Base Modale

Exercice 1 *Vibrations longitudinales : déplacement initial*

On considère une barre de section S et de longueur L, encastré en $x = 0$ et libre en $x = L$. Le module d'Young du matériau de la barre est E et sa masse volumique est ρ. On rappelle que les modes propres d'une telle barre sont donnés par :

$$U_i(x) = \sin(2i-1)\frac{\pi x}{2L} \qquad \text{et} \qquad \omega_i = (2i-1)\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad , \qquad i = 1\ldots\infty$$

A l'instant initial, cette barre est abandonnée sans vitesse avec une forme :

$$u_0(x) = \sin\frac{\pi x}{2L}$$

1. Normer les modes propres par rapport à la masse.
2. Donner la solution $u(x,t)$ du problème.

Exercice 2 *Base modale en flexion*

Une poutre a une longueur L, une section S et un moment quadratique I. Le matériau élastique dont elle est constituée est homogène de module d'Young E de masse volumique ρ. On note $v(x,t)$ la flèche : déplacement transversal d'une section située à l'abscisse x. Les modes propres de vibration $V_i(x)$ de cette poutre sont solution de l'équation :

$$(EIV_i'')'' = \omega_i^2 \rho S V_i$$

1. Rappeler les conditions aux limites possibles pour la poutre.
2. Montrer que les modes propres V_i sont orthogonaux par rapport à la masse et par rapport à la raideur.
3. Proposer une normalisation des modes.
4. Lorsqu'on cherche une solution d'un problème de vibration forcées de flexion, écrire les équations différentielles et les conditions initiales vérifiées par les composantes de la solution dans la base modale.

Exercice 3 *Vibrations forcées en flexion*

Une poutre de longueur L, de section S et de moment quadratique I est simplement appuyée à ses deux extrémités. Le matériau élastique dont elle est constituée est homogène de module d'Young E de masse volumique ρ. La poutre est soumise à un effort tranversal $F\sin\omega t$ en son centre. Les conditions initiales sont des conditions de déplacement et vitesse nulle. On rapelle que les modes propres sont donnés par :

$$V_i(x) = \sin i\frac{\pi x}{L} \qquad \text{et} \qquad \omega_i = i\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} \qquad , \qquad i = 1\ldots\infty$$

1. Normer les modes par rapport à la masse.
2. Préciser quelles composantes de la solution dans la base modale sont non nulles.
3. Donner la forme de ces composantes.