Equations différentielles

M Spagnesi

Arts et Métiers ParisTech

2022-2023

Définitions

ED du premier ordre : relation liant la fonction et sa dérivée première.

EDL du premier ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

avec a, b et c des fonctions numériques continues.

Vocabulaire

- EDL1 (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ avec a, b et c continues sur I
- **Équation homogène ou sans second membre** associée à (E) :
$$a(x)y' + b(x)y = 0$$
- **Intégrer/Résoudre** (E) consiste à trouver <u>toutes</u> les solutions de (E) sur I, ie les fonction f dérivable sur I tq :
$$\forall x \in I,\ a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$$
- Courbe de f, solution de (E) : **courbe intégrale**
- **Problème de Cauchy** :
$$\begin{cases} a(x)y' + b(x)y = c(x) & (E) \\ y(x_0) = y_0 \text{ condition initiale} \end{cases}$$

Forme réduite d'une EDL1

Soit (E) : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$
Si a ne s'annule pas sur I,

$$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

La forme réduite de (E) est donc :

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x)$$

avec α et β continues

Solutions de l'équation (E_h)

Proposition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction continue sur I.
L'ensemble des solutions de l'équation (E_h) : $y' + a(x)y = 0$ est

$$\mathcal{S}_h = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

où A est une primitive de a sur I.

Démonstration

Application-Résolution de l'équation homogène

Exercice n°1

Résoudre les ED suivantes :

1. $3y' = 5y$
2. $y' - 2xy = 0$
3. $y'\sqrt{1-x^2} = y$
4. $\dfrac{dq}{dt}(t) + \dfrac{1}{RC}q(t) = 0$

Ensemble des solutions de (E)

Théorème

Soient a et b deux fonctions continues sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) : $y' + a(x)y = b(x)$.
La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène associée.

$$\mathcal{S}_{(E)} = \left\{x \mapsto f_p(x) + \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

▸ Démonstration

Point méthode

Résolution de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$

1. On met éventuellement l'équation sous forme réduite si elle ne l'est pas.
2. On résout l'équation homogène associée $y' + a(x)y = 0$.
3. On détermine une solution particulière de l'équation complète f_p.
4. On conclut en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Point méthode

Résolution de (E) : $y' + a(x)y = b(x)$

1. On met éventuellement l'équation sous forme réduite si elle ne l'est pas.
2. On résout l'équation homogène associée $y' + a(x)y = 0$.
3. On détermine une solution particulière de l'équation complète f_p.
4. On conclut en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Mais comment déterminer une solution particulière de (E) ? ?

Nous allons voir différents résultats/méthodes pour déterminer une solution particulière

Principe de superposition

Proposition

Soit (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b des fonctions continues sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si $b = b_1 + b_2$ et si f_1 et f_2 sont respectivement des solutions particulières de (E_1) : $y' + a(x)y = b_1(x)$ et (E_2) : $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors

$$f = f_1 + f_2 \text{ est une solution de } (E)$$

Principe de superposition-Exemple

Considérons l'équation $y' - 2y = 7 + xe^{3x}$.
Pour déterminer une solution particulière, on peut trouver

- une solution particulière de $y' - 2y = 7$, f_{p1}.
- une solution particulière de $y' - 2y = xe^{3x}$, f_{p2}.

Alors, $f_{p1} + f_{p2}$ sera une solution particulière de l'équation complète.

Utilisation d'une solution évidente

Dans certains cas, il peut exister des solutions évidentes.

Par exemple,

- $y' - 2y = 2$, alors une solution évidente est $f_p(x) = ?$

Utilisation d'une solution évidente

Dans certains cas, il peut exister des solutions évidentes.

Par exemple,

- $y' - 2y = 2$, alors une solution évidente est

$$f_p(x) = -1$$

Méthode de variation de la constante

On utilise cette méthode lorsqu'il n'y a pas de solution évidente.

Le principe : On cherche une solution particulière de la forme $f_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$.

*On reprend la solution générale de l'équation homogène, mais on fait **varier la constante**, qui devient une fonction de x.*

Exemple : Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y' - 2xy = 3x$$

Écriture intégrale des solutions d'une EDL1

Proposition

La solution générale de l'équation (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ s'exprime sous forme intégrale

$$f(x) = \underbrace{\lambda e^{-A(x)}}_{\text{solution de } (E_h)} + \underbrace{\left(\int b(x)e^{A(x)}dx\right) e^{-A(x)}}_{\text{solution particulière}}$$

Il n'est pas question d'apprendre cette formule par coeur ! !

Cas particulier des EDL1 à coefficients constants

Équation de la forme $y' + ay = P(x)e^{kx}$, $a, k \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n à coefficient dans $\mathbb{K}$.
On cherche y_p sous la forme :

- $x \mapsto Q(x)e^{kx}$ avec $deg(Q) = n$ si $k \neq -a$
- $x \mapsto xQ(x)e^{kx}$ avec $deg(Q) = n$ si $k = -a$

Exercice n°2

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 2xe^x + e^{-2x}$$

Cas particulier des EDL1 à coefficients constants

Équation de la forme $y' + ay = P(x)\cos(kx)$ ou $P(x)\sin(kx)$,
$a, k \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n à coefficient dans $\mathbb{R}$.
On cherche y_p sous la forme : $x \mapsto Q_1(x)\cos(kx) + Q_2(x)\sin(kx)$
avec $deg(Q_1) = deg(Q_2) = n$

Exercice n°3

Résoudre l'équation suivante

$$(E) : y' + 2y = x\cos(3x)$$

Unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale

Théorème

Pour tout couple $(x_0; y_0) \in I \times \mathbb{K}$, l'équation différentielle

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

admet une unique solution f sur I telle que $f(x_0) = y_0$

Exercice n°4

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de l'équation

$$y' + 2y = 2xe^x + e^{-2x}$$

Exercice n°5

Résoudre les équations différentielles suivantes

(E_1) : $y' + y = xe^{-x} + 1$

(E_2) : $3y' + 2y = x^3 + 6x + 1$

(E_3) : $xy' + 2y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

(E_4) : $y' - 3y = \sin(3x)$

Exercices

Exercice n°6

1. Résoudre le problème de Cauchy suivant :
$$(E_1) : \begin{cases} y' = -5y + 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
2. Déterminer f solution de (E_2) : $y' = -3y + 4e^x$ telle que $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0, -2)$.

Vocabulaire

- **EDL du second ordre** :
$$(E)\,:\, a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$
a, b, c et d des fonctions numériques continues sur I
- **Équation homogène associée à** (E) : équation sans second membre
$$(E_h)\,:\, a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$
- **EDL du second ordre, à coefficients constants** :
$$(E)\,:\, ay'' + by' + cy = d(x)$$
avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et d une fonction numérique continue sur I

Vocabulaire

- **EDL**2 **à coeff constants** :
$$(E)\ :\ ay'' + by' + cy = d(x)$$
- **Équation homogène associée** :
$$(E_h)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$$
- **Équation caractéristique associée** :
$$(E_c)\ :\ ar^2 + br + c = 0$$

Structure de l'ensemble des solutions

Proposition

Soit (E) : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ avec a, b, c et d des fonctions continues sur I.
L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}_{(E)} = \{f_0 + h, h \text{ solution de } (E_h)\}$$

avec f_0 une solution particulière de (E).

Point méthode

Résolution de (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$

1. On résout l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$
2. On détermine une solution particulière de l'équation complète f_0.
3. On conclut en donnant l'ensemble des solutions de (E).

Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$

Proposition

Si (E_c) admet

- deux racines distinctes r_1 et r_2 complexes, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$
avec $A, B \in \mathbb{C}$
- une racine double r_0 complexe, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$$

Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$

Proposition

Si (E_c) admet

- deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$
- une racine double réelle r_0, alors les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme
$$x \mapsto (Ax + B)e^{r_0 x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$
- deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$, alors les solutions de (E_h) sont de la forme
$$x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\beta x) + Be^{\alpha x} \sin(\beta x) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$
$$\text{ou } x \mapsto Ae^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi) \text{ avec } A, \varphi \in \mathbb{R}$$

Point méthode pour la résolution d'une EDL2 homogène

Résolution de $ay'' + by' + cy = 0$

1. On écrit l'équation caractéristique associée :
$$(E_c)\ :\ ar^2 + br + c = 0$$
2. On résout (E_c) dans $\mathbb{C}$
3. Selon que l'on résolve l'ED dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, on applique la proposition correspondante et on donne l'ensemble de solutions.

Applications-Résolution de l'équation homogène

Exercice n°7

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' + y = 0$ dans $\mathbb{C}$
2. $y'' + y' + y = 0$ dans $\mathbb{R}$
3. $y'' - 3y' = 0$ dans $\mathbb{R}$

Application physique

$$(E) : y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0 \text{ avec } \underbrace{\omega_0}_{\text{(fréquence)}} > 0 \text{ et } \underbrace{Q}_{\text{(facteur de qualité)}} > 0$$

$$(E_c) : r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \text{ et } \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right).$$

- Si $\Delta > 0$ ($Q < 1/2$, régime a-périodique)

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right) \text{ et } r_+ = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}\right)$$

$$y(x) = Ae^{r_1(x)} + Be^{r_2 x},\ A, B \in \mathbb{R}$$

Application physique

$$(E) : y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0 \text{ avec } \omega_0 > 0 \text{ et } Q > 0$$

$$(E_c) : r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \text{ et } \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right).$$

- Si $\Delta < 0$ ($Q > 1/2$, régime pseudo-périodique)

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ et } r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$y(x) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q} x} \cos\left(\omega \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} x + \varphi \right) \text{ avec } A,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Application physique

$$(E) : y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0 \text{ avec } \omega_0 > 0 \text{ et } Q > 0$$

$$(E_c) : r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \text{ et } \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right).$$

- Si $\Delta = 0$ ($Q = 1/2$, régime critique)

$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$

$$y(x) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} x} (Ax + B),\ A,\ B \in \mathbb{R}$$

Principe de superposition

Proposition

Soit (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et d fonction continue sur I.
Si $d = d_1 + d_2$ et si f_1 et f_2 sont respectivement des solutions particulières de (E_1) : $ay'' + by' + cy = d_1(x)$ et (E_2) : $ay'' + by' + cy = d_2(x)$, alors

$$f = f_1 + f_2 \text{ est une solution de } (E)$$

Utilisation d'une solution évidente

Dans certains cas, il peut exister des solutions évidentes.

Exercice n°8

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) : y'' + y' + y = 5$$

dans $\mathbb{R}$

Cas d'un second membre polynomiale

(E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et d **polynôme de degré inférieur ou égal à** n.

- Si $c \neq 0$, on cherche y_p sous la forme : $P(x)$
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on cherche y_p sous la forme : $x \times P(x)$
- Si $c = 0$ et $b = 0$, on cherche y_p sous la forme : $x^2 \times P(x)$

où $P(x)$ polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Exercice n°9

Résoudre les équations différentielles suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. (E_1) : $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$
2. (E_2) : $y'' - 2y' = x^2 + x + 1$

Cas d'un second membre polynôme exponentielle

(E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $d(x) = e^{\gamma x}P(x)$, $P(x)$ **polynôme de degré inférieur ou égal à** n et $\gamma \in \mathbb{K}$.

- Si γ non racine de (E_h), on cherche y_p sous la forme : $e^{\gamma x}Q(x)$
- Si γ racine simple de (E_h), on cherche y_p sous la forme : $x \times e^{\gamma x}Q(x)$
- Si γ racine double de (E_h), on cherche y_p sous la forme : $x^2 \times e^{\gamma x}Q(x)$

où $Q(x)$ polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Cas d'un second membre polynôme exponentielle

Exercice n°10

Résoudre l'équation différentielle suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : y'' - y' - 6y = (20x + 14)e^{3x}$$

Cas d'un second membre $P(x)\cos(\gamma x) + Q(x)\sin(\gamma x)$

(E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $d(x) = P(x)\cos(\gamma x) + Q(x)\sin(\gamma x)$, $P(x), Q(x)$ **polynômes de degré inférieur ou égal à** n et $\gamma \in \mathbb{R}$.

- Si $i\gamma$ non racine de (E_h), on cherche y_p sous la forme :
$$P_1(x)\cos(\gamma x) + Q_1(x)\sin(\gamma x)$$
- Si $i\gamma$ racine de (E_h), on cherche y_p sous la forme :
$$x \times (P_1(x)\cos(\gamma x) + Q_1(x)\sin(\gamma x))$$

où $P_1(x), Q_(x)$ polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Cas d'un second membre $P(x)\cos(\gamma x) + Q(x)\sin(\gamma x)$

Exercice n°11

Résoudre l'équation différentielle suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : y'' + y = \cos(x)$$

Unicité d'une solution satisfaisant des conditions initiales

Théorème

Soit $x_0 \in I$, alors pour tout couple $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$, l'équation différentielle

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$$

admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.

Exercice n°12

Résoudre le problème de Cauchy suivant dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \quad (E) \\ y(0) = 5 \text{ et } y'(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice n°13

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = e^x$
2. $(E_2) : y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}$
3. $(E_3) : y'' - 2y = -6\cos(x) + 2x\sin(x)$

Il s'agit de montrer que :

- Une fonction de la forme $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$ est une solution de (E_h)

  Sens "facile"

- Une solution de (E_h) est de la forme $f(x) = \lambda e^{-A(x)}$.

  Sens "difficile"

  <u>Indication</u> : On pourra utiliser une fonction auxiliaire.

retour

Il s'agit de montrer que :

- une fonction qui s'écrit $f_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$ est une solution de (E).

  Sens "facile"
- Une solution de (E) s'écrit sous la forme $f_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$

  Sens "difficile"

  Indication : On pourra utiliser une fonction auxiliaire.

retour