# Opérateur de rotation

Mouvement de corps rigide :

$$\underline{OM} = \underline{A} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{OM_0} \qquad ; \qquad \underline{ON} = \underline{A} + \underline{\underline{Q}}\,\underline{OrN_0}$$

soit par différence :

$$\underline{MN} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{M_0N_0}$$

Ce mouvement conserve les longueurs :

$$\|\underline{MN}\|^2 = \underline{MN}^T\underline{MN} = \underline{M_0N_0}^T\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}}\,\underline{M_0N_0} = \|\underline{M_0N_0}\|^2$$

L'opérateur $\underline{\underline{Q}}$ est donc une isométrie donc :

$$\underline{\underline{QQ^T}} = \underline{\underline{I}}_d$$

La formule du champ des vitesses est obtenue en dérivant :

$$\underline{ON} - \underline{OM} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{M_0N_0}$$

soit :

$$\underline{V}_N = \underline{V}_M + \underline{\underline{\dot{Q}}}\,\underline{M_0N_0}$$

ou

$$\underline{V}_N = \underline{V}_M + \underline{\underline{\dot{Q}Q^T}}\,\underline{MN}$$

L'opérateur $\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\dot{Q}Q^T}}$ est antisymétrique, en effet :

$$\underline{\underline{QQ^T}} = \underline{\underline{I}}_d \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\dot{Q}Q^T}} + \underline{\underline{Q\dot{Q}^T}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\dot{Q}Q^T}} + (\underline{\underline{\dot{Q}Q^T}})^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\Omega}} = -\underline{\underline{\Omega}}^T$$

Il est donc associé à un vecteur vitesse de rotation $\underline{\omega}$ de sorte que :

$$\underline{\underline{\Omega}}\,\underline{MN} = \underline{\omega} \wedge \underline{MN}$$

Dans une base $\mathcal{B}(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, les composantes de l'opérateur $\underline{\underline{\Omega}}$ sont :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$