ED n°4 : Equations différentielles

Exercice n°1 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : y' + 2y = x^2$
2. $(E_2) : y' + y = 2\sin(x)$
3. $(E_3) : y' - y = (x+1)e^x$
4. $(E_4) : y' + y = x - e^x + \cos(x)$
5. $(E_5) : y' = \dfrac{1}{x}y + x$
6. $(E_6) : y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$
7. $(E_7) : y' + 2xy = e^{x-x^2}$
8. $(E_8) : y' - \tan(x)y = \sin(x)$
9. $(E_9) : y' - 2y = \left(2t^2 - 1\right)e^{t^2}$
10. $(E_{10}) : y' - \dfrac{2x-1}{x^2}y = 1$

Exercice n°2 : Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $(E_1) : \begin{cases} y' = 2y + 4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
2. $(E_2) : \begin{cases} y' - 2y = 2x \\ y(0) = 1/4 \end{cases}$
3. $(E_3) : \begin{cases} \left(x^2+1\right)y' + 2xy = 3x^2 + 1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$
4. $(E_4) : \begin{cases} \sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

Exercice n°3 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : y'' - 2y' + y = x$
2. $(E_2) : y'' + 9y = x + 1$
3. $(E_3) : y'' - 2y' + y = \sin^2(x)$
4. $(E_4) : y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\,e^{-x}$
5. $(E_5) : y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^x$
6. $(E_6) : y'' - 2y' + y = \left(x^2+1\right)e^x + e^{3x}$
7. $(E_7) : y'' + 2y' - y = \cos(x)e^x$
8. $(E_8) : 2y'' - y' - y = \cos(x) - 2\sin(2x)$

Exercice n°4 :

1. $y'' + 2y' + y = (3x-1)e^{-x}$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.
2. $y'' + y' - 2y = 9e^x - 2$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice n°5 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $\ddot{x} + w_0^2 x = 0$ avec les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)(0) = v_0$.
2. $\dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{w}{Q}\dfrac{du}{dt} + w^2 u = w^2 E$ avec les conditions initiales $u(0) = u_0$ et $\left(\dfrac{du}{dt}\right)(0) = 0$.
3. $M\dfrac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\dfrac{dy}{dt}$ avec les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)(0) = 0$.

Exercice n°6 :

1. Montrer que l'équation différentielle
$$(E) : (1+x)\,y'' - 2y' + (1-x) = 0$$
admet sur $I =]-1; +\infty[$ une solution du type $y(x) = e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre (E) en posant $y(x) = z(x) \times e^{ax}$, où z est la nouvelle fonction inconnue.

Exercice n°7 : On considère l'équation différentielle suivante.

$$(E) : x^2y'' + xy' - y = 0$$

1. L'équation (E) est-elle linéaire ?
2. On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et on introduit la fonction $z(t) = y\left(e^t\right)$. Montrer que z vérifie une équation linéaire du second degré à coefficients constants.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle vérifiée par z et en déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.