

Modélisation d'un encastrement

L. CHAMPANEY et Ph. TROMPETTE

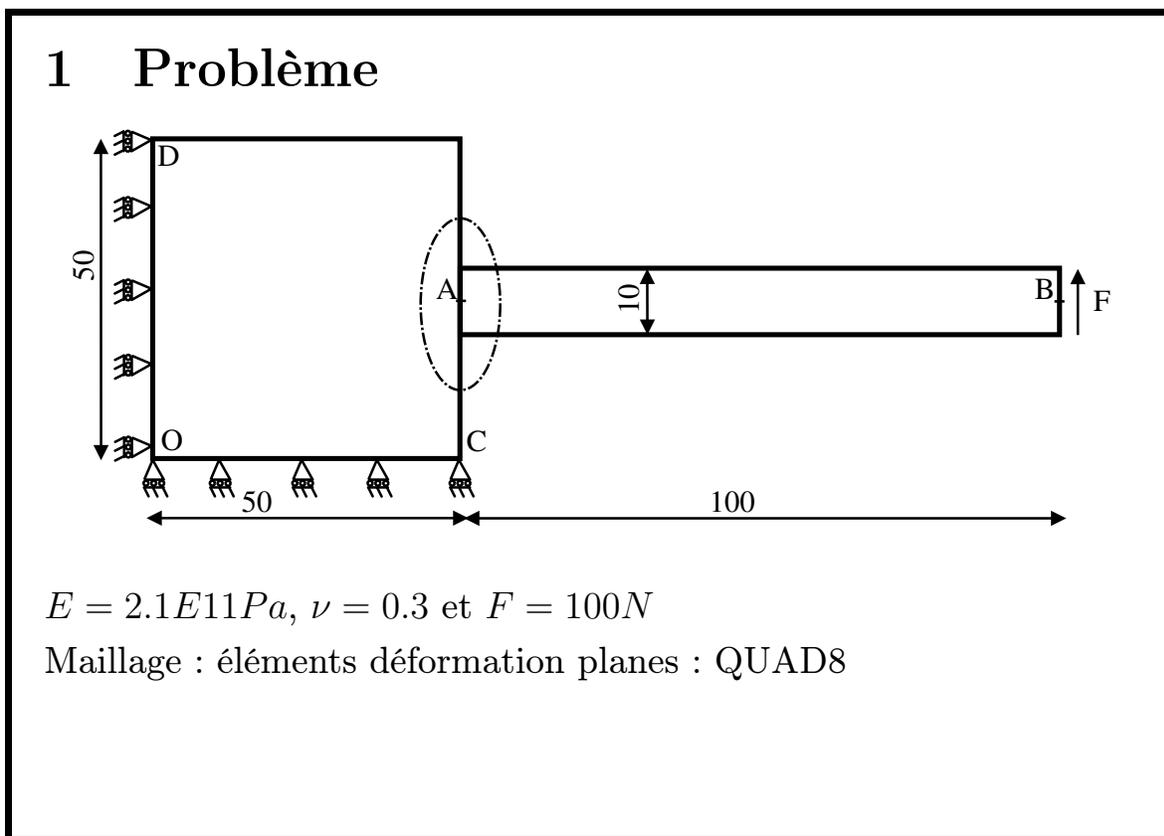
Objectifs :

- Encastrement,
- Liaison entre modèles différents,
- Relations cinématiques,
- Singularités.

Dans ce chapitre, nous étudions diverses méthodes pour réaliser l'encastrement d'une structure de type poutre sur une structure de type massif.

Table des matières

1	Problème	2
2	Modélisation massive	3
2.1	Déplacement	3
2.2	Contraintes	4
3	Modélisation poutre	5
3.1	Relation entre degrés de liberté	6
3.2	Corps rigide	9
3.3	Comparaison	11
4	Modélisation poutre pénétrante	12
4.1	Comparaison	14
5	Conclusions	15



Le problème considéré est représenté sur la figure ci-dessus. Toutes les dimensions sont indiquées sur la figure.

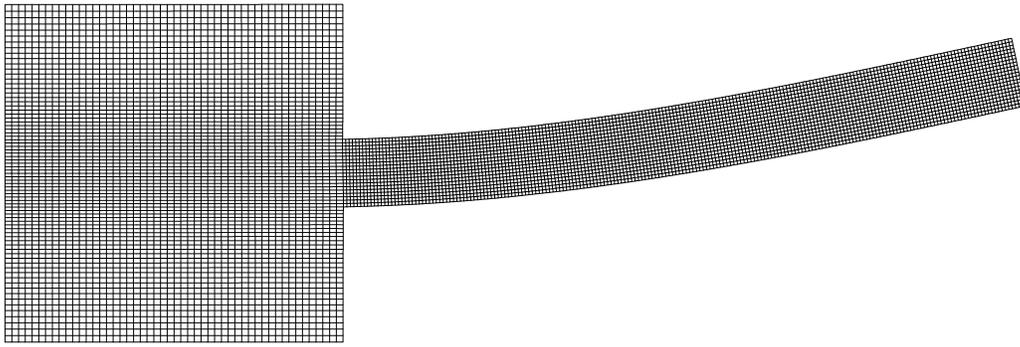
On souhaite réaliser un encastrement entre une partie ayant plutôt une forme de poutre (la partie de droite) est une partie ayant plutôt une forme massive (la partie de gauche).

Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure. Elles sont telles qu'elles n'induisent pas de singularité ni de concentrations des contraintes qui pourraient perturber notre étude.

La partie *poutre* est sollicitée à son extrémité, droite (point B) à un effort qui la sollicite en flexion. Dans la suite, nous nous intéressons au déplacement vertical du point B (v_B) et à l'état de contrainte près de l'encastrement.

2 Modélisation massive

2.1 Déplacement



Amplification : $\times 7.6$

$$v_B = 1.98mm$$

Nous commençons par rechercher une solution de référence en modélisant les deux parties par des éléments finis massifs.

Le maillage utilisé sur la figure ci-dessus comporte 3800 éléments quadrangulaires à huit noeuds pour la partie massive et 4000 éléments du même type pour la partie poutre. Le problème complet comporte 24053 noeuds soit 48106 degrés de liberté.

Nous utilisons des éléments quadratiques en déplacement et un maillage aussi fin pour obtenir une bonne description du champ des contraintes près de notre encastrement.

La figure ci-dessus présente la déformée du problème et nous donne le déplacement vertical de référence pour le point B :

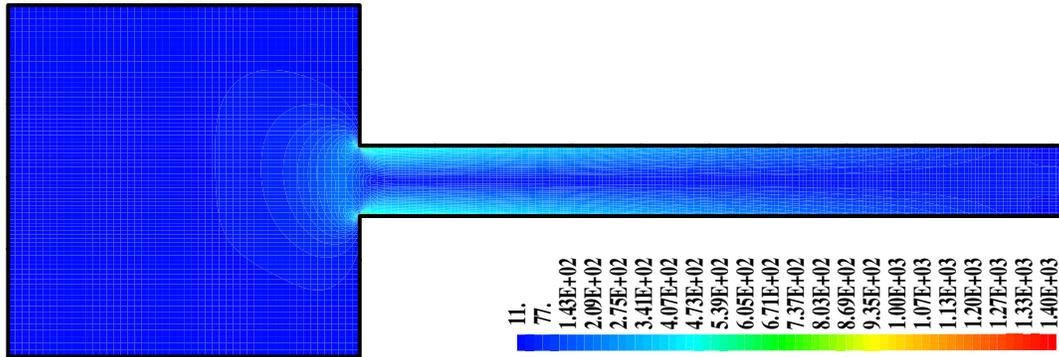
$$v_B = 1.98mm$$

Les figures suivantes donnent les isovaleurs de la contrainte équivalente de Von Mises dans toute la structure et près de notre encastrement. Nous constatons deux points de singularité des contraintes dans la zone de raccord.

Ce résultat n'est pas surprenant. Lorsque la surface extérieure, présente un point anguleux rentrant, il y a présence d'une singularité. Les contraintes sont théoriquement infinies dans cette zone. Nous ne chercherons donc pas de résultat sur les contraintes maximales.

2.2 Contraintes

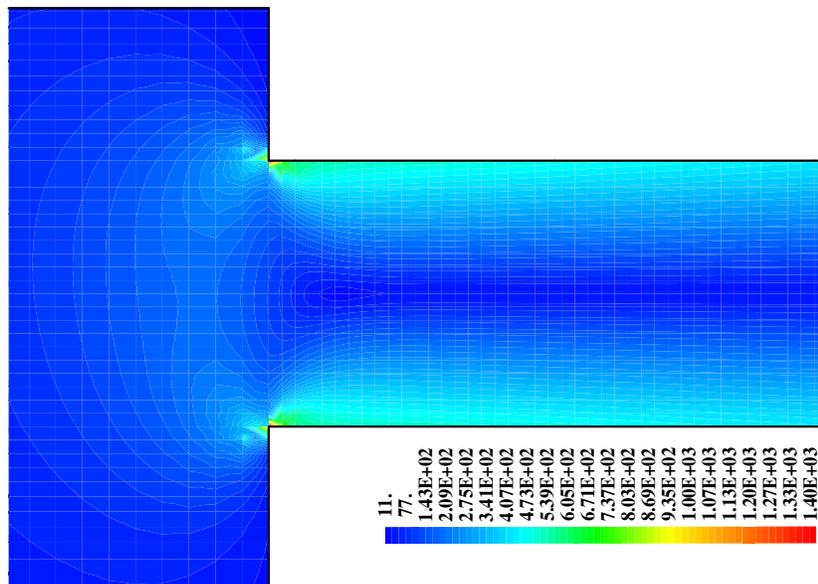
Contrainte équivalente de Von Mises



$\sigma_{eq}(MPa)$

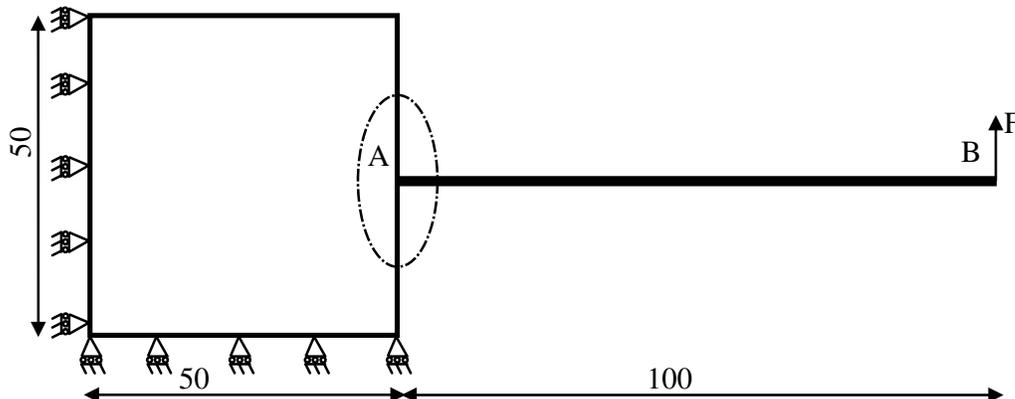
Singularité à l'encastrement

Zoom sur l'encastrement



$\sigma_{eq}(MPa)$

3 Modélisation poutre



- Modèle poutre de Bernoulli,
- Problème de raccord sur la rotation,
- Deux modèles proposés.

Nous introduisons maintenant une représentation *poutre* de la partie de droite, comme il semble naturel de la faire. Nous utilisons ici un modèle poutre de Bernoulli. Les caractéristiques géométriques de la poutre sont les suivantes pour ce problème en dimension deux ($e = 10\text{mm}$ est l'épaisseur de la poutre dans le plan (x, y)) :

- section :

$$S = e \times 1$$

- inertie :

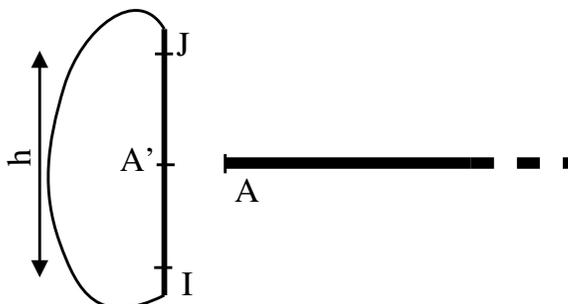
$$I = \frac{e^3 \times 1}{12}$$

La partie massive reste modélisée par des éléments quadratiques à huit noeuds. Leur nombre est à peu près le même que dans le cas de la solution de référence.

Dans la suite, nous envisageons deux manières de réaliser l'encastrement entre les deux parties. Nous comparons les résultats à la solution de référence.

Le principal problème de ce type de raccordement est de trouver une relation entre le degré de liberté en rotation à l'extrémité de la poutre et les degrés de liberté en déplacement du massif.

3.1 Relation entre degrés de liberté



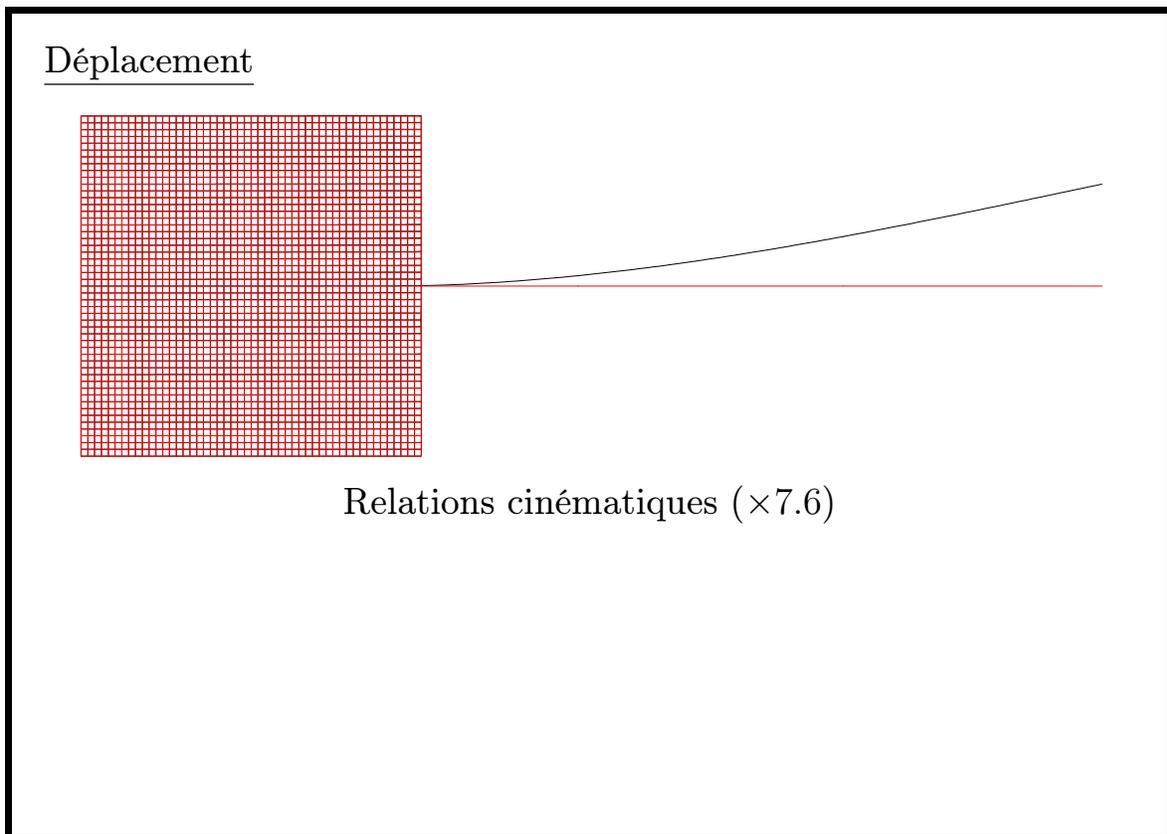
$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = u_{A'} \\ v_A = v_{A'} \\ \omega_A = \frac{1}{h}(v_I - v_J) \end{array} \right.$$

Nous commençons par proposer la relation indiquée ci-dessus. Cette relation tente de traduire l'hypothèse cinématique de la résistance des matériaux qui stipule que les sections droites restent rigides.

La liaison en déplacement est assurée au niveau du point A où on impose la continuité des déplacements u et v . Cette liaison étant ponctuelle, on peut s'attendre à voir apparaître une concentration des contraintes en ce point.

Pour la rotation, nous introduisons deux points I et J sur le massif distant d'une hauteur h . Leur écart en déplacement horizontal est relié à la rotation du point A par la relation indiquée ci-dessus. La valeur la plus naturelle à donner à h est la hauteur de la poutre ($10mm$ ici).

Cette liaison cinématique, va elle aussi générer des efforts ponctuels en I et J , qui vont bien-sûr créer des surcontraintes.

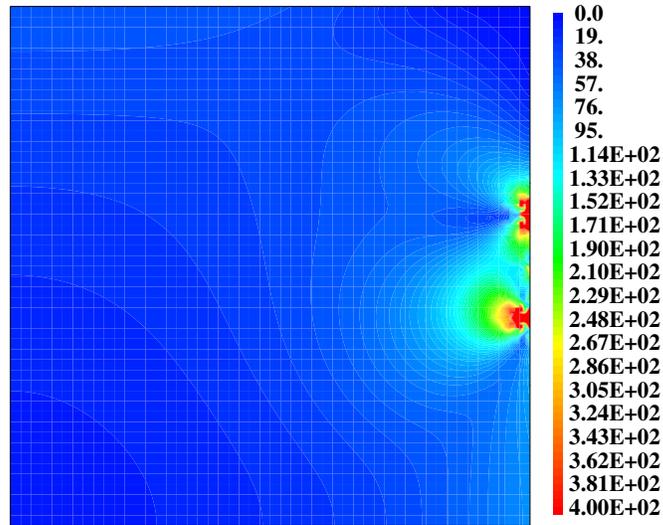


La figure ci-dessus présente la structure déformée. On constate que les déplacements dans le massif sont très faibles par rapport à ceux dans la poutre. Le massif joue bien son rôle d'encastrement.

Les valeurs du déplacement en sont donnés plus loin et comparés à la valeur de référence en fonction de la hauteur h .

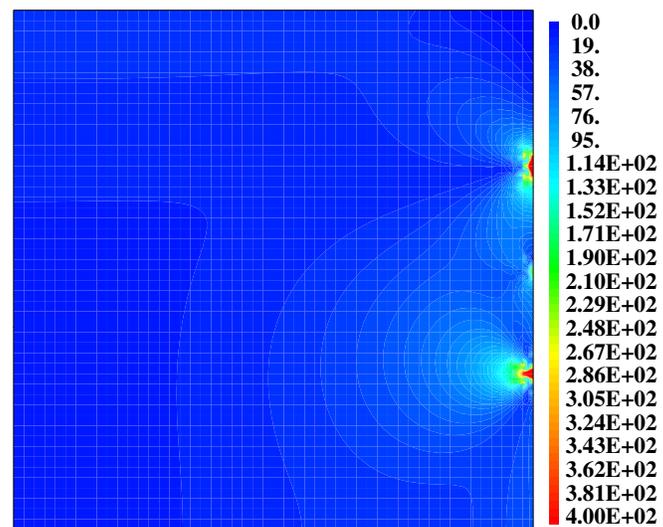
Les figures suivantes donnent l'état de contrainte équivalente de Von Mises dans le massif pour deux valeurs distinctes de h (10 et 20 mm).

Contraintes : $h = 10mm$



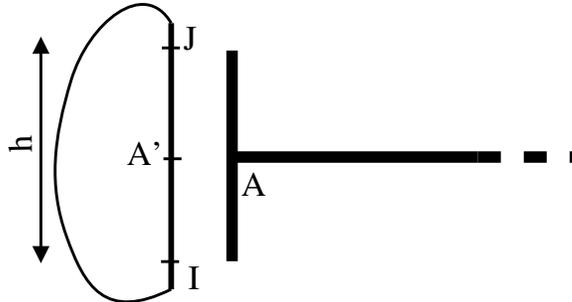
Relations cinématiques : $\sigma_{eq}(MPa)$

Contraintes : $h = 20mm$



Relations cinématiques : $\sigma_{eq}(MPa)$

3.2 Corps rigide



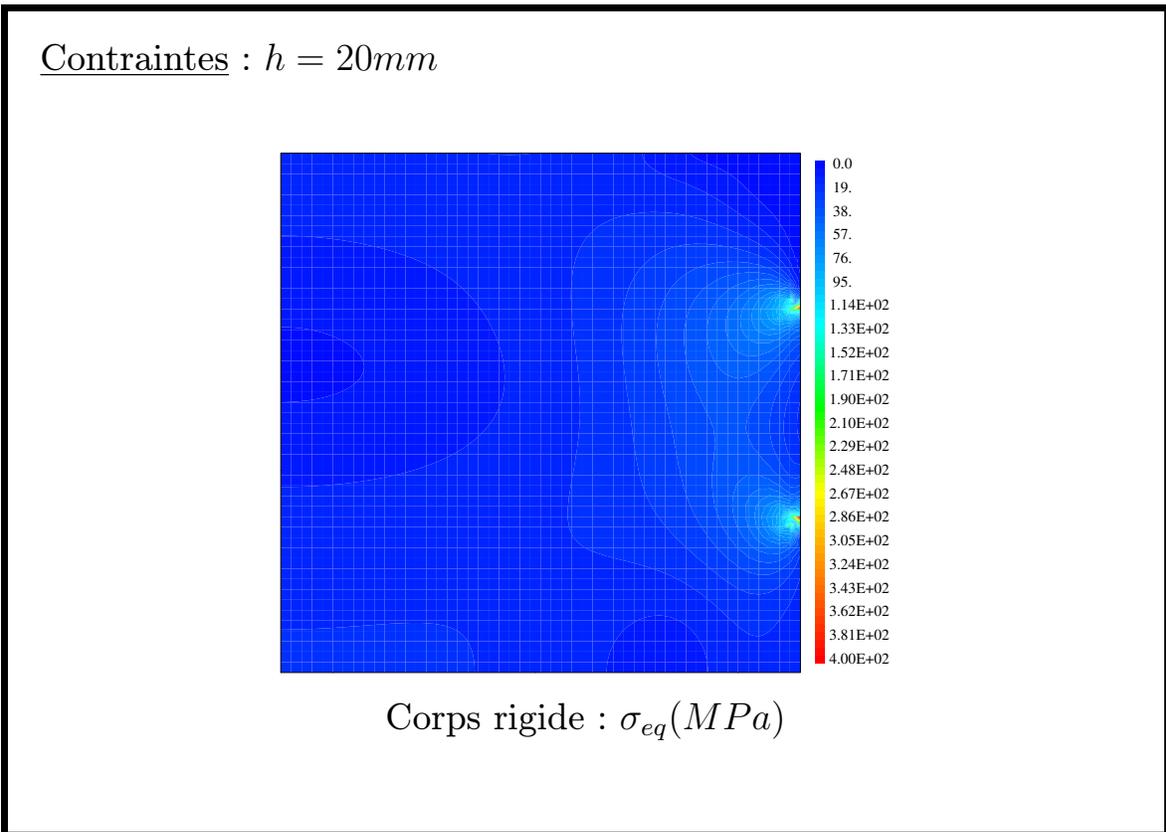
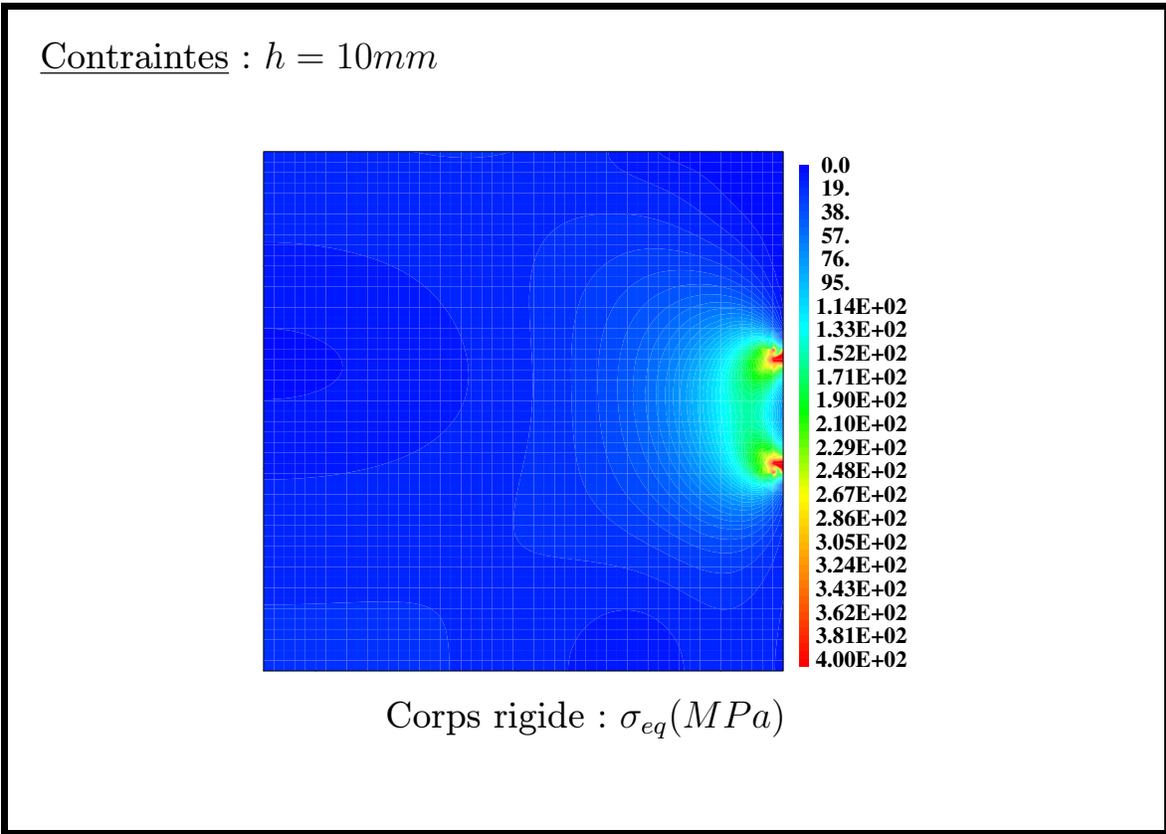
- Corps rigide à l'extrémité de la poutre,
- Liaison complète avec la poutre (déplacement et rotation),
- Liaison complète avec le massif (déplacement).

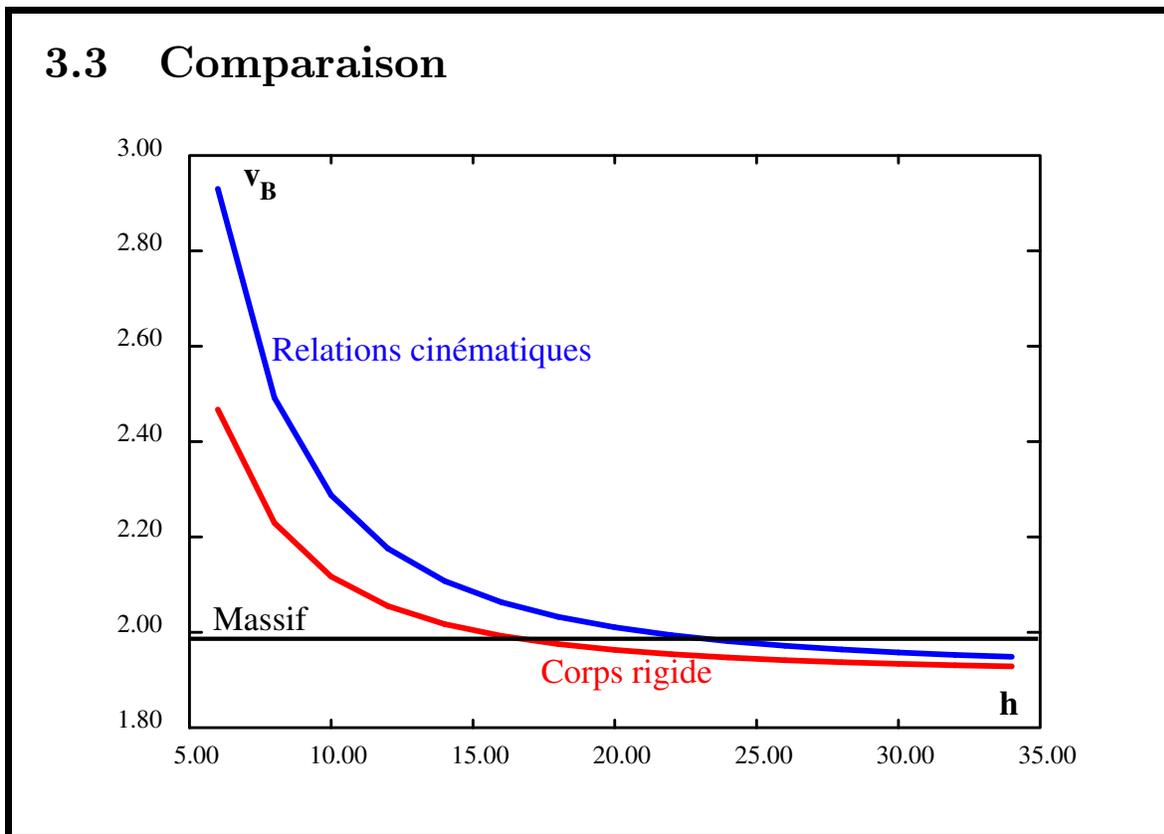
La deuxième solution proposée pour faire le raccord entre la poutre et le massif est de placer une poutre rigide perpendiculaire à la poutre initiale en A . Cet élément rigide est complètement lié en déplacement et en rotation à la poutre. Par ailleurs, il est complètement lié en déplacement au massif.

Cet élément rigide peut représenter la section rigide de l'extrémité de la poutre. Il contient autant d'éléments qu'il le faut pour assurer la parfaite continuité de déplacements avec le massif. On donne à cet élément rigide une longueur h , qui est le paramètre de notre étude.

Les figures suivantes présentent les états de contrainte équivalente de Von Mises pour deux valeurs distinctes de h (10 et 20 mm).

La répartition des contraintes observée est beaucoup plus proche de celle obtenue sur la solution de référence. On retrouve aussi les surcontraintes aux extrémités du segment.





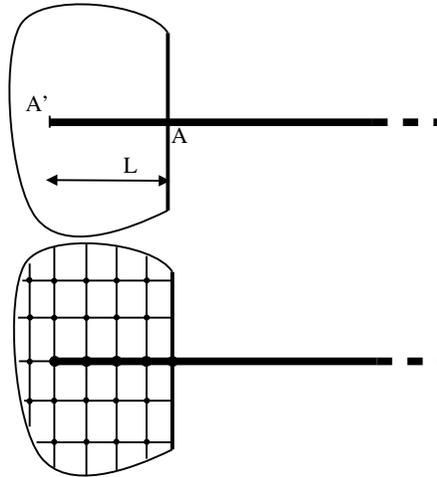
La figure ci-dessus présente une comparaison des valeurs du déplacement vertical du point B (v_B) en fonction de la valeur du paramètre h qui représente :

- la distance entre les points I et J dans la première méthode avec relations cinématiques.
- la longueur de l'élément rigide dans la seconde méthode.

Les deux méthodes donnent des résultats comparables et permettent d'atteindre la valeur de référence en jouant sur le paramètre h .

On constate que la solution avec corps rigide semble un peu meilleure car la valeur de h , qui donne la solution de référence, n'est pas très éloignée de la valeur de l'épaisseur de la poutre. De plus, c'est la méthode qui donne l'état de contrainte le plus représentatif de ce qui est observé en massif.

4 Modélisation poutre pénétrante



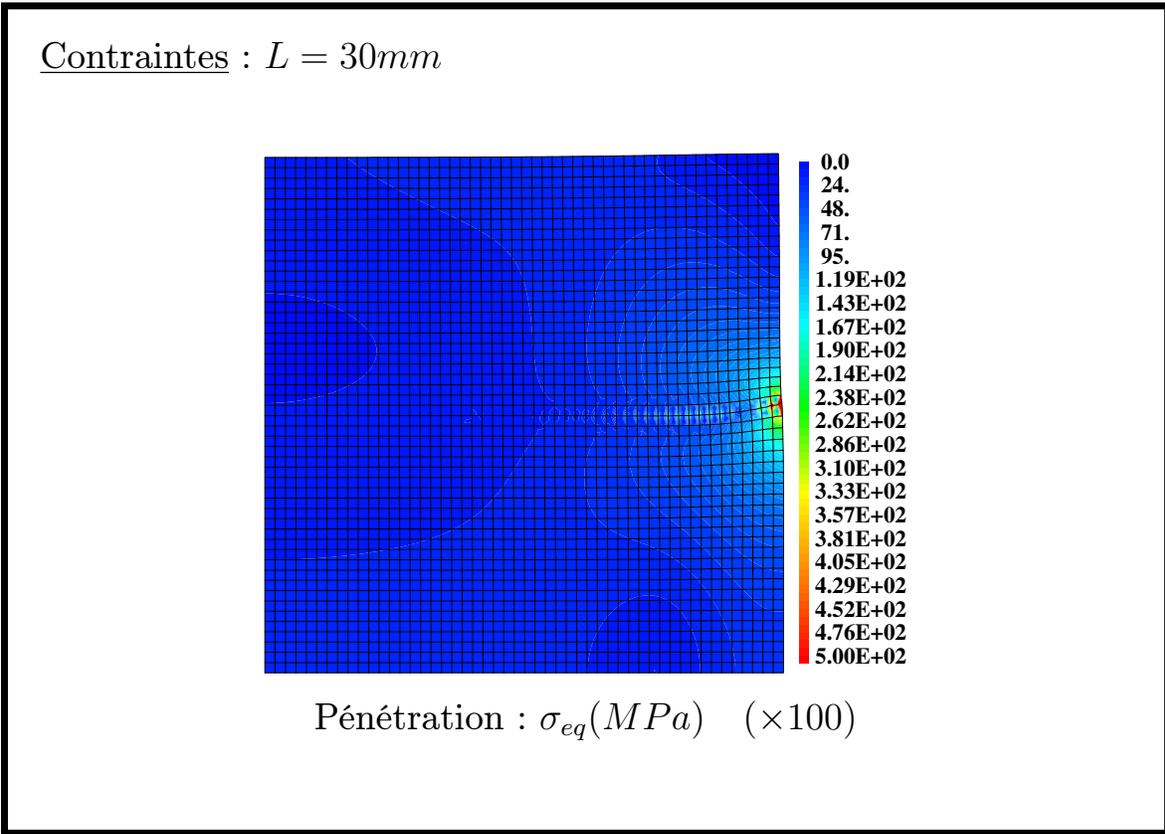
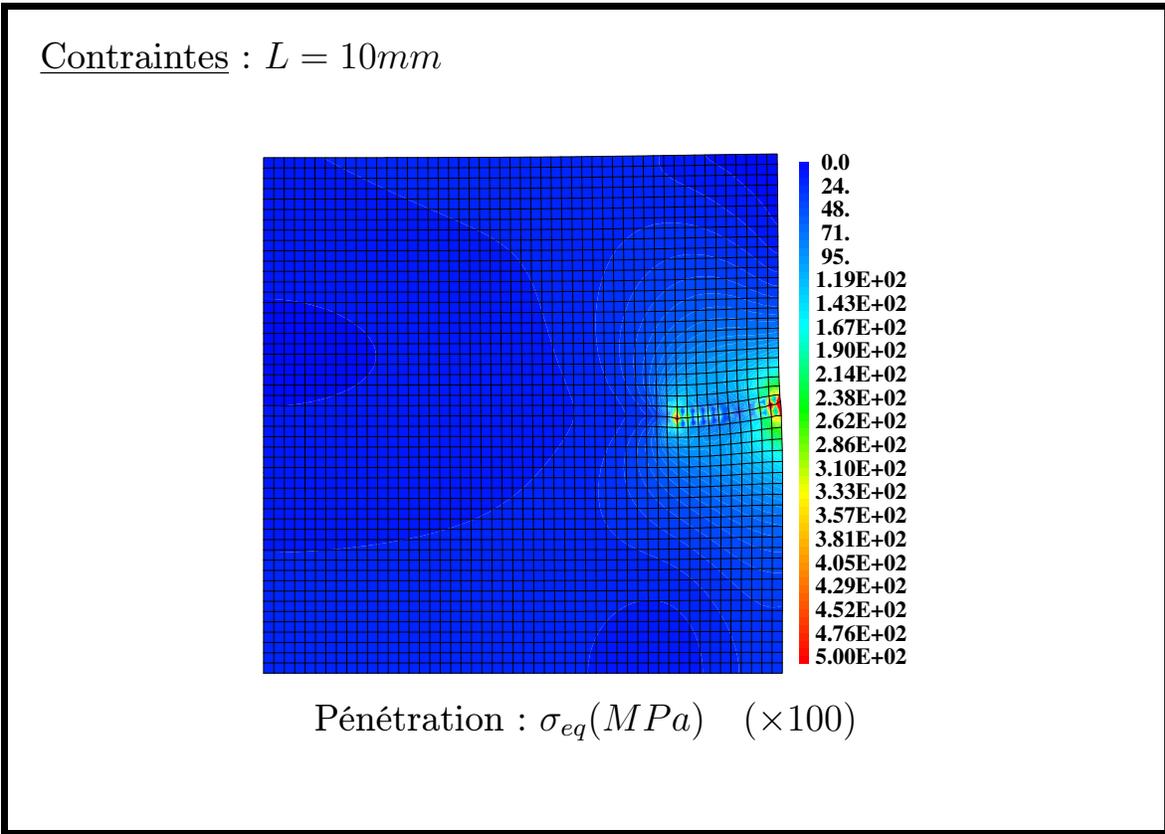
- Pénétration de la poutre dans le massif, 12
- Liaison en déplacement sur la partie commune (longueur L).

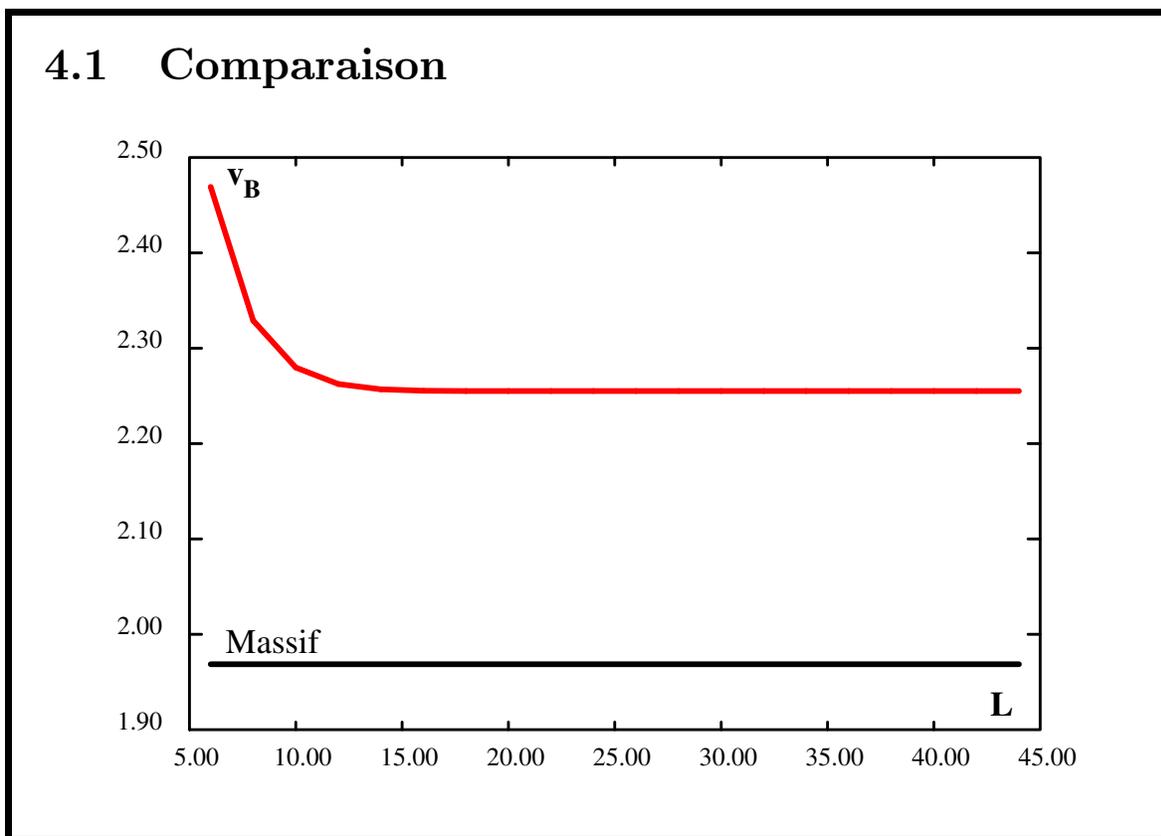
Nous proposons maintenant une troisième méthode pour raccorder la structure massive et la structure poutre.

Le maillage de la barre pénètre le maillage massif et on impose un raccord sur toute la longueur L de pénétration.

Les figures suivantes présentent les états de contrainte équivalente de Von Mises pour deux valeurs distinctes de L (10 et 30 mm).

La répartition des contraintes observée est bien-sûr très différente de celle obtenue pour la solution de référence. On retrouve des surcontraintes un peu partout le long de la ligne de raccord.





La figure ci-dessus présente les valeurs du déplacement vertical du point B (v_B) en fonction de la valeur du paramètre L qui représente la longueur de la ligne de raccord entre la poutre et le massif.

On constate qu'il n'est pas possible d'obtenir des résultats corrects avec cette approche. En effet, ce type de raccord crée des déformations trop importantes dans le massif, qui ne correspondent pas à la réalité.

Cette méthode de raccord est donc à proscrire.

5 Conclusions

- Modélisation d'un encastrement,
- Raccord entre poutre et massif,
- Deux approches «correctes» :
 - Relations cinématiques,
 - Ajout d'un élément rigide.mais paramètre de longueur à ajuster...
- Une approche «incorrecte» :
 - Pénétration de la poutre dans le massif.
- Autres solutions : éléments de raccords ?

Nous avons présenté trois approches pour modéliser un encastrement d'une poutre dans un massif. La méthode du raccord cinématique et celle de l'ajout d'un élément rigide entre la poutre et le massif sont correctes. Elle nécessitent néanmoins l'ajustement d'un paramètre de longueur.

L'approche qui consiste à faire pénétrer la poutre dans le massif donnent des résultats faux quelle que soit la longueur de pénétration.

Les idées proposées ici peuvent aussi s'appliquer à l'encastrement d'une plaque dans un massif.

Outre les solutions proposées ici, des travaux sont réalisés par différents chercheurs afin de développer des éléments de *transition* spécialement adaptés à ce type de problème [1]. Leur implantation dans les codes de calcul n'est pas encore systématique et ces éléments sont encore à utiliser avec méfiance.

Références

- [1] Gmür T.C. et Schorderet A.M., A set of three-dimensional solid to shell transition elements for structural dynamics *Computers and Structures*, vol 46, no4, 1993.