

# Etude d'une pièce parallélépipédique : Comparaison de formulations et d'éléments

L. CHAMPANEY

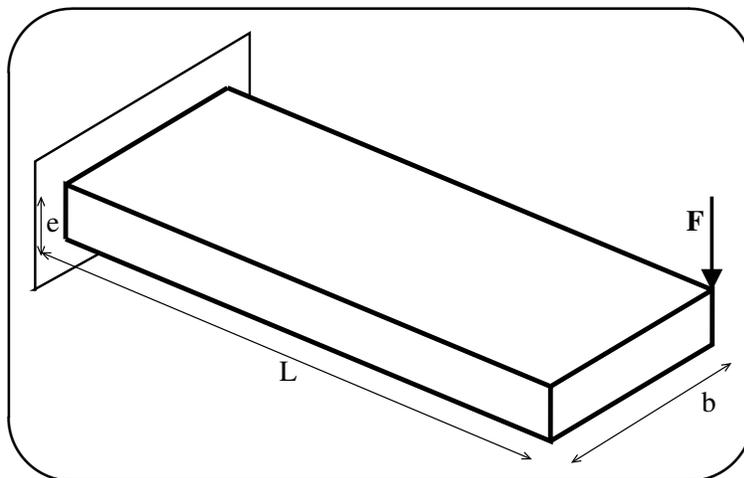
Objectifs :

- Choix d'un modèle mécanique,
- Comparaison d'éléments,
- Influence du raffinement.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modèle volumique</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modèle Coque</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Modèle Poutre</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Comparaison : flèche</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Comparaison : contraintes</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>10</b>

# 1 Problème



$$L = 10\text{cm}, b = 4\text{cm}, e = 10\text{mm}$$

$$F = 1000\text{N}$$

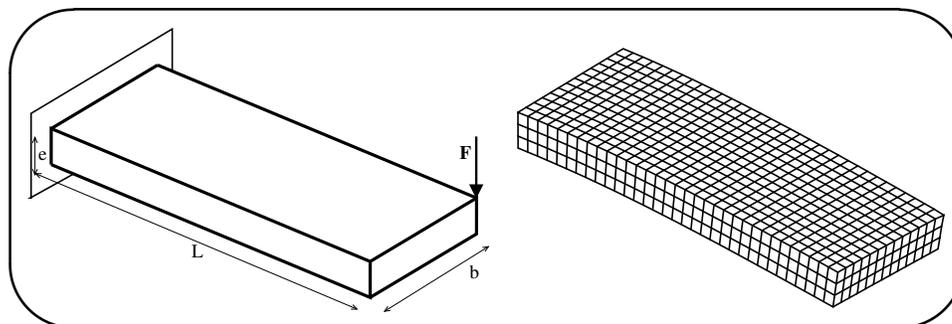
Matériau élastique :  $E = 210000\text{MPa}$  et  $\nu = 0.3$ .

Lorsqu'il est confronté au calcul d'une structure, le mécanicien doit souvent choisir entre la construction d'un modèle éléments finis à une dimension (formulation *poutre*), à deux dimensions (formulation *plaque* ou *coque*) ou à trois dimensions. Pour effectuer ce choix, une condition nécessaire est de bien connaître la géométrie de la structure étudiée. Mais ce n'est pas une condition suffisante pour un choix judicieux. Afin de parvenir à un modèle optimal est exploitable, il faut également avoir une idée précise du comportement et du type de résultats attendus : déplacement, contraintes et déformations locales ou globales, ...

Cet exemple illustre les différentes options possibles pour la modélisation d'une structure très simple qui, d'un point de vue géométrique n'est ni une poutre ni une plaque. Il s'agit d'un parallélépipède rectangle en acier de longueur  $L = 10\text{cm}$  de largeur  $b = 4\text{cm}$  et d'épaisseur  $e = 10\text{mm}$ . La pièce est encastree à l'une de ses extrémités.

Un effort ponctuel de  $1000\text{N}$  est appliqué sur l'un des coins de l'extrémité libre du parallélépipède.

## 2 Modèle volumique



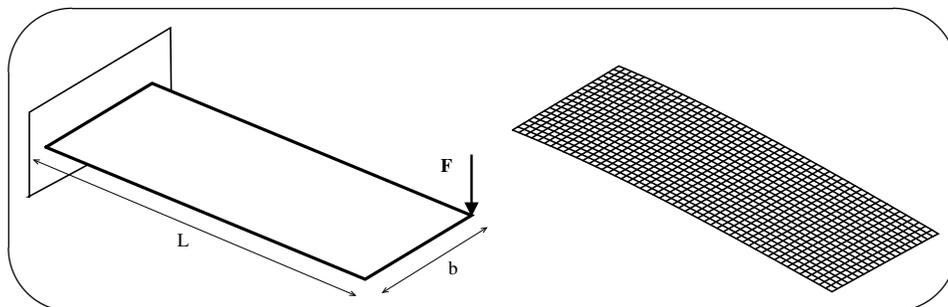
Éléments utilisés :

- Cubes à 8 noeuds : linéaires
- Cubes à 20 noeuds : quadratiques

Le tableau ci-dessous rassemble les résultats pour différents raffinements du maillage. La référence utilisée pour les calculs des écarts est le calcul le plus fin en cubes quadratiques.

Éléments	Nbre	ddl	Flèche	Écart(%)
Cube 8 nds	1	24	-0.03286	93.6
Cube 8 nds	2	26	-0.07360	85.7
Cube 8 nds	8	90	-0.16770	67.6
Cube 8 nds	40	330	-0.34180	34.0
Cube 8 nds	320	1701	-0.45134	12.9
Cube 8 nds	1287	5712	-0.48786	5.8
Cube 20 nds	1	60	-0.36819	28.9
Cube 20 nds	2	92	-0.44527	14.0
Cube 20 nds	8	267	-0.48770	5.8
Cube 20 nds	40	1158	-0.50423	2.7
Cube 20 nds	330	6543	-0.51483	0.6
Cube 20 nds	840	13875	-0.51805	0

### 3 Modèle Coque



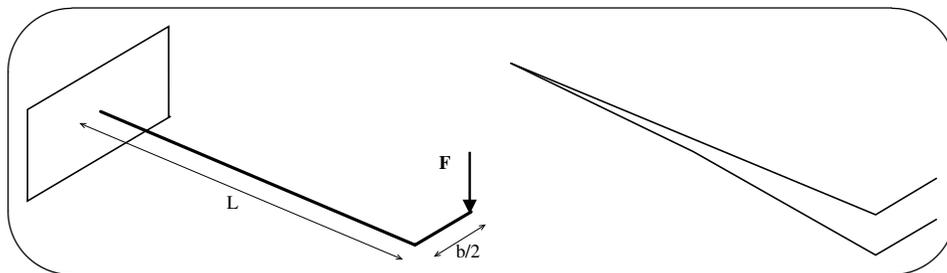
Éléments utilisés :

- Coques à 4 noeuds : linéaire avec cisaillement transverse,
- Coques à 8 noeuds : quadratique avec cisaillement transverse,

Le tableau ci-dessous rassemble les résultats pour différents raffinements du maillage et pour les deux types d'éléments coques.

Éléments	Nbre	ddl	Flèche	Écart(%)
Coque 4 nds	1	24	-0.38850	25.0
Coque 4 nds	2	78	-0.46897	9.4
Coque 4 nds	8	90	-0.49455	4.5
Coque 4 nds	40	330	-0.50658	2.2
Coque 4 nds	250	1716	-0.51169	1.2
Coque 4 nds	1000	6426	-0.51333	0.9
Coque 8 nds	1	48	-0.46897	6.2
Coque 8 nds	2	78	-0.48601	4.3
Coque 8 nds	8	222	-0.51059	1.4
Coque 8 nds	40	894	-0.51263	1.0
Coque 8 nds	250	4926	-0.51370	0.8
Coque 8 nds	1000	18846	-0.51440	0.7

## 4 Modèle Poutre



- poutre encastree-libre avec effort excentré,
- un élément factice pour l'excentrement,
- un seul élément fini poutre (cubique pour la flexion et linéaire en torsion).

$$(S = be, I_z = \frac{be^3}{12}, I_y = \frac{eb^3}{12}, I_o = \frac{be^3 + eb^3}{12})$$

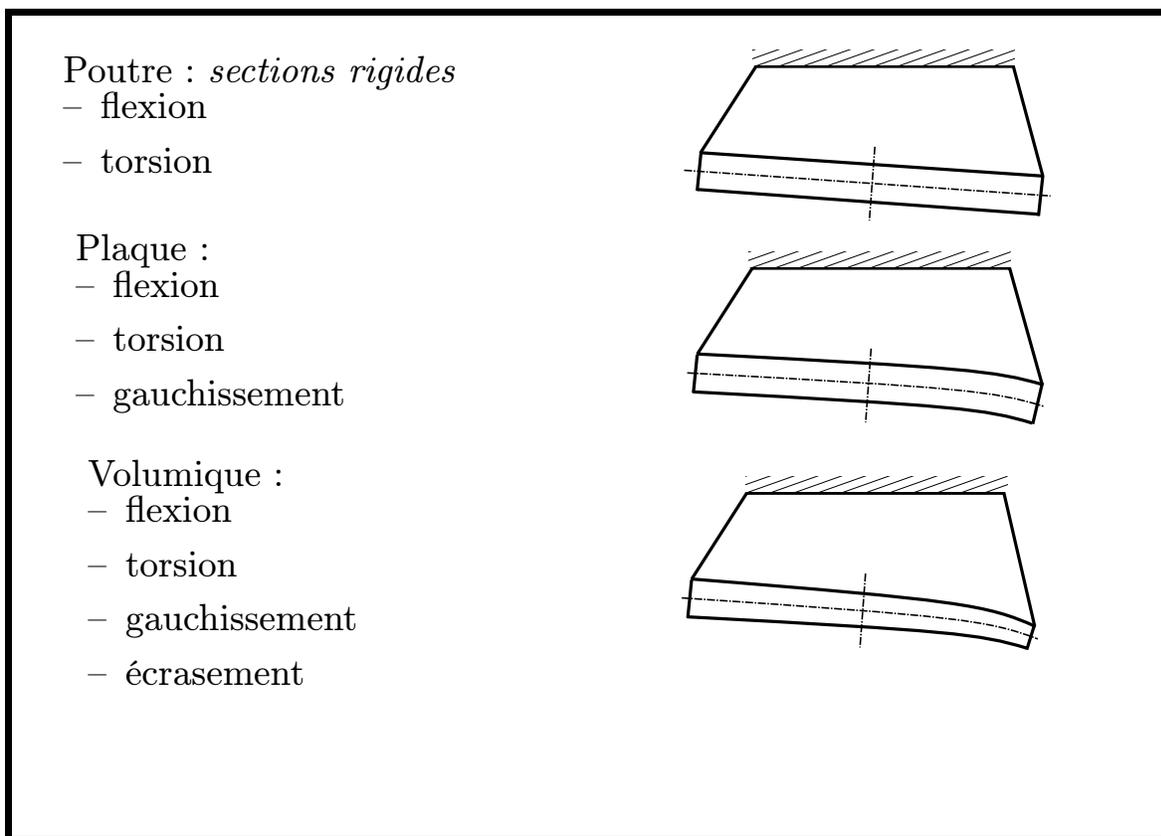
La façon la plus simple de modéliser la structure en utilisant une formulation *poutre* est de considérer une poutre encastree-libre avec un effort excentré. Le modèle est constitué de deux éléments finis poutre à 2 noeuds (cubique pour la flexion et linéaire en torsion). L'élément 1 est affecté des caractéristiques géométriques de la poutre étudiée. L'élément 2 est un élément factice uniquement destiné à la prise en compte de l'excentrement de l'effort. Sa longueur est donc  $(b/2)$  et sa section et ses moments quadratiques sont choisis de telle sorte que cet élément soit très rigide en flexion par rapport à l'élément 1.

La solution analytique de ce problème *poutre* est cubique en flexion et linéaire en torsion. Cette solution est donc exactement représentée par un seul élément. Il n'est pas nécessaire de raffiner le maillage : aucune amélioration ne pourra être apportée à la solution.

## 5 Comparaison : flèche

Éléments	Nbre	ddl	Flèche	Écart(%)
Poutre	2	18	-0.48493	6.4
Cube 8 nds	1	8	-0.03286	93.6
Cube 8 nds	1287	5712	-0.48786	5.8
Cube 20 nds	1	60	-0.36819	28.9
Cube 20 nds	840	13875	-0.51805	0.
Coque 4 nds	1	24	-0.38850	25.0
Coque 4 nds	1000	6426	-0.51333	0.9
Coque 8 nds	1	48	-0.48601	6.2
Coque 8 nds	1000	18846	-0.51440	0.7

On peut constater des écarts significatifs entre les différentes solutions obtenues. Ces écarts appellent un certain nombre de commentaires et demandent quelques explications.



Les différences observées sur la flèche ont aussi pour origine les différences entre les hypothèses cinématiques des modèles utilisés :

- dans le modèle poutre, les sections sont supposées rigides, le gauchissement des sections et l'écrasement de parallélépipède selon son épaisseur ne pourront être observés.
- dans le modèle plaque, les segments perpendiculaires à la ligne moyenne ne peuvent se déformer. L'écrasement ne pourra donc pas être modélisé.
- avec un modèle volumique suffisamment fin, on pourra modéliser à la fois le gauchissement des sections et l'écrasement de l'épaisseur.

## 6 Comparaison : contraintes

Volumique : Tenseur 3D

$(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$

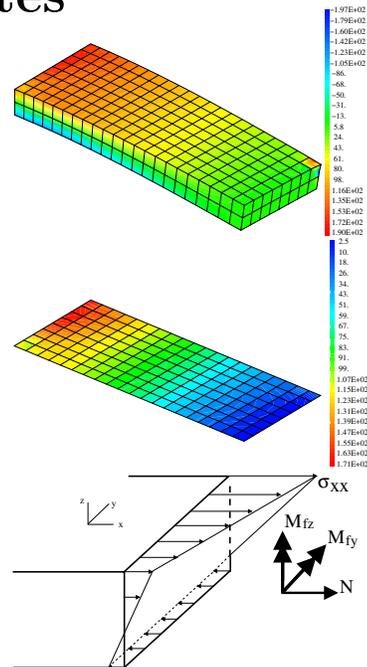
dans chaque élément.

Plaque : Efforts et moments intérieurs.

Calcul des composantes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$   
du tenseur 3D en peau.

Poutre : Efforts intérieurs.

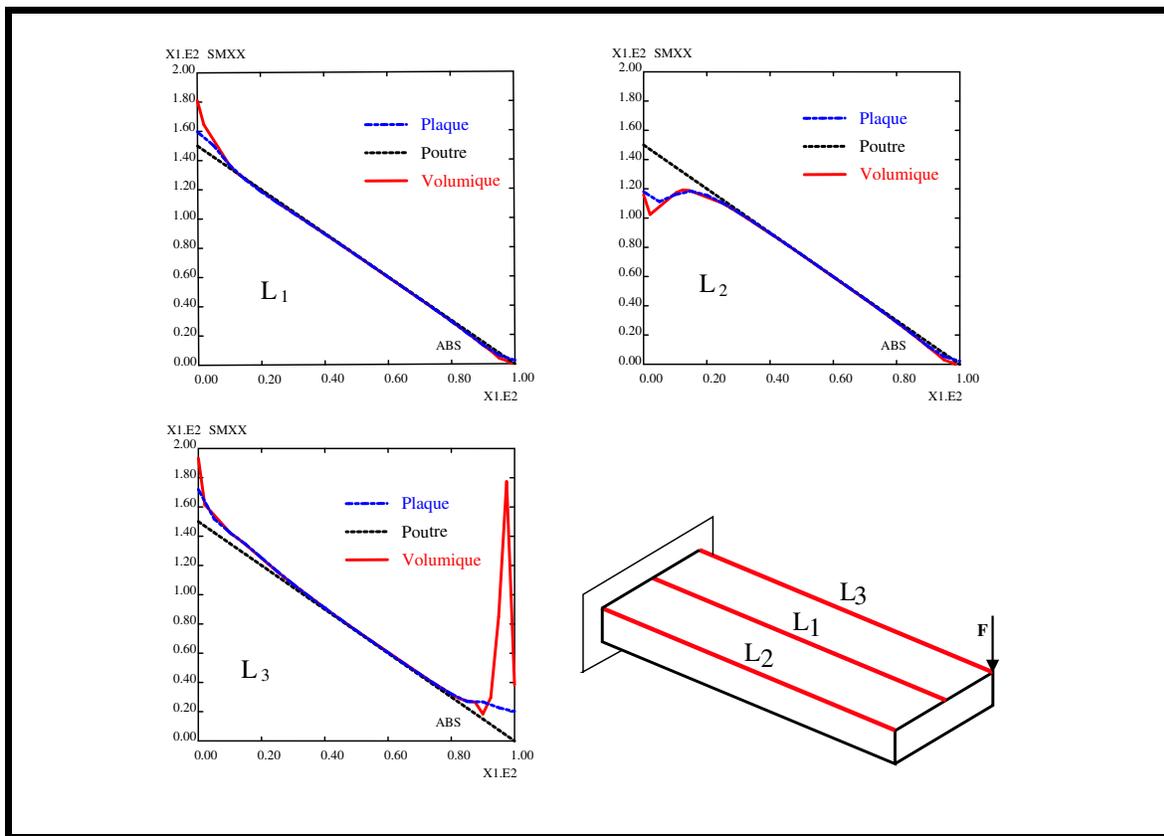
Calcul de  $\sigma_{xx}$  en peau.



Dans le modèle volumique, toutes les composantes du tenseur des contraintes sont calculées élément par élément. L'effort ponctuel appliqué n'est pas compatible avec une modélisation tridimensionnelle (dans laquelle seuls des efforts surfaciques peuvent être appliqués). Cela génère une concentration de contraintes à laquelle nous ne nous intéressons pas ici.

Dans le modèle plaque, les contraintes planes  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  sont calculées à partir des tenseurs des efforts et moments généralisés. Ces contraintes sont calculées sur les peaux (supérieure, inférieure ou en surface moyenne) à l'aide d'une hypothèse de variation linéaire dans l'épaisseur.

Dans le modèle poutre, seule la contrainte normale (axiale)  $\sigma_{xx}$  est calculée à partir du torseur des efforts intérieurs (effort normal et moments fléchissants). Cette contrainte est calculée sur les peaux (ou en tout point d'une section) à l'aide d'une hypothèse de variation linéaire dans l'épaisseur.



Sur la figure ci-dessus, on trace l'évolution de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  le long de trois lignes ( $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ ) de la peau supérieure du parallélépipède. La torsion n'ayant aucun effet sur la contrainte axiale dans le modèle poutre, les répartitions de contrainte axiale sont les mêmes sur les trois lignes. Ces effets de torsion sont par contre bien pris en compte par les modèles volumiques et plaques.

Les concentrations de contraintes (à l'encastrement et sur l'effort ponctuel) ne sont pris en compte que par le modèle volumique.

Dans la zone située loin des extrémités (encastrement et point d'application de l'effort) les trois modèles concordent parfaitement.

## 7 Conclusions

- Les modèles mécaniques simples (poutre ou plaques) sont aptes à fournir des solutions très correctes.
- Choix du modèle mécanique pas seulement lié aux considérations géométriques : se souvenir des hypothèses cinématiques.
- Les modèles ne donnent pas toutes les composantes de contrainte.
- Attention à la façon dont est pris en compte le cisaillement.