déplacement du problème s'écrit alors : la solution \vec{u} est telle que $\vec{u} \in K$ et $\forall \vec{v} \in K$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \underline{\underline{\sigma}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) d\Omega + \int_{\Omega_2} \underline{\underline{\sigma}}_2 : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{v}_2 - \vec{u}_2) d\Omega = \\ \int_{\Omega_1} \vec{f}_d \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{\Omega_2} \vec{f}_d \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS + \\ \int_{S_{F_1}} \vec{F}_d \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{S_{F_2}} \vec{F}_d \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS + \\ \int_{\Gamma_1} \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS \end{aligned}$$

qu'on peut compacter sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{v} - \vec{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f}_d \cdot (\vec{v} - \vec{u}) dS + \int_{S_F} \vec{F}_d \cdot (\vec{v} - \vec{u}) dS + \\ \int_{\Gamma_1} \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS \end{aligned}$$

avec les notations habituelles, on obtient :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} \underline{\underline{\sigma}}_1 \vec{n}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) dS + \int_{\Gamma_2} \underline{\underline{\sigma}}_2 \vec{n}_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) dS$$

Les efforts tangentiels étant nul (eq 7) on obtient :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} F_{n_1} (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Gamma_2} F_{n_2} (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \cdot \vec{n} dS$$

et les efforts normaux en équilibre (eq 6) :

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} F_n (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Gamma_2} F_n (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \cdot \vec{n} dS$$

Soit

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) = \int_{\Gamma_1} F_n (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Gamma_2} F_n (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} dS$$

La condition de complémentarité (eq 8) annule le premier terme du second membre. Or $F_n \leq 0$ et $\vec{v} \in K$ donc :

$$\int_{\Gamma_2} F_n(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \vec{n} \, dS \leq 0$$

La formulation variationnelle en déplacement devient donc :
la solution \vec{u} est telle que $\vec{u} \in K$ et $\forall \vec{v} \in K$:

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) - l(\vec{v} - \vec{u}) \geq 0 \quad (9)$$

Nous sommes en présence d'une inéquation variationnelle [2] qui traduit l'aspect unilatéral du problème.

2.3 Théorème de l'énergie

On peut montrer, voir [2], qu'il existe un théorème de l'énergie potentielle associé à l'inéquation variationnelle 9 :

la solution \vec{u} est telle que $\vec{u} \in K$ et minimise l'énergie potentielle :

$$\vec{v} \in K \longrightarrow E_c(\vec{v}) = \frac{1}{2} a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v})$$

Il s'agit là d'un problème de *minimisation sous contraintes* (d'inégalité). Il s'apparente à un *problème d'optimisation* et les méthodes de résolution utilisées pour le résoudre sont pour la plupart issues des méthodes d'optimisation.

2.4 Prise en compte des jeux initiaux

Lorsque les deux corps ne sont initialement pas en contact sur la zone Γ , il faut prendre en compte un *jeu* initial dans les équations de contact du paragraphe 2.1 (Figure 2).

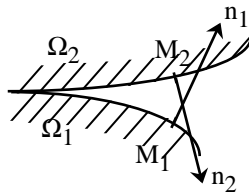


FIG. 2 – *Jeu initial*

Deux problèmes se posent alors :

- Le jeu se doit d'être petit de manière à ce que les hypothèses du problème (petites perturbations, ...) soient respectées.
- Les normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont bien souvent différentes (Figure 2). Dans la pratique, le jeu étant petit, les deux normales ne peuvent être très différentes et on choisit la direction de l'une ou de l'autre pour définir la normale \vec{n} utilisée dans les équations de contact. On peut aussi choisir pour \vec{n} une moyenne des deux normales ou bien la direction définie par les deux points de contact au repos (Figure 3).

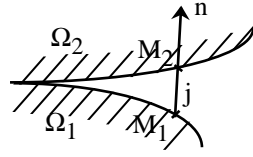


FIG. 3 – *Choix de la normale et du jeu*

Lorsque les deux points précédents sont respectés, les équations du contact deviennent :

$$(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} \geq j \quad (10)$$

$$F_n = F_{n_1} = -F_{n_2} \leq 0 \quad (11)$$

$$\vec{F}_t = F_{t_1} = -F_{t_2} = 0 \quad (12)$$

$$((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n} - j) \cdot F_n = 0 \quad (13)$$

où j , est le jeu initial dans la direction de la normale \vec{n} choisie.

3 Résolution des problèmes de contact

3.1 Discrétisation

3.1.1 Discrétisation éléments finis

On utilise une discrétisation de type *éléments finis* du problème [1] :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i = [\varphi]^t [u] \quad \text{et} \quad \vec{v} = [\varphi]^t [v] \quad (14)$$

où $[u]$ et $[v]$ sont les valeurs nodales du déplacement.

3.1.2 Relation de contact discrètes

Les relations de contact (eq 10 à 13) portent maintenant sur les inconnues nodales. Lorsque les maillages des deux corps sont *compatibles* (Figure 4) sur Γ , les conditions de non pénétration sont des relations simples entre les degrés de liberté des nœuds en vis-à-vis.

Par contre, dans la majorité des cas, les maillages en présence sont *incompatibles* (Figure 5) et les relations entre les degrés de liberté sont beaucoup moins simples à écrire.

Par exemple, dans le cas de la figure 6, la relation écrite est de la forme :

$$(\vec{u}_c - \frac{1}{2}(\vec{u}_A + \vec{u}_B)) \cdot \vec{n} \geq 0$$

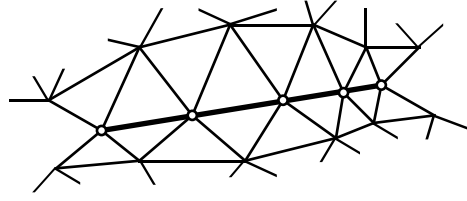


FIG. 4 – Maillages compatibles sur l'interface

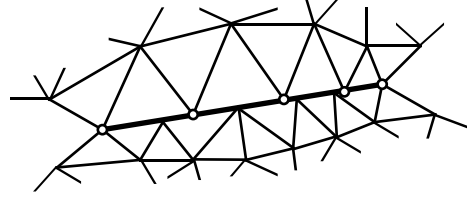


FIG. 5 – Maillages incompatibles sur l'interface

3.1.3 Théorème de l'énergie potentielle

Le théorème de l'énergie potentielle du paragraphe 2.3 devient après discrétisation : La solution $[u]$ est telle que $[u] \in H$ et minimise l'énergie potentielle :

$$E_c([v]) = \frac{1}{2}[v]^t[K][v] - [v]^t[F]$$

parmi tout les vecteurs $[v] \in H$.

Ici, $[K]$ est la matrice de rigidité classique du problème et $[F]$ le vecteur des forces généralisées. H est la forme discrète du convexe K et est définie par :

$$H = \{[v] / [B][v] - [j] \geq 0\}$$

La matrice $[B]$ assure la restriction à la zone de contact et la construction des écarts en déplacement normaux. $[j]$ est le vecteur des jeux éventuels.

La solution discrétisée $[u]$ est alors la solution du système linéaire :

$$[K][u] = [F] \quad \text{sous la condition } [B][u] - [j] \geq 0 \quad (15)$$

3.2 Méthodes de projection

Pour la résolution du problème discret de minimisation sous contraintes défini par l'équation (15), il existe un grand nombre de méthodes. Parmi elles, les méthodes de *projection* forment une classe importante. Elles s'appliquent à toutes les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires : Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, gradient, gradient conjugué, ...

Le fonctionnement de ces méthodes est relativement simple à comprendre et est illustré ci-dessous dans le cas de la méthode du gradient qui devient alors la méthode du *gradient projeté*.

La matrice $[B]$ est tout d'abord diagonalisée par changement de variable (ce qui n'est pas toujours simple à réaliser...). Les conditions unilatérales deviennent :

$$b_{ii}u_i \geq j_i, \quad i = 1, \dots, p$$

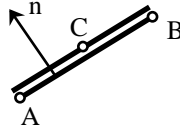


FIG. 6 – Exemple de situation incompatible

L'itération k de la méthode du gradient devient alors :

1. Calcul du nouvel itéré $[u^{k+1}]$:

$$[u^{k+1}] = [u^k] + \mu^k [R^k]$$

avec

$$[R^k] = [F] - [K][u^k] \quad \text{et} \quad \mu^k = \frac{[R^k]^t [R^k]}{[R^k]^t [K] [R^k]}$$

2. Projection sur H :

$$\text{Si } b_{ii} u_i^{k+1} \leq j_i \quad \text{alors} \quad b_{ii} u_i^{k+1} = j_i, \quad i = 1, \dots, p$$

La convergence de ces méthodes est montrée.

3.3 Méthode des statuts

La méthode des status est la plus simple (et la plus facile à comprendre) des méthodes de résolution des problèmes de contact unilatéral sans frottement. L'algorithme itératif est le suivant :

1. La condition d'égalité $[B][u] = [j]$ est imposée (par multiplicateur de Lagrange ou par pénalité).
2. La solution du système $[K][u] = [F]$ est calculée.
3. Les statuts de contact sont vérifiés :
 - Si en un point où la condition est imposée il y a un effort de réaction positif, la condition est supprimée.
 - Si en un point où la condition n'est pas imposée il y a pénétration, la condition est imposée.

Les nouvelles conditions sont imposées.

On boucle sur les étapes 2-3 jusqu'à ce que les mêmes statuts de contact soient obtenus à deux itérations successives.

Dans les cas courants de contact sans frottement, quelques itérations seulement suffisent à atteindre la convergence. Pourtant, la convergence de la méthode n'est montrée que dans le cas où une seule condition est modifiée à chaque itération, et dans ce cas le nombre d'itérations est au plus le nombre de conditions discrètes de contact.

Dans le cas où la zone de contact est maillée avec des éléments trop grands, la méthode peut osciller (faire du *flip-flop*) entre décollement et contact à l'extrémité d'un grand élément. Un raffinement du maillage suffit à corriger le défaut.

Il faut remarquer que cette méthode peut devenir très coûteuse lorsque les problèmes sont de tailles importantes (en nombre de ddl et en nombre de conditions de contact). En effet, de nouvelles conditions en déplacement étant à imposer, il faut procéder à une factorisation de la matrice de raideur globale à chaque itération.

3.4 Autres méthodes

Les méthodes de résolution étant très nombreuses nous citons simplement ici les plus connues :

- méthode des multiplicateurs de Lagrange : le problème unilatéral est reporté sur les efforts par dualisation,
- méthode du Lagrangien augmenté : méthode mixte entre pénalité et multiplicateur de Lagrange,
- méthode Lemke : méthode directe de pivotage où les conditions unilatérales sont prise en compte pendant la factorisation,
- méthodes de programmation mathématique,
- ...

3.5 Graphe de la loi de contact

Les équations du contact unilatéral définies au paragraphe 2.1 peuvent être représentées sous la forme du graphe présenté par la figure 7, en définissant :

$$[u_n] = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}$$

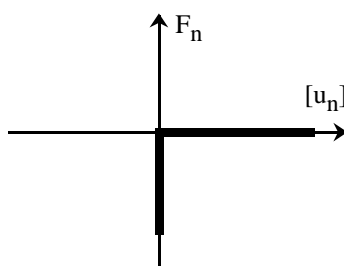


FIG. 7 – Graphe de loi de contact

On se rend facilement compte sur ce graphe de la très forte non linéarité de la loi.

3.6 Régularisation

On rencontrera parfois des formes *régularisées* de la loi de contact — telle que celle présentée sur la figure 8 — qui ont l'avantage de fournir une relation bi-univoque explicite entre la pénétration et la pression de contact. La pénétration que ces lois autorisent est souvent justifiée par un écrasement possible des aspérités. L'identification d'une telle loi à l'aide de mesures physiques est cependant délicate.

4 Frottement

Le frottement est la relation qui existe entre les efforts tangentiels (*forces de frottement*) sur la zone de contact et le mouvement tangential relatif des deux corps (*glissement*).

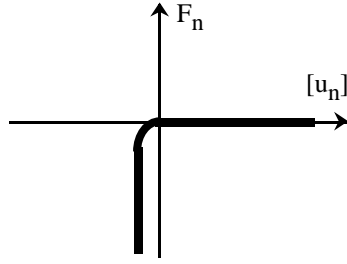


FIG. 8 – Régularisation de loi de contact

4.1 Lois de frottement

Les phénomènes physiques à faire apparaître dans une loi de frottement sont l'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible et une éventuelle dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. Par ailleurs le déplacement de *glissement* semble irréversible ce qui pousse à imaginer, pour les lois de frottement, des relations entre les forces de frottement et la vitesse de glissement.

Bien évidemment, ces lois ne doivent intervenir que lorsqu'il n'y a pas de décollement sur la zone de contact.

Pour définir les lois de frottement, on définit le glissement et la vitesse de glissement par :

$$[\vec{u}_t] = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - ((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (16)$$

$$[\vec{\dot{u}}_t] = \frac{\partial [\vec{u}_t]}{\partial t} \quad (17)$$

4.1.1 Loi de Tresca

La plus simple (en apparence) des lois de frottement est la loi de Tresca qui s'écrit de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Si } \|\vec{F}_t\| < g & \text{alors } [\vec{\dot{u}}_t] = 0 \quad (\text{Adhérence}) \\ \text{Si } \|\vec{F}_t\| = g & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } [\vec{\dot{u}}_t] = \lambda \vec{F}_t \quad (\text{Glissement}) \end{array} \right.$$

où g est un seuil de d'adhérence/glissement fixé a priori. Le graphe de cette loi est tracé sur la figure 9, en posant :

$$[\vec{\dot{u}}_t] = [\dot{u}_t] \frac{[\vec{\dot{u}}_t]}{\|[\vec{\dot{u}}_t]\|} \quad \text{et} \quad \vec{F}_t = F_t \frac{\vec{F}_t}{\|\vec{F}_t\|} \quad (18)$$

4.1.2 Loi de Coulomb

Pour décrire la dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux. On utilise une loi de Tresca dont le seuil g est proportionnel à l'effort normal. C'est la loi de Coulomb (1785) :

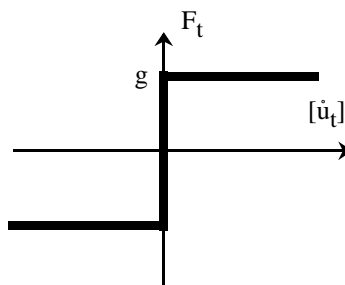


FIG. 9 – Loi de Tresca

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Si } \|\vec{F}_t\| < \mu|F_n| & \text{alors } [\vec{u}_t] = 0 \quad (\text{Adh\u00e9rence}) \\ \text{Si } \|\vec{F}_t\| = \mu|F_n| & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } [\vec{u}_t] = \lambda \vec{F}_t \quad (\text{Glissement}) \end{array} \right.$$

où μ est le *coefficient de frottement* qui d\u00e9pend des mat\u00e9riaux en pr\u00e9sence et des \u00e9tats de surface. Le graphe de cette loi est trac\u00e9 sur la figure 10.

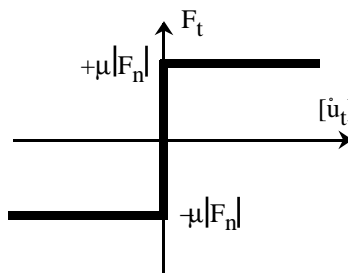


FIG. 10 – Loi de Coulomb

On peut tracer le lieu g\u00e9om\u00e9trique de l'extr\u00e9mit\u00e9 du vecteur force de contact sous forme d'un c\u00f4ne, en 2D (fig. 11) ou en 3D (fig. 12). On l'appelle *c\u00f4ne de Coulomb*. L'enveloppe de ce c\u00f4ne est la surface seuil du glissement dont la d\u00e9finition et l'utilisation est \u00e0 rapprocher de la d\u00e9finition de la surface seuil en plasticit\u00e9.

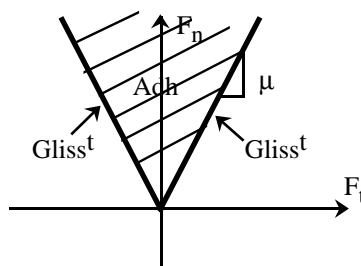


FIG. 11 – C\u00f4ne de Coulomb en 2D

Il est possible de d\u00e9finir du frottement *anisotrope*, c'est \u00e0 dire que le coefficient de frottement d\u00e9pend de la direction de glissement. Une forme simple de frottement anisotrope est celle qui donne au c\u00f4ne de Coulomb une section \u00e9lliptique.

Les inconv\u00e9nients majeurs de la loi de Coulomb sont :

- l'absence de relation biunivoque entre les forces de frottement et la vitesse de glissement,

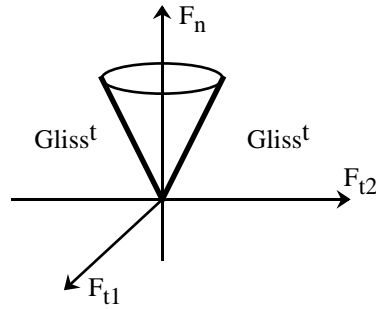


FIG. 12 – Cône de Coulomb en 3D

- le caractère non-différentiable de la loi,
- le changement brutal de comportement au passage adhérence/glisement.

Ces inconvénients sont les mêmes que ceux d'une loi de plasticité parfaite, par exemple.

4.1.3 Lois de Coulomb régularisées

Pour palier à ces défauts de la loi de Coulomb, on utilise souvent des lois *régularisées* qui sont plus douces. La plus couramment rencontrée est celle dont le graphe est tracé sur la figure 13.

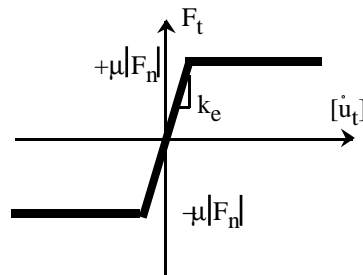


FIG. 13 – Régularisation de la loi de Coulomb

Elle autorise un glissement élastique réversible paramétré par une raideur élastique k_e . Cette raideur, justifiée par certains par une élasticité des aspérités de la zone de contact, est difficile à évaluer. Elle prend souvent une valeur très grande de manière à être proche de la loi de Coulomb. Mais, si k_e est trop grand, des problèmes numériques de conditionnement apparaissent.

Cette loi de Coulomb régularisée garde quand même une relation non biunivoque entre efforts et vitesses lorsqu'il y a glissement irréversible. C'est la loi de frottement par défaut d'ABAQUS [4], par exemple.

4.1.4 Autres lois

Une loi couramment utilisée est la loi de Norton-Hoff qui s'écrit :

$$\vec{F}_t = \mu |F_n| \cdot ||[\vec{u}_t]||^{(\rho-1)} [\vec{u}_t] \quad (19)$$

et dont le graphe est représenté sur la figure 14.

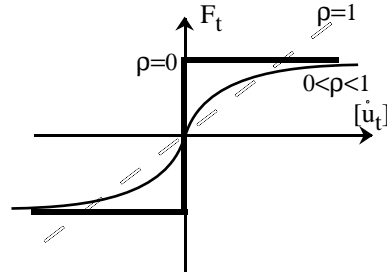


FIG. 14 – Loi de Norton-Hoff

Dans le cas où $\rho = 0$, on retrouve la loi de Coulomb. Lorsque $0 < \rho < 1$, la loi donne une relation biunivoque entre les efforts tangentiels et la vitesse de glissement. Lorsque ρ est faible, elle reste proche de la loi de Coulomb.

4.2 Loi de Coulomb en quasi-statique

Dans le cas de problèmes statiques ou monotones quasi-statiques, la loi de Coulomb peut s'écrire comme une relation entre les forces de frottement et le déplacement de glissement :

$$\begin{cases} \text{Si } \|\vec{F}_t\| < \mu|F_n| & \text{alors } [\vec{u}_t] = 0 & \text{(Adhérence)} \\ \text{Si } \|\vec{F}_t\| = \mu|F_n| & \text{alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } [\vec{u}_t] = \lambda \vec{F}_t & \text{(Glissement)} \end{cases}$$

En fait, la condition à assurer pour obtenir cette formulation est qu'en tout point de la zone de contact la variation des efforts soit monotone. Ainsi, si en aucun point il n'y a de décharge, les formulations en déplacement et en vitesse sont équivalentes. La difficulté est qu'une monotonie du chargement extérieur n'assure par forcément une monotonie des forces de contact.

Dans les cas où cette formulation s'applique, il est possible de construire une inéquation variationnelle du problème, qui s'obtient comme au paragraphe 2.2. Par contre, cette inéquation variationnelle contient des termes non-différentiables [2]. Ainsi, il n'y a pas de théorème de minimum de l'énergie associé à cause de la présence du seuil de glissement dépendant de l'effort normal. Il n'est pas possible d'écrire une énergie uniquement en déplacement.

Par contre, dans le cas de la loi de Tresca, où le seuil est fixé, il existe un théorème de l'énergie potentielle :

La solution \vec{u} est telle que $\vec{u} \in K$ et minimise l'énergie potentielle :

$$\vec{v} \in K \longrightarrow E_c(\vec{v}) = \frac{1}{2}a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v}) + j(\vec{v})$$

où

$$j(\vec{v}) = \int_{\Gamma} g \|[\vec{u}_t]\| dS$$

On voit aisément que, dans le cas où $g = \mu|F_n|$, l'énergie dépend de l'effort normal qui n'est pas mis en relation biunivoque avec le saut de déplacement normal. Par contre, dans le cas de lois de contact régularisées (voir paragraphe 3.6), cette relation biunivoque existe et une énergie de déformation dépendant uniquement des déplacements peut être écrite. C'est là un grand intérêt de ces lois régularisées.

4.3 Problème de point fixe

L'absence de théorème de l'énergie pour la loi de Coulomb est comblée par l'existence d'un problème de point fixe sur le seuil de glissement qui utilise, dans ses itérations, le théorème de l'énergie de la loi de Tresca :

Trouver le point fixe de l'application :

$$g \longrightarrow \mu |F_n(\vec{u})| \quad (g = \text{seuil})$$

ou \vec{u} est solution de :

Trouver \vec{u} telle que $\vec{u} \in K$ et minimise :

$$\vec{v} \in K \longrightarrow E_c(\vec{v}) = \frac{1}{2}a(\vec{v}, \vec{v}) - l(\vec{v}) + j(\vec{v})$$

où

$$j(\vec{v}) = \int_{\Gamma} g ||[\vec{u}_t]|| dS$$

Il faut remarquer que le problème intermédiaire avec g fixé est un problème non-linéaire de contact qui doit être résolu par l'une des méthodes présentées au paragraphe 2.

Une difficulté de ce problème est son initialisation : dans le cas où l'équilibre d'un corps est assurée par les forces de frottement, l'initialisation avec $g = 0$ est impossible.

4.4 Forme incrémentale de la loi de Coulomb

Dans le cas de problème non monotones, on utilise une écriture incrémentale du problème, associée à des incréments du chargement :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Forces de volume} & \vec{f}_d^i = \vec{f}_d^{i-1} + \Delta \vec{f}_d \\ \text{Forces surfaciques} & \vec{F}_d^i = \vec{F}_d^{i-1} + \Delta \vec{F}_d \\ \text{Déplacement imposés} & \vec{u}_d^i = \vec{u}_d^{i-1} + \Delta \vec{u}_d \end{array} \right.$$

A chaque pas de calcul on cherche les incréments de solution $\Delta \vec{u}$, $\Delta \underline{\sigma}$, ... Si le problème est linéaire, les incréments de solution, s'écrivent directement à partir des incréments de chargement.

Pour ce problème non-linéaire de contact et de frottement, au pas de calcul i , les conditions de contact et de frottement s'écrivent non pas sur les incréments mais sur les quantités complètes :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Contact} \\ \text{Frottement} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}_2^i - \vec{u}_1^i) \cdot \vec{n} = [u_n]^i \geq 0 \\ F_n^i \leq 0 \\ [u_n]^i \cdot F_n^i = 0 \\ \text{si } ||\vec{F}_t^i|| < \mu |F_n^i| \text{ alors } \Delta [\vec{u}_t]^i = 0 \\ \text{si } ||\vec{F}_t^i|| = \mu |F_n^i| \text{ alors } \exists \lambda > 0 \text{ tel que } \Delta [\vec{u}_t]^i = \lambda \vec{F}_t^i \end{array} \right.$$

En fait, la vitesse de glissement est représenté, dans cette forme incrémentale, par l'incrément de glissement. A chaque incrément de calcul, un problème de point fixe sur le seuil de glissement $\mu |F_n^i(\vec{u})|$ doit être résolu. L'initialisation peut se faire à partir de la solution de l'incrément précédent.

4.5 Méthode des statuts

On peut imaginer appliquer la méthode des statuts, définie au paragraphe 3.3, au problème de frottement, c'est à dire supprimer ou imposer les conditions d'adhérence en fonction de l'intensité des efforts tangentiels.

Malheureusement, le couplage entre les statuts de contact et les statuts de glissement est trop fort et la méthode souffre d'une très mauvaise convergence.

5 Problèmes d'existence et d'unicité

Nous donnons ici des résultats d'existence et d'unicité sans démonstration. Les problèmes d'existence et d'unicité dans le cas du frottement de Coulomb font l'objet de nombreuses recherches :

- Le problème de contact unilatéral sans frottement a une solution unique.
- Le problème de frottement de Tresca a une solution unique.
- Il n'y a pas de résultats pour le frottement de Coulomb essentiellement à cause de la difficulté à définir la valeur absolue de la contrainte normale quand celle-ci est définie au sens des distributions.
- Lorsqu'on utilise une contrainte normale définie par le rapport entre une force sur une surface (frottement non local), des résultats d'existence sont obtenus pour les coefficients de frottement *faibles*.
- Pour des coefficients de frottement trop grands, l'intensité de l'énergie libérée par la perte d'adhérence est trop forte pour que soient négligés les phénomènes d'inertie. L'hypothèse de problème quasi-statique n'est plus valable.

6 Analogie avec la plasticité

On trouve dans la littérature [5] des formulations du problème de frottement par analogie avec la plasticité :

Le glissement entre deux points de contact est décomposé en une partie réversible et une partie irréversible :

$$[\vec{u}_t] = [\vec{u}_t]^a + [\vec{u}_t]^g \quad (20)$$

La partie réversible $[\vec{u}_t]^a$, l'*adhérence*, est autorisée par une élasticité des aspérités. La partie irréversible $[\vec{u}_t]^g$ est le *glissement* habituel.

A ces quantités cinématiques sont associées les quantités statiques suivantes par les *lois d'état*:

$$\vec{F}_t = \mathbf{P}[\vec{u}_t]^a \quad (21)$$

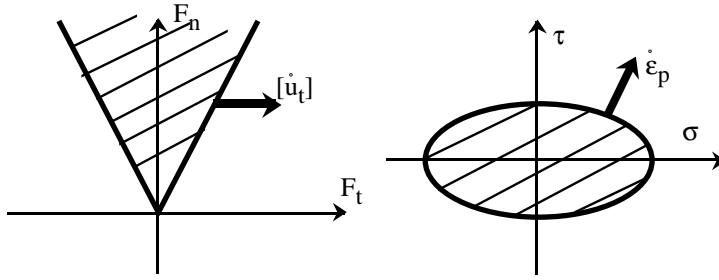
$$\vec{F}_t^g = \mathbf{Q}[\vec{u}_t]^g \quad (22)$$

où \mathbf{P} est un opérateur de rigidité des aspérités et \mathbf{Q} un opérateur de rugosité.

La fonction seuil sera, pour le modèle de Coulomb :

$$f(\vec{F}_t, \vec{F}_t^g) = \|\vec{F}_t\| - \mu|F_n| \leq 0 \quad (23)$$

Cette fonction peut être enrichie pour prendre en compte de l'adhérence, de l'usure, ... Ces modèles de frottement doivent être de type *plasticité non associée* car le glissement ne se fait pas normalement au cône de Coulomb mais plutôt dans la direction des efforts (figure 15).

FIG. 15 – *Plasticité non associée*

7 Éléments de contact

On appelle *élément de contact*, des éléments d'épaisseur nulle disposés entre les maillages des deux domaines. Ils disposent de deux couches de nœuds géométriquement confondues ce qui permet de modéliser les discontinuités de décollement et de glissement.

Lorsque qu'on utilise les lois de contact non régularisées, à ces éléments peuvent être associés des caractéristiques matérielles simples qui évoluent en fonction des statuts de contact. Par exemple, leur module de raideur est très grand en cas de contact et très faible en cas de décollement. Dans ce cas, ce mode de résolution s'apparente aux méthodes de pénalisation et souffre naturellement des problèmes de conditionnement de ces dernières.

Par contre, lorsque qu'on utilise des lois régularisées (cf paragraphes 3.6 et 4.1), la loi de comportement de ces éléments suit les lois régularisées qui donnent alors des relations de comportement biunivoques entre efforts et sauts de déplacement. L'analogie avec la plasticité du paragraphe précédent est alors largement utilisée pour la résolution du problème de frottement : les éléments ont un comportement de type plastique et les méthodes de résolution sont celles des problèmes de plasticité classiques.

8 Condensation statique - Sous-structuration

8.1 Buts

Dans la résolution des problèmes de contact unilatéral et de frottement, on constate que les méthodes employées (cf paragraphes 2 et 4) sont très coûteuses car elles font fréquemment appel à des refactorisations de la matrice de rigidité. En revanche, les modifications apportées sur la matrice ne concernent que les degrés de liberté participant au contact. Par ailleurs, les problèmes de calcul des structures actuellement traités mettent en jeu peu de zones de contact. Le nombre de degrés de liberté participant au contact est donc souvent très faible devant le nombre de degrés de liberté du problème.

La méthode de condensation est une méthode purement numérique dont l'idée est restreindre le problème à traiter aux seuls degrés de liberté participant au contact.

8.2 Condensation

Le système linéaire du problème discrétisé est :

$$[K][u] = [F] \quad (24)$$

Dans le vecteur des inconnues nodales $[u]$, on distingue les inconnues u_1 relatives à Ω_1 seulement, les inconnues u_2 relatives à Ω_2 seulement, et les inconnues u_i relatives à l'interface. Le système linéaire (24) s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & K_{1i} \\ 0 & K_2 & K_{2i} \\ K_{1i}^t & K_{2i}^t & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

Les deux premières équations du système (25) expriment les inconnues intérieures aux domaines, u_1 et u_2 , en fonction des inconnues "interface" :

$$u_1 = K_1^{-1}[F_1 - K_{1i}u_i] \quad (26)$$

$$u_2 = K_2^{-1}[F_2 - K_{2i}u_i] \quad (27)$$

En substituant ces expressions de u_1 et u_2 dans la troisième équation du système (25), on obtient :

$$K_{1i}^t K_1^{-1}[F_1 - K_{1i}u_i] + K_{2i}^t K_2^{-1}[F_2 - K_{2i}u_i] + K_i u_i = F_i \quad (28)$$

qu'on écrit sous la forme :

$$[S][u_i] = [F'] \quad (29)$$

où la matrice $[S]$ appelée *matrice de rigidité condensée sur l'interface* (ou *matrice du complément de Schur*) est définie par :

$$[S] = K_i - S_1 - S_2 \quad (30)$$

avec

$$S_1 = K_{1i}^t K_1^{-1} K_{1i} \quad \text{et} \quad S_2 = K_{2i}^t K_2^{-1} K_{2i}$$

et le second membre $[F']$ appelé *vecteur des forces généralisées condensées sur l'interface* par

$$[F'] = F_i - F_1' - F_2' \quad (31)$$

avec

$$F_1' = K_{1i}^t K_1^{-1} F_1 \quad \text{et} \quad F_2' = K_{2i}^t K_2^{-1} F_2$$

Le système (29) a donc pour taille le nombre de degrés de liberté du problème participant au contact. Ainsi, la résolution du problème de contact unilatéral (avec ou sans frottement) se fait à travers des refactorisations de la matrice $[S]$ qui sont bien moins coûteuses que celle de la matrice d'origine $[K]$.

Lorsque les degrés de libertés interface u_i satisfaisant les conditions de contact et de frottement sont calculés, les degrés de libertés internes sont construits à par les relations (26) et (27).

Cette approche est très séduisante et est employée dans la plupart des codes de calcul (CASTEM200 et ABAQUS en particulier). Néanmoins il faut remarquer deux inconvénients de l'approche :

- la matrice condensée $[S]$ est pleine et souvent mal conditionnée. Son stockage et sa factorisation est plus coûteuse que si elle était *bande* comme les matrices de rigidité éléments finis classiques,

- la construction de $[S]$ fait intervenir explicitement les inverses K_1^{-1} et K_2^{-1} . Des techniques de construction adaptées existent mais leurs performances décroissent très vite lorsque le nombre de degrés de liberté interface augmente.

Ainsi, lorsque le nombre de degrés de liberté interface devient élevé, la méthode de condensation peut devenir plus couteuse que la méthode directe.

8.3 Sous-structuration

L'utilisation de la méthode de condensation est de plus en plus fréquente, même pour les problèmes incluant plusieurs zones de contact, car elle possède des propriétés de parallélisme intéressantes. Les approches parallèles sont très à la mode à cause de l'émergence des calculateurs parallèles dans le monde industriel.

Le parallélisme de la méthode de condensation intervient dans les étapes suivantes :

- La construction de la matrice condensée fait intervenir deux termes $[S_1]$ et $[S_2]$ relatifs aux degrés de libertés internes de chaque domaine et totalement indépendants,
- La construction du vecteur forces généralisées condensées fait aussi intervenir les deux termes $[F_1]$ et $[F_2]$ relatifs totalement indépendants,
- La construction des degrés de liberté internes à chacun des domaines après résolution du problème non linéaire peut se faire en parallèle, les relations (26) et (27) étant totalement indépendantes.

La méthode ainsi utilisée en parallèle s'appelle *méthode de sous-structuration* car chaque domaine devient une *sous-structure* dont les autres ne connaissent que les degrés de libertés interface. Dans la pratique, chaque processeur du calculateur parallèle gère une sous-structure : il procède à la condensation de la sous-structure (calcul de $[S_1]$ et de $[F_1]$) et la construction finale des degrés de libertés internes $[u_1]$. Un des processeurs s'occupe lui de la résolution du problème non-linéaire condensé.

La méthode de sous-structuration est aussi utilisée pour du calcul purement parallèle lorsque les conditions d'interface sont de type liaison complète. Elle est aussi très utilisée pour les problèmes d'analyse modale en vibration [3].

Il faut remarquer que cette approche ne se limite pas à deux sous-structures, mais que ses propriétés parallèles perdent de leur efficacité lorsque le nombre de sous-structures croît. En pratique, les problèmes sont limités à quelques dizaines de sous-structures [3].

9 Problèmes plus complexes

Les équations des lois du contact unilatéral présentées dans les paragraphes précédents restent valables pour des problèmes plus complexes où les non linéarités de contact sont couplées avec d'autres non linéarités :

- Dans les problèmes de contact entre solides plastiques ou viscoplastiques, le couplage entre plasticité et contact est souvent fort quand les pressions de contact sont importantes. Ce couplage fort engendre une convergence difficile des processus de résolution.
- Dans les problèmes de contact en grandes déformations et/ou grands déplacements les principaux problèmes sont que les directions des normales peuvent changer beaucoup, les zones réelles de contact évoluent beaucoup et sont souvent imprévisibles et que l'auto-contact (contact entre un solide et lui-même) peut intervenir. Dans ce cas, les algorithmes de résolution passent la plupart de leur temps à rechercher les *nœuds candidats aux contacts* et à évaluer les directions des normales.

- En dynamique, même lorsque les seules non linéarités prises en compte sont celles de contact, les difficultés sont importantes. En effet, même lorsque les chargements extérieurs ne sont pas trop rapides, la présence de jeux fait que les contacts se font avec une discontinuité de vitesse. On parle alors d'*impact* et on entre très vite dans le domaine de la dynamique rapide.

Un grand nombre de problèmes industriels (surtout dans le domaine de la mise en forme des matériaux : formage, estampage, emboutissage, laminage, ...) couplent toutes les non linéarités possibles. Ces problèmes posent encore de nombreux problèmes numériques mais commencent à être traités dans le cadre du bureau d'étude.

Références

- [1] Leguillon, D.: *La méthode des éléments finis*, Notes de cours du DESS DSME, 1999. 6
- [2] Duvaut, G. et Lions, J.L.: *Les inégalités variationnelles en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972. 5, 13
- [3] Géraudin, M. et Rixen, D.: *Théorie des vibrations*, Masson, Paris, 1993. 18
- [4] Hibbit, Karlson ans Sorensen Inc : *ABAQUS 5.8 Manuals*, 1998. 12
- [5] Curnier A. : A theory of friction, *Int. J. Solid Structures*, 20, 637-647, 1984. 15