Exercices sur les matrices.

I Produits

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = ABC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = BCA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = -12$$

$$P_3 = CAB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -10 & 10 & -10 \\ +1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

II Vecteurs

a) $\vec{u_1} \begin{pmatrix} 3 \\ \cancel{2}\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Base : $\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cancel{-2}\ 3 = \cancel{-5}\ -6$

$\rightarrow$ Base orthogonale car produit scalaire nul, maispasorthonormée

b) $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} & & (2+1) & (2+3) \end{array}$$

$$\mathrm{Det}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots$$

$\rightarrow$ Base.

c) $\vec{w_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{w_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{w_3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

recherche directe : $\alpha \vec{w_1} + \beta \vec{w_2} + \gamma \vec{w_3} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma = \beta$$

ne forment pas une base.

Rq on a : $\vec{w_1}+\vec{w_2}+\vec{w_3}=\vec{0}$ → pas une base.

III Changements de base

a) base $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{v_3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Soit $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ matrice de passage.

on a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ (x,y,z) coordonnées ancienne base

(x',y',z') ——— nouvelle —

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Calcul de P^{-1} : $\det(P)=-4$.

Matrice des Cofacteurs $=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-2&-2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$

$\rightarrow P^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&0&-2\\0&-2&-2\\-2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

Vérif. $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\end{pmatrix}$

b)
$$\begin{tikzcd}
\underset{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{R}^3 \\
\underset{(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "M'"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} M=P\,M'\,P^{-1} \\ \Leftrightarrow M'=P^{-1}\,M\,P \end{array}}$$

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1/2 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV Valeurs propres

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : $\det(A_1 - \lambda I) = 0 \iff \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$1+2-3$

$$\iff \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ \lambda-2 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} (1-2) = 0 \iff (2-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda+1) = 0 \iff \boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}}$$

Vecteurs propres :

$\underline{\lambda_1 = 1}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}}$$

$$\vec{u_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

$\vec{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_3 = 5}$ $\begin{cases} -3x+y+z=0 \\ x-3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=y \\ 2x=z \end{cases}$

$\vec{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

avec $\boxed{A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Det}(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} (1+2+3)$

$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ $(3-1)$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda+1) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$

$\boxed{\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2}$

Vecteurs propres : $\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x \quad - z = 0 \\ x \quad + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x \quad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

non diagonalisable

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(A_3 - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots$$

$(1+2+3)$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2-1)$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$$

Vecteurs propres :

$\lambda_1 = -2$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \quad \vec{u_1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases} \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 2$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \vec{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A_4 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 1) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = 1$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0 \iff z = y - x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y - x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 1$.

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \qquad \vec{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisable. $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} P_3 = \begin{vmatrix} 0 & +2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(2+1) = \boxed{-6}$$

$$\text{Cofact} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P_3^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1 & 0 & \frac{-1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=0 & 0 & \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=1 \end{pmatrix}$$

Soit $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (5)

1. Calculer les valeurs propres de A
2. " vecteurs propres associés
3. La matrice est-elle diagonalisable ?
4. Donner les formules de changement de base, et les matrices de passage.

---

(1) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$ ← on remplace ligne 2 par ligne 2 + ligne 1

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

on remplace colonne 2 par colonne 2 − colonne 1.

$$\det(A-\lambda I) = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda-1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

on développe suivant la 2° ligne

$$\det(A-\lambda I) = (3-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)\left[-3\lambda+\lambda+\cancel{3}-\lambda^2\cancel{-3}\right] = +(3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda)$$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = -2$.

(2) * Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 0$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u} \iff \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 & (1) \\ x + 2y - 3z = 0 & (2) \end{cases}$ on fait : (1)+(2) : $3x+3y=0 \Rightarrow y=-x$

on remplace dans (1) : $x - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3}x$.

Vecteur propre de Base : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 3$.

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A\vec{u} = \lambda_2\vec{u} \iff \begin{cases} 2x + y - 3z = 3x \\ x + 2y - 3z = 3y \\ 2x + y - 3z = 3z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y-3z=0 \\ x-y+3z=0 \\ 2x+y-6z=0. \end{cases}$$

on fait (1)+(3) : $-3x+3z=0 \Rightarrow z=x$
on remplace dans (1) : $-4x+y=0 \Rightarrow y=4x$.

$\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

* Vecteurs propres associés à $\lambda_3=-2$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $A\vec{u}=\lambda_3\vec{u}=-2\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=-2x \\ x+2y+3z=-2y \\ 2x+y-3z=-2z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y-3z=0 \\ x+4y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

on fait (1)+(2) : $5x+5y=0 \Rightarrow y=-x$
$x-4x+3z=0 \Rightarrow z=x$.

$\vec{u_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ vecteur propre de base

(3) Les 3 valeurs propres sont distinctes $\Rightarrow$ la matrice A est diagonalisable.

(4) Soit $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\-3&4&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ la matrice de Passage
(formée des 3 vecteurs propres de base $\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3}$)

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{u_3} \end{array}$$

On a (formules de changement de Bases) :

$D=P^{-1}AP \Leftrightarrow$ où A : matrice exprimée dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
D : matrice exprimée dans la base $(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})$

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Calcul de P^{-1} (inverse de P) :

$$\det(P)=\begin{vmatrix}3&1&1\\-3&4&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&5&0\\-3&4&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}-3&-1\\1&1\end{vmatrix}=\boxed{10}$$

Matrice des Cofacteurs : $\mathcal{C}=\begin{pmatrix}5&2&-7\\0&2&-2\\-5&0&15\end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{C}^t=\begin{pmatrix}5&0&-5\\2&2&0\\-7&-2&15\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\mathcal{C}^t=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5&0&-5\\2&2&0\\-7&-2&15\end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

mêmes questions que pour A.

① valeurs propres de B : $\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & 0 \\ -3 & 9 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

on développe suivant la dernière colonne :

$$\det(B-\lambda I) = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)(4+\lambda)(2-\lambda)$$

valeurs propres de B : $\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -4$

② * vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 4$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $B\vec{u} = \lambda_1\vec{u} \Rightarrow B\vec{u} = 4\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4x \\ x - 4y = 4y \\ -3x + 9y + 4z = 4z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ quelconque} \end{cases}$ $\quad \vec{u_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur de base

* vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 2$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $B\vec{u} = \lambda_2\vec{u} = 2\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x \\ x - 4y = 2y \\ -3x + 9y + 4z = 2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ 9y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ z = \frac{9}{2}y. \end{cases}$ $\quad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

* vecteurs propres associés à $\lambda_3 = -4$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $B\vec{u} = -4\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -4x \\ x - 4y = -4y \\ -3x + 9y + 4z = -4z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 9y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{8}{9}z \end{cases}$ $\quad \vec{u_3}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

③ toutes les valeurs propres sont distinctes $\Rightarrow$ la matrice B est diagonalisable.

④ Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \\ 1 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ la matrice de passage

$\quad\quad\uparrow \vec{u_1} \quad \uparrow \vec{u_2} \quad \uparrow \vec{u_3}$.

on a (formule de changement de base) :

$$D = P^{-1} B P \qquad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$D \to$ matrice exprimée dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$B \to$ " " " $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mêmes questions que pour A.

---

① Valeurs propres de C : $\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^3$.

$\lambda = 1$ valeur propre triple $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$

② vecteurs propres associés à $\lambda = 1$.

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $A\vec{u} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \{ z = 0$

$\to$ on obtient un espace de dimension 2 :
tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs de Base -

③ $\to$ Comme on n'a que 2 vecteurs indépendants pour les vecteurs propres, et que la dimension de $\mathbb{R}^3$ est $3 \Longrightarrow$ on ne peut pas trouver une base de vecteurs propres $\Longrightarrow$ <u>C n'est pas diagonalisable.</u>

Soit $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mêmes questions que pour A.

---

colonne 3 + colonne 2

① valeurs propres de E : $\det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -\lambda \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[-1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 - \lambda\right] + \left[-1-\lambda + \dots\right.$

$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 1\right] + \left[1-\lambda\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 2\right] = (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = -1$.

(2) * Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$:

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $E\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = x \\ x + y - z = y \\ 2x - y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$

$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

* Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 2$:

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $E\vec{u} = \lambda_2\vec{u}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 2x \\ x + y - z = 2y \\ 2x - y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

* Vecteurs propres associés à $\lambda_3 = -1$.

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $E\vec{u} = \lambda_3 \vec{u}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -x \\ x + y - z = -y \\ 2x - y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ z = -5x \end{cases}$ $\vec{u_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

(3) La matrice E est diagonalisable car toutes les valeurs propres sont distinctes.

(4) Matrice de Passage :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\uparrow \vec{u_1} \quad \uparrow \vec{u_2} \quad \uparrow \vec{u_3}$$

on a : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 = 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = -1 \end{pmatrix}$ $D = P^{-1} E P$

$D \rightarrow$ matrice dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$E \rightarrow$ " " $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ mêmes questions que pour A.

(1) Valeurs propres de F : $\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

on développe suivant la dernière colonne :

$$= 3\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} - (2+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (2+\lambda)(5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 12(\lambda^2-3\lambda-10) - (2+\lambda)(5-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-10) = (\lambda^2-3\lambda-10)(12+\lambda^2-3\lambda-10)$$
$$= (\lambda^2-3\lambda-10)(\lambda^2-3\lambda+2)$$

Les racines sont : $\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1 \quad \lambda_4 = -2$

② * Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 5$:

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que : $F\vec{u} = 5\vec{u} \iff \begin{cases} x+3y = 5x \\ 4x+2y = 5y \\ x-y+5z-3t = 5z \\ 2x+4z-2t = 5t \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -4x+3y=0 \\ 4x-3y=0 \\ x-y-3t=0 \\ 2x+4z-7t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ t = -\frac{x}{9} \\ z = -\frac{25}{36}x \end{cases} \qquad \vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ -1/9 \\ -\frac{25}{36} \end{pmatrix} \text{ vecteur propre de base.}$$

* Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = 2$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} x+3y = 2x \\ 4x+2y = 2y \\ x-y+5z-3t = 2z \\ 2x+4z-2t = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+3y=0 \\ 4x=0 \\ x-y+3z-3t=0 \\ 2x+4z-4t=0. \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \qquad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vecteur propre de base.}$$

* Vecteurs propres associés à $\lambda_3 = 1$

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $F\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x+3y = x \\ 4x+2y = y \\ x-y+5z-3t = z \\ 2x+4z-2t = t \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ 4z-3t=0 \end{cases}$

$\vec{u_3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vecteur propre de base.

* Vecteurs propres associés à $\lambda_4 = -2$:

on cherche $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ tels que $F\vec{u} = -2\vec{u} \iff \begin{cases} x+3y = -2x \\ 4x+2y = -2y \\ x-y+5z-3t = -2z \\ 2x+4z-2t = -2t \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+7z-3t=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ z=-\frac{x}{2} \qquad t=-\frac{x}{3} \end{cases} \qquad \vec{u_4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ vecteur propre de base}$$

③ les valeurs propres sont toutes distinctes → F est diagonalisable.

④ Matrice de Passage : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4/3 & 0 & 0 & -1 \\ -1/9 & 1 & 3 & -1/2 \\ -\frac{25}{28} & 1 & 4 & -1/2 \end{pmatrix}$

on a $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ on a : $D = P^{-1} F P$

$D \to$ matrice dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$

$F \to$ ———— $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{v})$

$A_{10} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Det}(A_{10} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3-\lambda & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -8-\lambda & -3 & -3 \\ 6 & 3-\lambda & 2 \\ 26 & 7 & 10-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -8-\lambda & -3 & 0 \\ 6 & 3-\lambda & \lambda-1 \\ 26 & 7 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda) \left[(-8-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & \lambda-1 \\ 7 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 6 & \lambda-1 \\ 26 & 3-\lambda \end{vmatrix} \right)$

$= (2-\lambda) \left((-8-\lambda) \left[9 + \lambda^2 - 6\lambda - 7\lambda + 7 \right] + 3 \left[18 - 6\lambda - 26\lambda + 26 \right] \right)$

$= (2-\lambda) \left((-8-\lambda) \left[16 - 13\lambda + \lambda^2 \right] + 3 \left[-32\lambda + 44 \right] \right)$

$= (2-\lambda) \left[\cancel{-128} + 104\lambda - 8\lambda^2 - 16\lambda + 13\lambda^2 - \lambda^3 - 96\lambda \cancel{+132} \right]$

$= (2-\lambda) \left[4 - 8\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 \right]$

$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 & \lambda - 1 \\ \hline 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 & -\lambda^2 + 4\lambda \\ -4\lambda + 4 & -4 \end{array}$

$= (2-\lambda)(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = -(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2}$

$$\begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ 6x + y + 2z - t = 0 \\ 26x + 7y + 8z - 2t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x - 3y - 3z + t = 0 \\ -4x - 2y - z = 0 \\ 10x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y = 0 \Leftrightarrow 2x = -3y \\ z = -4x - 2y = 6y - 2y = 4y \\ t = 10x + 3y + 3z = -15y + 3y + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2\, y \\ y \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{espace dim } 1.$$

$\rightarrow$ non diagonalisable !

Règle de Sarrus pour matrice 3 x 3.

ex 1

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Det = Σ produit des termes des 3 diagonales complètes du haut gauche $\rightarrow$ bas droite

$- \Sigma$ ——— ——— ——— ——— du haut droit $\rightarrow$ bas gauche.

$$(-1 \cdot -1 - 1) - (-1 + 1 + 1)$$
$$= -3 - 1 = \underline{-4}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A_{11} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & C_3-C_2 & C_4-C_3 \\ = & \begin{vmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix.} & \begin{matrix} 1 \\ 1-\lambda \\ -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -2+\lambda \\ 2-\lambda \\ 0 \end{matrix} & \begin{vmatrix.} 0 \\ 0 \\ -2+\lambda \\ 2-\lambda \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-2 & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & \lambda-2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = +(\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)^2(-1+\lambda^2-3) = (\lambda-2)^2(\lambda^2-4)$$
$$= (\lambda-2)^3(\lambda+2)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \qquad \lambda_4 = -2$

$$\begin{cases} -x+y+z+t=0 \\ x-y-z-t=0 \\ x-y-z-t=0 \\ x-y-z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-y-z-t=0$$

dim 3 $\Rightarrow$ diagonalisable

$$x = y+z+t \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_{12} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -2\lambda & 3+\lambda \\ 2 & 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -2\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3+\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ 4 & 4 & -2\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(3+\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & -3+\lambda \\ 4 & 4 & -2\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)\left[(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3+\lambda \\ 4 & -2\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & \lambda-3 \\ 4 & -2\lambda \end{vmatrix}\right]$$

$$= -(3+\lambda)\left[(-1-\lambda)\left[2\lambda+2\lambda^2+12-4\lambda\right]+4(8\lambda-4\lambda+12)\right]$$

$$= -(3+\lambda)\left[-2\lambda-2\lambda^2-12+4\lambda-2\lambda^2-2\lambda^3-12\lambda+4\lambda^2+32\lambda-16\lambda+48\right.$$

$$= -(3+\lambda)\left[-2\lambda^3 + 6\lambda + 36\right]$$

$$= -2(\lambda+3)(-\lambda^3 + 3\lambda + 18)$$

$$= +2(\lambda+3)(\lambda-3)(+\lambda^2+3\lambda+6)$$

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3 + 3\lambda + 18 & \lambda - 3 \\ -3\lambda^2 + 3\lambda + 18 & -\lambda^2 - 3\lambda \\ -6\lambda + 18 & -6 \end{array}$$

$\underbrace{\lambda_1 = 3 = \lambda_2}_{\text{valeur double}}$ $\underbrace{\lambda_3 = \lambda_4 = -3}_{\text{valeur double.}}$

* Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} -4x - 4y - 2z - 2t = 0 \\ -4x - 4y - 2z - 2t = 0 \\ 2x + 2y + 2z + 4t = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y + z + t = 0 & (1) \\ x + y + z + 2t = 0 & (2) \\ x + y + 2z + t = 0 & (3) \\ (3) + (2) = (1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = t \\ y = -t - x \end{cases} \to \text{dimension } 2.$$

$\Rightarrow$ on peut trouver 2 vecteurs propres indépendants :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -t-x \\ t \\ t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

* Vecteurs propres associés à $\lambda_3 = \lambda_4 = -3$

$$\begin{cases} +2x - 4y - 2z - 2t = 0 \\ -4x + 2y - 2z - 2t = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 4t = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 0 & (1) \\ x - 2y - z - t = 0 & (2) \\ -2x + y - z - t = 0 & (3) \\ (3^e \text{ équation redondante} : (3) = -(1) - (2)) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z + 2t = 0 \\ x - 2y - z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = -x - t \\ \to \text{dimension } 2. \end{cases}$$

2 vecteurs propres indépendants :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x-t \\ t \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_3} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_4} \Rightarrow A \text{ diagonalisable.}$$

V Exercice de Synthèse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $$\operatorname{Det}(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} L_1+L_2+L_3$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2-C_1,\; C_3-C_1}{=} -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

<u>Vecteurs propres associés à $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.</u>

$$(A-\lambda_2 I)\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{cases} -x-y-z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0$$

Dim 2.

$$\vec{u} = x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

<u>Vecteurs propres associés à $\lambda_1 = -1$</u>

$$(A-\lambda_1 I)\vec{u} = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x-y-z=0 \iff \cancel{\text{Dim}} \\ -x-z+2y=0 = \\ -x-y+2z=0 \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $3x - 3y = 0 \iff \begin{cases} x=y \\ x=z. \end{cases}$

$(1)-(3)$: $3x - 3z = 0$

$$\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

b)
c) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det}(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3. \qquad \text{Cofact} = \begin{pmatrix} 1 & +2 & -1 \\ +1 & -1 & +2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP.$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$ on a : $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3 & -1/3\\ \frac{-1}{3} & 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\alpha = 2/3 \qquad \beta = \frac{1}{3} \qquad \gamma = 4/3.$

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\8/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}.$$

e) $P\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\8/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} = A\vec{u}.$

on a : $A = PDP^{-1} \iff A\vec{u} = (PD)\underbrace{(P^{-1}\vec{u})}_{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}} = P\left(D\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right)$

$= P\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}.$

$$\begin{tikzcd}
\underset{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \underset{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}{\mathbb{R}^3} \\
\underset{(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "D"] & \underset{(\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3})}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

$\vec{u} \longmapsto A\vec{u}.$

$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \longmapsto D\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$

$\iff A\vec{u} = P\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}.$

Analyse Vectorielle.

a) $U(x,y,z) = x^2 + \frac{y}{zx} - z^3$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \left(2x - \frac{y}{zx^2}\right)dx + \frac{1}{zx}dy - \left(\frac{y}{xz^2} + 3z^2\right)dz$$

$$\vec{\text{grad}}\,U = \begin{pmatrix}2x - \frac{y}{zx^2}\\ \frac{1}{zx}\\ -\frac{y}{xz^2} + 3z^2\end{pmatrix}$$

b) $\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = y - \frac{z}{xy^2} - \frac{x^2y}{z^2}$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} xy - zy \\ z/xy \\ x^2y/z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{z} - \frac{1}{xy} \\ -y - 2xy/z \\ -z/x^2y + z \end{pmatrix}.$$

c) En coordonnées polaires.

on sait que $\vec{grad}\,U \cdot d\vec{M} = dU$.

En polaires : $\vec{OM} = r\,\vec{e_r} \Rightarrow d\vec{M} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

par identification, $\vec{grad}(U) = A\,\vec{e_r} + B\,\vec{e_\theta} + C\,\vec{k}$.

$$\Rightarrow A = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad B = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \quad C = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

on utilise la formule de changement de base :

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{pmatrix}$$

et $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$

$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$.

avec $\begin{cases} \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\,\frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-r\sin\theta}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta.$$

d) Voir poly Pastemo

e) Stokes. C la courbe = cercle de xoy $(0,R)$ sens trigo.

On considère une surface dont le bord est délimité par C → disque de xoy $(0,R)$.

$$\oint_C \vec{v}\cdot\vec{dl} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{dS} \qquad \vec{dS} = \vec{k}\,.dx\,dy$$

il suffit de calculer la coordonnée suivant $\vec{k}$ du $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{v})$.

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 12 - 2 = 10.$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{v}\cdot\vec{dl} = \iint_S 10\,dx\,dy = 10 \text{ Aire (Disque)} = \boxed{10\pi R^2}$$

b) <u>Th. de Ostrogradski</u> S = surface fermée ~~boule~~ sphère (O, R).

V = boule (O, R).

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \mathrm{div}(\vec{A})\,dV = 3\iiint_V dV = 3 \text{ volume (Boule O, R)}$$

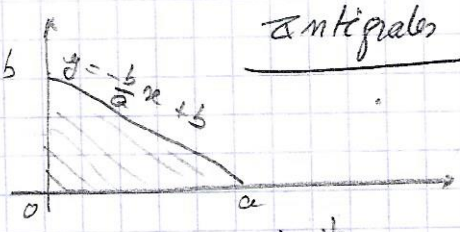
$$= 3\,\frac{4}{3}\,\pi R^3 = \boxed{4\pi R^3}$$

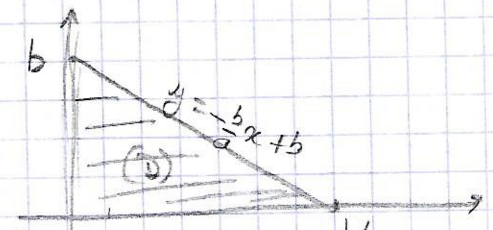
avec $\mathrm{div}(\vec{A}) = 5 + 4 - 6 = 3$.

Intégrales de Surface

Exercice 6

a) $I = \iint_D x^2 \, dS$





$$I = \int_0^a \left[\int_0^{-\frac{b}{a}x + b} x^2 \, dy \right] dx$$

$$I = \int_0^a \left[x^2 y \right]_0^{-\frac{bx}{a}+b} dx = \int_0^a \left(-\frac{b}{a}x^3 + b x^2 \right) dx$$

$$I = \left[-\frac{b}{a}\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} \right]_0^a = -b\frac{a^3}{4} + \frac{ba^3}{3} = \boxed{\frac{ba^3}{12}}$$

b) $I = \iint_D (x^3 + y^3) \, dS \qquad D = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

intérieur d'une ellipse centre O, (a, b)

chgmt de variables :

$$\begin{cases} x = r a \cos\theta & \theta \in [0, \pi/2] \\ y = r b \sin\theta & r \in [0, 1] \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & +br\cos\theta \end{vmatrix} = \underline{ab\,r}$$

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \left(r^3 a^3 \cos^3\theta + r^3 b^3 \sin^3\theta \right) ab r \, dr \, d\theta$$

$$\cos^3\theta = \cos\theta(1 - \sin^2\theta)$$
$$\sin^3\theta = \sin\theta(1 - \cos^2\theta)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[r^3 a^3 \cos\theta(1 - \sin^2\theta) + r^3 b^3 \sin\theta(1 - \cos^2\theta) \right] ab r \, dr \, d\theta$$

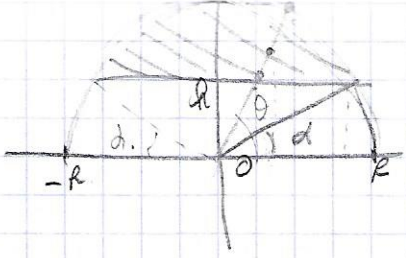
$$I = ba^4 \int_0^1 r^4 \left[+\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} dr + ab^4 \int_0^1 r^4 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} dr$$

$$I = ba^4 \int_0^1 r^4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) dr + ab^4 \int_0^1 r^4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) dr$$

$$= \frac{2}{3} ba^4 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 + \frac{2}{3} ab^4 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{3} ba \left[\frac{a^3}{5} + \frac{b^3}{5} \right]$$

$a = b = 1$ (Cercle) $\quad 2(1^3 + 1^3) = 4$

c) $I = \iint_D y \, ds$



α connu, R connu - $\frac{h}{R} = \sin\alpha \Rightarrow h = R\sin\alpha$.

Chgmt de variable: $x = r\cos\theta$ $\quad$ $\theta \in [\alpha, \pi-\alpha]$.
$y = r\sin\theta$ $\quad$ pour une valeur donnée de θ, r varie de $h/\sin\theta$ à R

$$\Rightarrow I = \int_\alpha^{\pi-\alpha} \int_{h/\sin\theta}^{R} r\sin\theta \; r\,dr\,d\theta = \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_{h/\sin\theta}^{R} d\theta$$

$$= \int_\alpha^{\pi-\alpha} \left(\sin\theta \; \frac{R^3}{3} - \frac{h^3}{3\sin^3\theta}\right) d\theta = \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sin\theta \; \frac{R^3}{3} - \frac{h^3}{3\sin^2\theta} \; d\theta$$

$$= \left[-\frac{R^3}{3} \cos\theta\right]_\alpha^{\pi-\alpha} + \frac{h^3}{3}\left[\cotan\theta\right]_\alpha^{\pi-\alpha} = -\frac{2h^3}{3}\cotan\alpha + \frac{2R^3}{3}\cos\alpha$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + \cotan\theta^2 = -(\cotan\theta)'$$

$$= -2\frac{R^3}{3}\sin^2\alpha\cos^3\alpha + \frac{2R^3}{3}\cos\alpha = \frac{2}{3}R^3\cos\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) = \boxed{\frac{2}{3}R^3\cos^3\alpha}$$

Exercice 7.

a) $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

Equation caractéristique: $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1$.

$r_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ ↗ 3, ↘ 2.

Solution de l'Equation homogène:

$Y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

Recherche d'une solution particulière:

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$ tel que: $\Rightarrow \begin{cases} C_1' e^{3x} + C_2' e^{2x} = 0 \\ 3C_1' e^{3x} + 2C_2' e^{2x} = xe^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2' e^{2x} = xe^x \\ C_1' = -C_2' e^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2' = xe^{-x} \\ C_1' = -xe^{-2x}. \end{cases}$

$$c_2' = -x e^{-x} \Rightarrow c_2 = (x+1)e^{-x} \quad \left(= \int -x e^{-x} dx \text{ par IPP} \right)$$

$$c_1' = x e^{-2x} \Rightarrow c_1 = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-2x} \quad (\text{par IPP})$$

$$\Rightarrow z(x) = -\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{x} + (x+1)e^{x} = e^{x}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right).$$

Solution générale de l'Équation :

$$\underline{y(x) = Y(x) + z(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + e^{x}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)}$$

b) $y'' - 2y' + y = x.$

Équa° caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow (r-1)^2 = 0 \rightarrow r = 1$ solution double.

$\Rightarrow$ Solu° g$^{\underline{ale}}$ de l'Équa° homogène : $\underline{Y(x) = c_1 x e^{x} + c_2 e^{x}}$

Recherche d'une solution particulière par la variation des constantes :

$$z(x) = c_1(x)\, x e^{x} + c_2(x)\, e^{x} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} (1) & c_1'(x)\, x e^{x} + c_2'(x)\, e^{x} = 0. \\ (2) & c_1'(x)\,(x e^{x} + e^{x}) + c_2'(x)\, e^{x} = x. \end{cases}$$

$(2) - (1) \rightarrow c_1'(x)\, e^{x} = x \Rightarrow c_1'(x) = x e^{-x} \Rightarrow c_1(x) = \int x e^{-x} dx$

IPP : $\underline{c_1(x) = -e^{-x}(x+1)}$.

$c_2'(x) = -x\, c_1'(x) = -x^2 e^{-x} \Rightarrow c_2(x) = \int -x^2 e^{-x} dx$

IPP $\underline{c_2(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}$.

$$\Rightarrow z(x) = -e^{-x}(x+1)\, x e^{+x} + e^{-x}(x^2 + 2x + 2)\, e^{x}$$

$$= -x^2 - x + x^2 + 2x + 2 = \boxed{x+2}$$

Solution g$^{\underline{ale}}$ $\underline{y(x) = Y(x) + z(x) = c_1 x e^{x} + c_2 e^{x} + x + 2}.$

c) $x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = \ln(x)$.

chg^{nt} variable : $x = e^t$ $\Rightarrow$ $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2} e^{-2t} - \frac{dy}{dt} e^{-2t}$$

$\Rightarrow$ Equation devient :

$$e^{2t} y''(t) e^{-2t} - e^{2t} y'(t) e^{-2t} - e^{t} y'(t) e^{-t} + y(t) = t$$

$$\Leftrightarrow y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t.$$

$\hookrightarrow$ Equation du b)

Solution g^{ale} $y(t) = C_1 t e^t + C_2 e^t + t + 2$.

$\hookrightarrow$ chg^{nt} de variable pour retrouver x :

$$\boxed{y(x) = c_1 x e^x + c_2 x + \ln(x) + 2.}$$