Autoévaluation

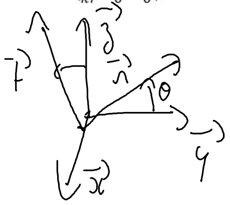
jeudi 8 octobre 2020 14:12

1/ Soit le vecteur $\vec{s} = \begin{pmatrix} 7x^2 + y^2 - ka^2 \\ 6xy \\ 20(h-z)x \end{pmatrix}$ où k, a, h sont des constantes réelles. Calculer $div(\vec{s})$. *(2 min – 2pts)*

$$div(\vec{s}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{s} = 14x + 6x - 20x = 0$$

2/ Soit la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -kz & ky \\ -kz & 0 & 0 \\ ky & 0 & 0 \end{pmatrix}$ définie dans une base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. En effectuant un changement de base pour cette matrice par rotation autour de $\vec{x}$ d'un angle θ, et en utilisant les coordonnées cylindriques, montrer que cette matrice devient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & kr \\ 0 & 0 & 0 \\ kr & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *(10 min – 3pts)*

$(\vec{x}, \vec{r}, \vec{t})$ nouvelle base



$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{x} & \vec{r} & \vec{t} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boxed{P^{-1} = P^T}$ car vecteurs orthogonaux

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -kz & ky \\ -kz & 0 & 0 \\ ky & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & ky\sin\theta - kz\cos\theta & kz\sin\theta + ky\cos\theta \\ -kz & 0 & 0 \\ ky & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

$ky\sin\theta - kz\cos\theta = k(r\cos\theta\sin\theta - r\sin\theta\cos\theta) = 0$

$kz\sin\theta + ky\cos\theta = k(r\sin^2\theta + r\cos^2\theta) = kr$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & kr \\ -kz & 0 & 0 \\ ky & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & kr \\ -kz\cos\theta + ky\sin\theta & 0 & 0 \\ kz\sin\theta + ky\cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

même termes que précédemment $\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & kr \\ 0 & 0 & 0 \\ kr & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 bis/ Diagonaliser cette dernière matrice et rechercher une base de vecteurs propres. *(5 min – 3pts)*

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & kr \\ 0 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda)^2 + kr(kr\lambda) = \lambda((kr)^2 - \lambda^2) = \lambda(kr - \lambda)(kr + \lambda)$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & k_1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ k_1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-\lambda)^2 + k_1(k_1\lambda) = \lambda\left((k_1)^2 - \lambda^2\right) = \lambda(k_1-\lambda)(k_1+\lambda)$$

matrice diagonalisée : $\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_1 \end{pmatrix}$ (diagonalisable car symétrique)

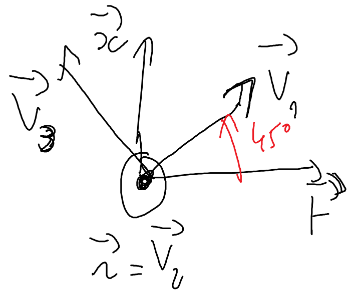
vecteurs propres : $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & k_1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ k_1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$

pour $\lambda = +k_1$: $\begin{cases} -k_1 x_1 + k_1 x_3 = 0 \\ -k_1 x_2 = 0 \\ k_1 x_1 - k_1 x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \vec{V_1}$

pour $\lambda = -k_1$: $\begin{cases} k_1 x_1 + k_1 x_3 = 0 \\ k_1 x_2 = 0 \\ k_1 x_1 + k_1 x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \vec{V_3}$

pour $\lambda = 0$, $\begin{cases} k_1 x_1 = 0 \\ 0\, x_2 = 0 \\ k_1 x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ solution

Ces vecteurs sont dans la base $\vec{x}, \vec{n}, \vec{t} \Rightarrow \vec{V_2} = \vec{n}$



3/ Calculer la différentielle de $f = ayz + bz + c$ avec a, b, c constantes réelles. *(1 min – 1pt)*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = az\,dy + (ay+b)\,dz$$

4/ On donne $dg = \underbrace{(-bz^2 + c)}_{\partial x}\,dx - \underbrace{2bxz}_{\partial z}\,dz$. Que vaut g ? *(2 min – 2pts)*

4/ On donne $dg = (-bz^2 + c)\,dx - 2bxz\,dz$. Que vaut g ? *(2 min – 2pts)*

$\underbrace{(-bz^2 + c)}_{\frac{\partial g}{\partial x}}\,dx\ \underbrace{-2bxz}_{\frac{\partial g}{\partial z}}\,dz$

et donc $\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g(x,y,z) = \text{fonction}(x,z)$

On intègre $\frac{\partial g}{\partial x}/_x \Rightarrow -bz^2x + cx + \text{fonction}(\cancel{y},z) = g(x,z)$

$\frac{\partial g}{\partial z}/_z \Rightarrow -bxz^2 + \text{fonction}(x,\cancel{y}) = g(x,z)$

On cherche une fonction "qui marche". $g(x,y,z) = -bz^2x + cx + A$ avec $A \in \mathbb{R}$

5/ Trouver une solution générale de l'équation différentielle $y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) - \frac{2}{x^2}y(x) = 0$ *(10 min – 3pts)*

En posant $x = e^t$

d'après exo équadiff c)

$$\begin{cases} y''(x) = \left(y''(t) - y'(t)\right)e^{-2t} \\ y'(x) = y'(t)\,e^{-t} \Rightarrow \frac{2}{x}y'(x) = 2e^{-t}y'(t)e^{-t} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'équadiff devient $\left(y''(t) - y'(t)\right)\cancel{e^{-2t}} + 2y'(t)\cancel{e^{-2t}} - 2\cancel{e^{-2t}}y(t) = 0$

$$\Leftrightarrow y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-2) = 9$

$r_{1,2} = -1-3/2 = -2 \qquad \frac{-1+3}{2} = 1$

$$\Rightarrow y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^t$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2x$$

6/ Calculer $\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-e/2}^{e/2}\frac{3F}{2eh}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)dx\,dy$ *(3 min – 3pts)*

car fonction paire

6/ Calculer $\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-e/2}^{e/2} \frac{3F}{2eh}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right) dx\, dy$ *(3 min – 3pts)*

fonction paire

$$= e\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{3F}{2eh}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)dy = \cancel{e}\,\frac{3F}{\cancel{2}\cancel{e}h}\left[y-\frac{4y^3}{3h^2}\right]_0^{h/2}\times\cancel{2}$$

$$= 3\,\frac{F}{\cancel{h}}\left(\frac{\cancel{h}}{2}-\frac{4h^{\cancel{3}2}}{3\times 8h^2}\right)$$

$$= 3F\left(\frac{1}{2}-\frac{h^2}{6h^2}\right)$$

$$= 3F\,\frac{2}{6} = F$$

7/ Calculer $\int_{-e/2}^{e/2}\int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ \frac{3F}{2eh}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right)\\ 0\end{pmatrix} dy\, dz$ *(3 min – 3pts)*

$$\int_{-e/2}^{e/2}\int_{-h/2}^{h/2}\begin{pmatrix} -z\left(\frac{3F}{2eh}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right)\right)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} dy\, dz = 0$$

fonction impaire sur domaine symétrique => 0