Mars 2007

Cours de Licence *Sciences Mécaniques et Technologies Industrielles*
–
LA-336 : Modélisation des structures

Rédaction sous LaTeX par Loïc Andolfatto

Table des matières

Théorèmes de l'énergie en élasticité

1 Introduction

1.1 Objectifs

On cherche à obtenir des solutions approchées des problèmes d'élasticité. Pour cela, nous allons procéder à la mise en place de nouvelles formulations des problèmes.

1.2 Hypothèses

- statique
- hypothèse des petites perturbations
- élasticité linéaire
- pas d'effets thermiques

1.3 Domaines d'application

- élasticité *3D* : pour fixer les idées
- poutres
- plaques et coques
- problèmes de déformations planes et de contraintes planes

Pour les 3 derniers domaines évoqués, l'adaptation est assez facile. On peut aussi appliquer les méthodes mises en oeuvre dans ce chapitre à des problèmes de thermique.

1.4 Idées

On veut trouver une bonne approximation des solutions.

La Fig.1.1 illustre le fait que la fonction g soit la fonction affine qui minimise la distance entre f et g : $d = \int_0^L (f-g)^2$. Pour construire une solution approchée avec cette méthode, il faut se donner :

- la forme de la solution, ici : $g: \ x \mapsto a \cdot x + b$;
- une norme dans l'espace de la solution considérée.

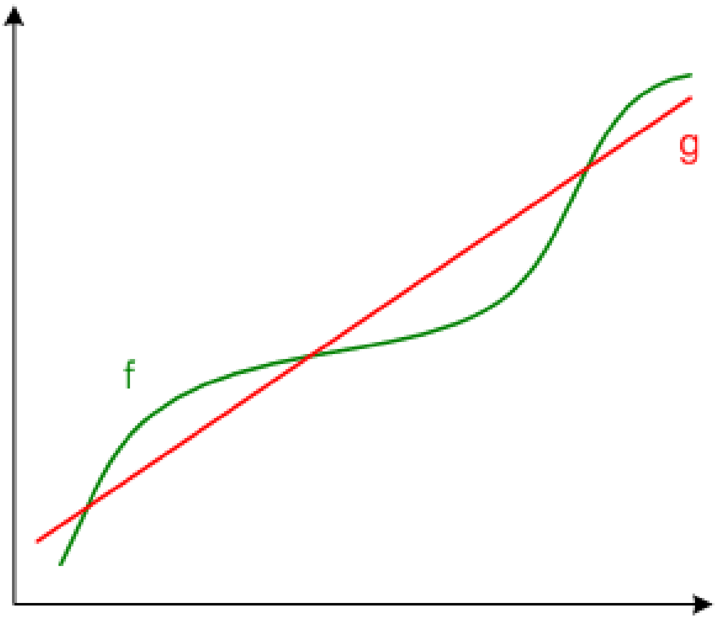

FIG. 1.1 – Graphe d'une fonction et de son approximation

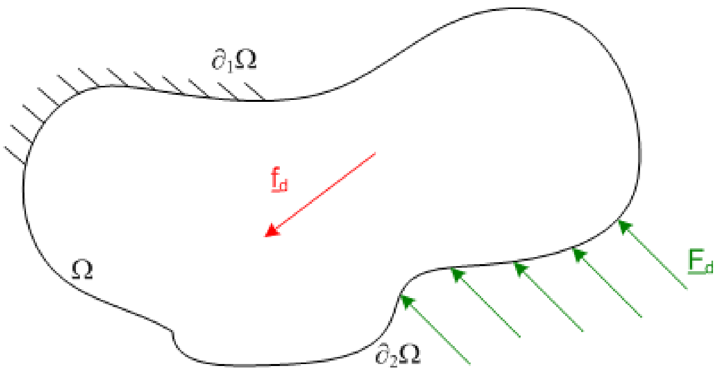

FIG. 1.2 – Un problème de mécanique "bien posé"

2 Notions de champs admissibles

Problème de référence

Le problème schématisé sur la FIG. 1.2 consiste à trouver un couple $(\underline{u};\underline{\underline{\sigma}})$ qui soit solution du problème sur Ω. Pour cela, on utilise les bases de la mécanique des milieux continus vues au premier semestre :

– équilibre :

$$\begin{cases} \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_d = 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ symétrique} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2\Omega \end{cases}$$

– liaison :

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \\ \underline{u} \text{ pour assurer les hypothèses du milieu continu} \end{cases}$$

– comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

2.1 Champ de déplacement cinématiquement admissible

Définition 2.1 *On dit qu'un champ $\underline{u}(M)$ est cinématiquement admissible s'il vérifie les équations de liaison mentionnées ci-dessous :*

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_1\Omega \\ \underline{u} \text{ pour assurer les hypothèses du milieu continu} \end{cases}$$

Un champ $\underline{u}^*$ est dit cinématiquement admissible à zéro s'il est compatible avec les liaisons :

$$\underline{u}^* = \underline{0} \text{ sur } \partial_1\Omega$$

On note : $\underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^{\emptyset}$ qui est un espace vectoriel de dimension infinie.

Propriété 2.1 *Soient $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ deux champs de déplacement cinématiquement admissibles. Alors :*

$$\underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^{\emptyset}$$

Propriété 2.2 *Soit $\underline{u}_0$ un champ de déplacement cinématiquement admissible. Alors tous les autres champs de déplacement cinématiquement admissibles sont de la forme :*

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}^*,\ \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^{\emptyset}$$

2.2 Champ de contraintes statiquement admissible

Définition 2.2 *On dit qu'un champ $\underline{\underline{\sigma}}(M)$ est statiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre mentionnées ci-dessous :*

$$\begin{cases} \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_d = 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ symétrique} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2\Omega \end{cases}$$

Un champ $\underline{\underline{\sigma}}^*$ est dit statiquement admissible à zéro s'il vérifie les conditions d'équilibre sous charge nulle :

$$\begin{cases} \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \text{ symétrique} \\ \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \partial_2\Omega \end{cases}$$

On note : $\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}_{ad}^{\emptyset}$ qui est un espace vectoriel de dimension infinie.

Propriété 2.3 *Soient $\underline{\underline{\sigma}}_1$ et $\underline{\underline{\sigma}}_2$ deux champs de contraintes statiquement admissibles. Alors :*

$$\underline{\underline{\sigma}}_1 - \underline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}_{ad}^{\emptyset}$$

Propriété 2.4 *Soit $\underline{\underline{\sigma}}_0$ un champ de contraintes statiquement admissible. Alors tous les autres champs de contraintes statiquement admissibles sont de la forme :*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 + \underline{\underline{\sigma}}^*,\ \underline{u}^* \in \mathcal{S}_{ad}^{\emptyset}$$

2.3 Réécriture du problème

On veut trouver un couple $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ tel que :

$$\begin{cases} \underline{u} \text{ cinématiquement admissible} \\ \underline{\underline{\sigma}} \text{ statiquement admissible} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

2.4 Propriétés d'orthogonalité

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des champs de contraintes symétriques. On définit sur $\mathcal{S}$ le produit scalaire suivant :

$$\forall(\underline{\underline{\sigma}}_1, \underline{\underline{\sigma}}_2) \in \mathcal{S}, (\underline{\underline{\sigma}}_1 | \underline{\underline{\sigma}}_2) = \int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}}_1 \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_2 \right] \, d\Omega \tag{1.1}$$

Les propriétés d'un produit scalaire sont vérifiées car $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$ est symétrique, défini, positif.

A partir de ce produit scalaire, on peut définir la norme suivante :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}, \ \|\underline{\underline{\sigma}}\| = \sqrt{(\underline{\underline{\sigma}}|\underline{\underline{\sigma}})} == \left(\int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right] \, d\Omega \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

Théorème 2.1 *Soient $\underline{u}^* \in \mathcal{U}^{\emptyset}_{ad}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}^{\emptyset}_{ad}$. Alors, on a la relation :*

$$(\underline{\underline{\sigma}}^* | \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*)) = \int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] \, d\Omega = 0 \tag{1.3}$$

Démonstration: $\int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] \, d\Omega = \int_\Omega \sigma^*_{ij} \cdot \varepsilon^*_{ij} \, d\Omega = \int_\Omega \sigma^*_{ij} \cdot \frac{1}{2} \left(u^*_{i,j} + u^*_{j,i} \right) \, d\Omega$

Ce qui nous donne, en exploitant la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}^*$: $\int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] \, d\Omega = \int_\Omega \sigma^*_{ij} \cdot u^*_{i,j} \, d\Omega$

Ensuite, on intègre par partie pour obtenir :

$$\int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] \, d\Omega = \int_\Omega \sigma^*_{ij,j} \cdot u^*_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma^*_{ij} \cdot n_j) u^*_i \, dS$$

Ce qui nous donne en décomposant le deuxième terme :

$$\int_\Omega Tr \left[\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \right] \, d\Omega = \underbrace{\int_\Omega \sigma^*_{ij,j} \cdot u^*_i \, d\Omega}_{1} + \underbrace{\int_{\partial_1\Omega} (\sigma^*_{ij} \cdot n_j) u^*_i \, dS}_{2} + \underbrace{\int_{\partial_2\Omega} (\sigma^*_{ij} \cdot n_j) u^*_i \, dS}_{3} = 0$$

1. $\int_\Omega \sigma^*_{ij,j} \cdot u^*_i \, d\Omega = \int_\Omega \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \cdot u^*_i \, d\Omega = 0$ *car* $\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}^*) = 0$ *sur* Ω
2. $\int_{\partial_1\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \underline{u}^* \, dS = 0$ *car* $\underline{u}^* = 0$ *sur* $\partial_1\Omega$
3. $\int_{\partial_2\Omega} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n}) \underline{u}^* \, dS = 0$ *car* $\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n} = 0$ *sur* $\partial_2\Omega$

3 Nouvelle formulation du problème

3.1 Formulation globale de la relation de comportement

On a la relation de comportement suivante :

$$\forall M \in \Omega, \ \underline{\underline{\sigma}}(M) = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(M)) \Leftrightarrow \|\underline{\underline{\sigma}}(M) - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}(M))\| = 0 \tag{1.4}$$

Cette nouvelle formulation est globale, car elle fait intervenir tout le domaine dans l'expression de la norme.

3.2 Erreur en relation de comportement

Un couple $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u})$ est admissible pour le problème d'élasticité si $\underline{u}$ est cinématiquement admissible, et si $\underline{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible. Pour un tel couple, seule la relation de comportement n'est pas vérifiée.

On appelle *erreur en relation de comportement* la quantité de type contrainte $\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$. La norme $e = \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\|$ de cette quantité permet d'évaluer globalement la qualité de la solution admissible. Le couple $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{u})$ est solution du problème si $e = 0$.

3.3 Problème de minimisation

Soit la fonctionnelle : $\Psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}e^2$ C'est à dire :

$$\Psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))\right] d\Omega \tag{1.5}$$

La résolution du problème revient au problème de minimisation suivant :

$$min\{\Psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}),\ \underline{u} \in \mathcal{U}_{ad},\ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}_{ad}\}$$

Propriété 3.1 *La solution $(\underline{u}_{ex}, \underline{\underline{\sigma}}_{ex})$ est la solution du problème de minimisation.*

Propriété 3.2 *Réciproquement, si la solution du problème de minimisation correspond à $\Psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = 0$, alors cette solution est la solution exacte du problème.*

Ce type de problème de minimisation sous contraintes s'appelle *optimisation*.

4 Les théorèmes de l'énergie

4.1 Découplage énergétique

Propriété 4.1 *Soient $\underline{u}$ un champ de déplacement cinématiquement admissible et $\underline{\underline{\sigma}}$ un champ de contraintes statiquement admissible. Alors on peut écrire le découplage suivant :*

$$\Psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = Ep(\underline{u}) + Ec(\underline{\underline{\sigma}}) \tag{1.6}$$

Avec les termes suivants :
- *$Ep(\underline{u})$ l'énergie potentielle du champ $\underline{u}$ cinématiquement admissible :*

$$Ep(\underline{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}\right] d\Omega - \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}\, d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}\, dS$$

- *$Ec(\underline{\underline{\sigma}}$ l'énergie complémentaire du champ $\underline{\underline{\sigma}}$ statiquement admissible :*

$$Ec(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}\right] d\Omega - \int_{\partial_1\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}_d\, dS$$

Démonstration: *On utilise la définition de Ψ donnée par l'équation 1.5 :*

$$\Psi(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}))\right] d\Omega$$

Soit en développant les produits :

$$\Psi(\underline{u},\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\sigma}}\right]\,d\Omega + \int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\,d\Omega\right) - \int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\,d\Omega$$

Dans la suite, on ne considère que le dernier terme de cette somme :

$$\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\,d\Omega = -\int_\Omega \underline{div}(\underline{\underline{\sigma}})\cdot\underline{u}\,d\Omega + \int_{\partial_1\Omega}(\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n})\cdot\underline{u}_d\,dS + \int_{\partial_2\Omega}\underline{F}_d\cdot\underline{u}\,dS$$

Par ailleurs, on a : $\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = -\underline{f}_d$ *car le champ* $\underline{\underline{\sigma}}$ *est statiquement admissible ;* $\underline{u} = \underline{u}_d$ *sur* $\partial_1\Omega$ *; et* $\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{n} = \underline{F}_d$ *sur* $\partial_2\Omega$*. Cela termine la démonstration.*

Conséquences du découplage

$$min\ \{\Psi(\underline{u},\underline{\underline{\sigma}}),\ \underline{u}\in\mathcal{U}_{ad},\ \underline{\underline{\sigma}}\in\mathcal{S}_{ad}\} = min\ \{Ep(\underline{u}),\ \underline{u}\in\mathcal{U}_{ad}\} + min\ \{Ec(\underline{\underline{\sigma}}),\ \underline{\underline{\sigma}}\in\mathcal{S}_{ad}\} \tag{1.7}$$

Ceci est possible car Ep et Ec sont fonctions de deux variables indépendantes.

4.2 Théorème de l'énergie potentielle

Théorème 4.1 *La solution en déplacement du problème d'élasticité est la solution du problème de minimisation :*

$$min\ \{Ep(\underline{u}),\ \underline{u}\in\mathcal{U}_{ad}\}$$

Ce qui peut aussi se traduire par :

$$\forall\underline{u}\in\mathcal{U}_{ad},\ Ep(\underline{u}_{ex}) \leq Ep(\underline{u})$$

On peut donner les explications suivantes quant-à l'énergie potentielle du champ de déplacement $\underline{u}$:

$$Ep(\underline{u}) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\right]\,d\Omega}_{1} - \underbrace{\int_\Omega \underline{f}_d\cdot\underline{u}\,d\Omega - \int_{\partial_2\Omega}\underline{F}_d\cdot\underline{u}\,dS}_{2}$$

1. énergie de déformation exprimée en déplacement ;
2. travail des efforts extérieurs donnés dans le champ de déplacement.

Pour la résolution du problème, le théorème de l'énergie potentiel, qui doit nous permettre de trouver $Ep(\underline{u}_{ex})$ est à la base de la méthode suivante :

$$Ep(\underline{u}_{ex}) \dashrightarrow \underline{u}_{ex} \dashrightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{ex} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex})$$

4.3 Exploitation du théorème de l'énergie potentielle

On note $\underline{u}_{ex}$ la solution exacte du problème d'élasticité. Alors on a la relation pour tout $\underline{u}$ cinématiquement admissible :

$$\underline{u} = \underline{u}_{ex} + \lambda\cdot\underline{u}^* \tag{1.8}$$

Cette équation est valable :
– pour toute amplitude λ ;

– quel que soit le champs $\underline{u}^*$ cinématiquement admissible à zéro.

Ainsi, la solution exacte du problème $\underline{u}_{ex}$ minimise la valeur de l'énergie potentielle, le tout lorsque $\lambda = 0$ dans l'équation 2.13. Le problème s'écrit donc de la manière suivante :

$$\frac{d\left[Ep(\underline{u}_{ex} + \lambda \cdot \underline{u}^*)\right]}{d\lambda}(\lambda = 0) = 0 \tag{1.9}$$

Ceci revient à écrire la relation suivante, qui équivaut à la formulation vue au premier semestre.

$$\boxed{\int_\Omega Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_{ex} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^*\, d\Omega - \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}^*\, d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^*\, dS = 0}$$

Démonstration:

$$Ep(\underline{u}_{ex} + \lambda \cdot \underline{u}^* = \frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{ex} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{ex}\right) d\Omega + \frac{\lambda^2}{2}\int_\Omega Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^* \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^*\right) d\Omega$$

$$+\lambda \int_\Omega Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}_{ex} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^*\right) d\Omega - \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}_{ex}\, d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^*\, dS - \lambda\left[\int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}^*\, d\Omega - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^*\, dS\right]$$

On dérive cette équation par rapport à λ puis on prend la valeur de l'expression obtenue, pour $\lambda = 0$. On obtient bien l'expression encadrée ci-dessus.

4.4 Théorème de l'énergie complémentaire

Théorème 4.2 *La solution en contraintes du problème d'élasticité est la solution du problème de minimisation :*

$$min\ \{Ec(\underline{\underline{\sigma}}),\ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}_{ad}\}$$

Ce qui peut aussi se traduire par :

$$\forall \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}_{ad},\ Ec(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) \leq Ec(\underline{\underline{\sigma}})$$

On peut donner les explications suivantes quant-à l'énergie complémentaire du champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$Ec(\underline{\underline{\sigma}}) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}\right] d\Omega}_{1} - \underbrace{\int_{\partial_1\Omega} \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}\right) \cdot \underline{u}_d\, dS}_{2}$$

1. énergie de déformation en contraintes ;
2. travail des efforts des contraintes sur la zone à déplacement imposé.

Pour la résolution du problème, le théorème de l'énergie complémentaire, qui doit nous permettre de trouver $Ec(\underline{\underline{\sigma}}_{ex})$ est à la base de la méthode suivante :

$$Ec(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) \dashrightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{ex} \dashrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}_{ex} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \dashrightarrow \underline{u}_{ex}$$

4.5 Théorème d'encadrement

Théorème 4.3 *Soit $(\underline{u}_{ex}; \underline{\underline{\sigma}}_{ex})$ la solution exacte du problème. Alors on a :*

$$\Psi(\underline{u}_{ex}; \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) = 0 = Ep(\underline{u}_{ex}) + Ec(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) \Rightarrow Ep(\underline{u}_{ex}) = -Ec(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) \tag{1.10}$$

Soit en fait, avec $\underline{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ et $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}_{ad}$:

$$\boxed{-Ec(\underline{\underline{\sigma}}) \leq \underbrace{-Ec(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) = Ep(\underline{u}_{ex})}_{\textit{Encadrement des caractéristiques globales du système}} \leq Ep(\underline{u})}$$

4.6 Théorème de Pythagore dans l'espace des contraintes

Soit $(\underline{u}; \underline{\underline{\sigma}}) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{S}_{ad}$ une approximation de la solution au problème d'élasticité.

Propriété 4.2

$$\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}\|^2 = \|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}\|^2 + \|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\|^2 \tag{1.11}$$

Démonstration:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{u}^* = \underline{u}_{ex} - \underline{u} \end{cases}$$

On a : $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) = \underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$
On poursuit cette démonstration en utilisant la propriété d'orthogonalité suivante :

$$\int_\Omega Tr(\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon(\underline{u}^*)}}\, d\Omega = 0$$

Conséquences sur la qualité des approximations

$$\begin{cases} \|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\sigma}}\| \leq \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\| \\ \|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\| \leq \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\| \end{cases}$$

Par cette méthode, on peut évaluer la qualité de l'approximation.
Par ailleurs, si on note $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\right]$, alors :

$$\frac{\|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\|}{\|\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}\|} = \frac{\|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\|}{\|\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\|} \tag{1.12}$$

5 Théorèmes de l'énergie pour les poutres

5.1 Traction - Compression

On travaille sur une poutre encastrée en O, à laquelle on impose un déplacement δ en $s = L$, et une force répartie $\underline{f} = f \cdot \underline{e}_x$

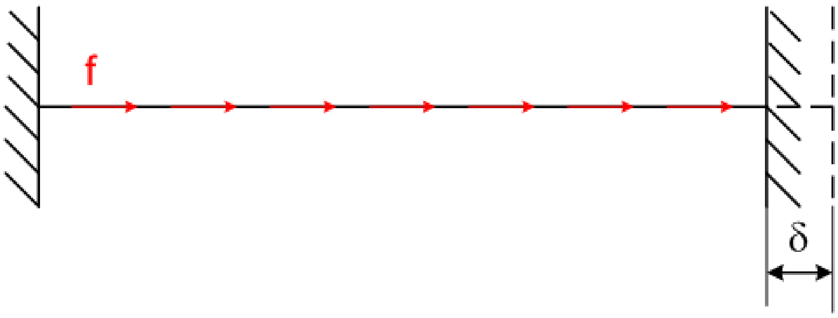

Fig. 1.3 – Schéma du problème de traction-compression

Formulation classique (locale)

– Equations de liaisons :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(L) = \delta \\ \text{Régularité du champ de déplacement } u \end{cases}$$

– Equations d'équilibre $\forall s \in [0, L]$:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dS} + f = 0 \\ N = E \cdot S \cdot \frac{du}{ds} \end{cases}$$

Formulation énergétique (globale)

– champ cinématiquement admissible :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u(s) \text{ régulier}, u(0) = 0, u(L) = \delta\}$$

– champ cinématiquement admissible à zéro :

$$\mathcal{U}_{ad}^{\emptyset} = \{u^*(s) \text{ régulier}, u^*(0) = 0, u^*(L) = 0\}$$

– champ statiquement admissible :

$$\mathcal{S}_{ad} = \left\{N(s) \text{ régulier}, \forall s \in [0, L], \frac{dN}{dS} + f = 0\right\}$$

– champ statiquement admissible à zéro :

$$\mathcal{S}_{ad}^{\emptyset} = \left\{N^*(s) \text{ régulier}, \forall s \in [0, L], \frac{dN^*}{dS} = 0\right\}$$

– définition d'une norme :

$$\|N\| = \left[\int_0^L N \cdot \frac{N}{E \cdot S}\, ds\right]^{1/2} = \left[\int_0^L \frac{N^2}{E \cdot S}\, ds\right]^{1/2}$$

– propriété d'orthogonalité :

$$\forall u^* \in \mathcal{U}_{ad}, \forall N^* \in \mathcal{S}_{ad}, \int_0^L N^* \cdot \frac{du^*}{ds}\, ds = 0$$

– erreur sur la relation de comportement *(erdc)* :

$$e = \left\| N - ES \cdot \frac{du}{ds} \right\|$$

– définition de la fonctionnelle :

$$\psi(u, N) = \frac{1}{2} \left\| N - ES \cdot \frac{du}{ds} \right\|^2$$

$$Ep(u) = \frac{1}{2} \int_0 LES \left(\frac{du}{ds}\right) ds - \int_0 Lf \cdot u\, ds$$

$$Ec(N) = \frac{1}{2} \int_0 L \frac{N^2}{ES}\, ds - N(L) \cdot \delta$$

– théorèmes :

$$\forall u \in \mathcal{U}_{ad}, Ep(u_{ex}) \leq Ep(u)$$

$$\forall N \in \mathcal{S}_{ad}, Ec(N_{ex}) \leq Ec(N)$$

Exemple de résolution par le théorème de l'énergie complémentaire

$$N \in \mathcal{S}_{ad} \Rightarrow N(s) = -f \cdot s + a \tag{1.13}$$

D'où on en déduit que $Ec(N) = Ec(a)$, car a est le seul paramètre dont dépend Ec. Alors :

$$Ec(a) = \frac{1}{2 \cdot ES}\left[f^2\frac{s^3}{3} + a^2 \cdot s - f \cdot a \cdot s^2\right]_0^L + f \cdot L \cdot \delta - a \cdot \delta = \frac{1}{2 \cdot ES}\left[f^2\frac{L^3}{3} + a^2 \cdot L - f \cdot a \cdot L^2\right] + f \cdot L \cdot \delta - a \cdot \delta \tag{1.14}$$

On cherche ensuite le minimum de Ec :

$$\frac{dEc}{da} = \frac{L}{ES} \cdot a - \frac{f \cdot L^2}{3 \cdot ES} - \delta = 0 \tag{1.15}$$

Soit :

$$a = \frac{f \cdot L}{2} + \frac{\delta \cdot ES}{L} \Rightarrow N_{ex} = -f \cdot s\frac{f \cdot L}{2} + \frac{\delta \cdot ES}{L} \tag{1.16}$$

Ceci nous permet de déterminer ε_{ex} et ainsi u_{ex} :

$$u_{ex} = -\frac{f}{ES} \cdot \frac{s^2}{2} + \left(\frac{f \cdot L}{2 \cdot ES} + \frac{\delta}{L}\right) s + N(0) \tag{1.17}$$

L'équation 1.17 permet également de vérifier que $u(L) = \delta$.

Exemple de résolution par le théorème de l'énergie potentielle

Il suffit de choisir un $u \in \mathcal{U}_{ad}$ quadratique. Deux scalaires de u sont déjà fixés, et on obtient le troisième en exploitant $min[Ep(u)]$.

5.2 Flexion plane

On considère le cas d'une poutre encastrée en O, et tournée en L, soumise à un champ de force réparties p.

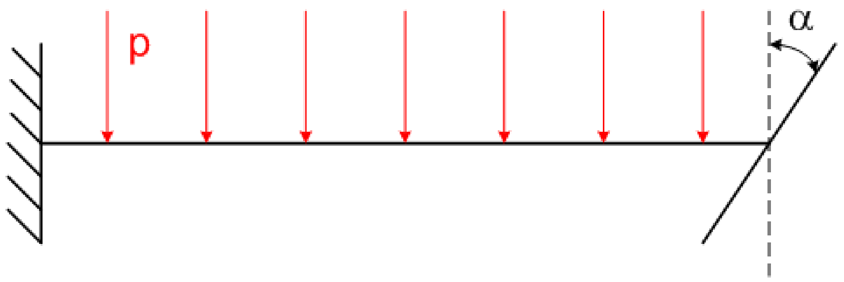

FIG. 1.4 – Schéma du problème de flexion

Formulation classique (locale)

– Equations de liaisons :

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \\ \theta(0) = 0 \\ \theta(L) = \alpha \\ \text{Régularité du champ de déplacement } v \end{cases}$$

– Equations d'équilibre $\forall s \in [0, L]$:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dS} + T = 0 \\ \frac{dT}{dS} + p = 0 \end{cases}$$

– On distingue deux hypothèses quant-au lois de comportement :

1. Timoshenko :
$$\begin{cases} T = \mu \cdot \tilde{S} \cdot \left(\frac{dv}{ds} - \theta\right) \\ M = E \cdot I \frac{d\theta}{ds} \end{cases}$$

2. Bernoulli :
$$\begin{cases} \theta = \frac{dv}{ds} \\ M = EI \frac{d^2v}{ds} \end{cases}$$

Formulation énergétique (globale)

– champ cinématiquement admissible :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(v(s), \theta(s)) \text{ régulier}, v(0) = 0, v(L) = 0, \theta(0) = 0, \theta(0) = \alpha\}$$

– champ cinématiquement admissible :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(v^*(s), \theta^*(s)) \text{ régulier}, v^*(0) = 0, v^*(L) = 0, \theta^*(0) = 0, \theta^*(0) = 0\}$$

– champ statiquement admissible :

$$\mathcal{S}_{ad} = \left\{(T(s), M(s)) \text{ régulier}, \forall s \in [0, L], \frac{dM}{dS} + T = 0, \frac{dT}{dS} + p = 0\right\}$$

– champ statiquement admissible à zéro :

$$\mathcal{S}_{ad} = \left\{(T^*(s), M^*(s)) \text{ régulier}, \forall s \in [0, L], \frac{dM^*}{dS} + T = 0, \frac{dT^*}{dS} + p = 0\right\}$$

– définition d'une norme :

$$\|(T, M)\| = \left[\int_0^L \left(\frac{T^2}{\mu \cdot S} + \frac{M^2}{EI}\right) ds\right]^{1/2}$$

– propriété d'orthogonalité :

$$\int_0^L T^* \cdot \gamma_t^* + M^* \cdot \chi_f^* \, ds = 0$$

– énergie potentielle :

$$Ep(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \mu\tilde{S} \left(\frac{dN}{ds} - \theta\right)^2 + EI \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds - \int_0^L p \cdot v \, ds$$

– énergie complémentaire :

$$Ec(T, M) = \frac{1}{2} \int_0 L \frac{T^2}{\mu \cdot s} + \frac{M^2}{EI} \, ds - M(L) \cdot \alpha$$

– etc. tout le reste du problème ressemble à celui traité au chapitre précédent.

Calcul des treillis

1 Définitions

Un treillis est un assemblage de poutres :
- liées entre elles par des rotules ;
- chargées de telle manière qu'elle ne travaille qu'en traction-compression.

On étudie le cas où seules les rotules sont soumises à des efforts et des déplacements imposés.

Remarque : *Dans un premier temps, on ne traite que les déplacements imposés nuls.*

Exemple : *Le treillis suivant servira d'exemple pour tout ce qui va suivre.*

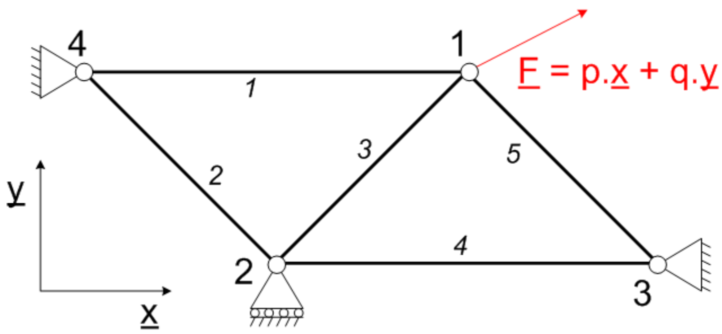

FIG. 2.1 – Exemple de treillis à 4 noeuds et 5 barres

2 Calculs par le théorème de l'énergie potentielle

On a la relation suivante :

$$\underbrace{Ep}_{1} = \underbrace{e_d}_{2} - \underbrace{W_{Fd}}_{3} \tag{2.1}$$

avec :

1. l'énergie potentielle du système ;
2. l'énergie de déformation ;
3. le travail des efforts extérieurs imposés.

2.1 Énergie de déformation d'une poutre

Problème à considérer

Considérons la barre α ci dessous, à l'état initial et à l'état déformé :

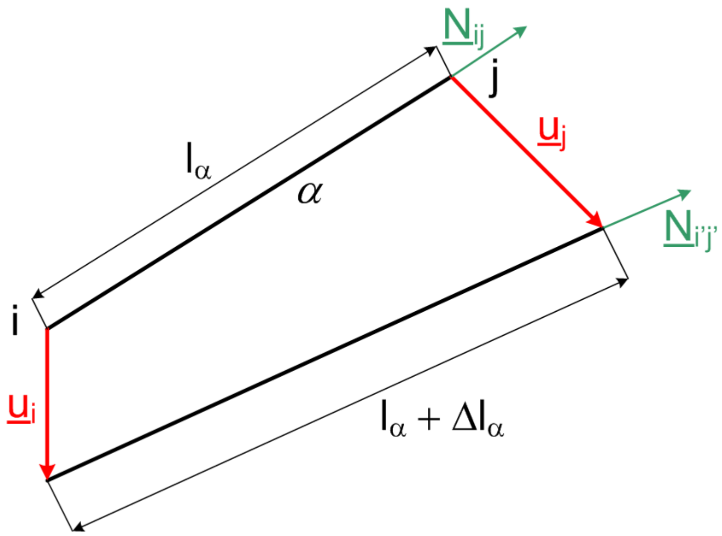

FIG. 2.2 – notations sur une barre

On peut alors donner :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta l_\alpha}{l_\alpha}$$

Démonstration: *Il s'agit d'une poutre en traction :*

$$\frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N = cste = E \cdot S \cdot \frac{du}{dx} = E \cdot S \cdot \varepsilon_\alpha$$

C'est à dire que : $\varepsilon_\alpha = \frac{N}{E \cdot S} = cste$

Ceci nous donne finalement :

$$u(x) = \varepsilon_\alpha \cdot x + u(0) \Rightarrow \varepsilon_\alpha = \frac{u(l_\alpha) - u(0)}{l_\alpha} = \frac{\Delta l_\alpha}{l_\alpha}$$

Calcul de ε_α

$$\underline{i'j'} = -\underline{u}_i + l_\alpha \cdot \underline{N}_{ij} + \underline{u}_j = l_\alpha \cdot \underline{N}_{ij} + (\underline{u}_j - \underline{u}_i)$$

C'est à dire que :

$$\left\|\underline{i'j'}\right\| = l_\alpha^2 + \left\|\underline{u}_j - \underline{u}_i\right\|^2 + 2 \cdot l_\alpha \cdot \underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)$$

Autrement dit :

$$(l_\alpha + \Delta l_\alpha)^2 = l_\alpha^2 + \left\|\underline{u}_j - \underline{u}_i\right\|^2 + 2 \cdot l_\alpha \cdot \underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)$$

On se place ensuite dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations :

$$\frac{\Delta l_\alpha^2}{l_\alpha^2} \ll 1 \Rightarrow \frac{\left\|\underline{u}_j - \underline{u}_i\right\|^2}{l_\alpha^2} \ll 1$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\left(\frac{l_\alpha + \Delta l_\alpha}{l_\alpha}\right)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)}{l_\alpha}$$

Soit, en réécrivant la même équation sous une autre forme :

$$1 + \varepsilon_\alpha = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)}{l_\alpha}} \tag{2.2}$$

Comme ε_α est petit d'après l'HPP, on peut donner l'équation 2.2 en effectuant un développement limité du premier ordre :

$$1 + \varepsilon_\alpha = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)}{l_\alpha} + \left(\frac{\underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)}{l_\alpha}\right) \tag{2.3}$$

On obtient ainsi une expression de la déformation dans une barre en traction-compression, sous l'hypothèse des petites perturbations :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\underline{N}_{ij} \cdot (\underline{u}_j - \underline{u}_i)}{l_\alpha} \tag{2.4}$$

Calcul de l'énergie de déformation e_d

Par définition, dans le cas de solicitations en traction-compression, on a :

$$e_{d\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{l_\alpha} E \cdot S \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{l_\alpha} E \cdot S \cdot \varepsilon_\alpha^2 \, dx$$

Ce qui donne, dans notre cas particulier :

$$e_{d\alpha} = \frac{1}{2} E_\alpha \cdot S_\alpha \cdot l_\alpha \cdot \varepsilon_\alpha^2$$

Ceci nous permet de calculer simplement l'énergie de déformation de la structure, qui est la somme des énergies de déformation de toutes les barres :

$$e_d = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{5} E_\alpha \cdot S_\alpha \cdot l_\alpha \cdot \varepsilon_\alpha^2 \tag{2.5}$$

2.2 Travail des efforts extérieurs

$$W_{Fd} = \sum_{i=1}^{4} \underline{u}_i \cdot \underline{F}_{di} \tag{2.6}$$

2.3 Résolution du problème

Inconnues cinématiques

On cherche : $(\underline{u}_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$

Par ailleurs, on note : $\underline{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$

De plus, pour assurer que le champ de déplacement soit cinématiquement admissible, il faut que :

$$\begin{cases} \underline{u}_3 = \underline{u}_4 = \underline{0} \\ \underline{u}_2 \cdot \underline{y} = \underline{0} \end{cases}$$

Ce qui se traduit simplement par : $v_2 = v_3 = v_4 = u_3 = u_4 = 0$
Un champ cinématiquement admissible est donc paramètré par le triplet : (u_1, v_1, u_2).

Calcul des déformations

On calcule ε_1 à titre d'exemple, mais on donnera simplement les valeurs aux autres noeuds (L désigne la longueur de la barre $(1, 2)$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\underline{N}_{41} \cdot (\underline{u}_1 - \underline{u}_4}{\sqrt{2} \cdot L} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot L} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{u_1}{\sqrt{2} \cdot L}$$

Et on obtient pour les autres barres :
- $\varepsilon_2 = \frac{u_2}{\sqrt{2} \cdot L}$
- $\varepsilon_3 = \frac{u_1 - u_2 + v_1}{\sqrt{2} \cdot L}$
- $\varepsilon_4 = \frac{-u_2}{\sqrt{2} \cdot L}$
- $\varepsilon_3 = \frac{v_1 - u_1}{\sqrt{2} \cdot L}$

Calcul de l'énergie de déformation totale

On considère que toutes les barres ont même section et même module d'Young. L'équation 2.5 nous donne alors :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot ES \cdot \left(\sqrt{2} \cdot L \cdot \varepsilon_1^2 + L \cdot \varepsilon_2^2 + L \cdot \varepsilon_3^2 + \sqrt{2} \cdot L \cdot \varepsilon_4^2 + L \cdot \varepsilon_5^2 \right)$$

Ce qui nous donne, tout calcul fait :

$$e_d = \frac{ES}{4 \cdot L} \left(\sqrt{2} \cdot u_1^2 + u_2^2 + (u_1 - u_2 + v_1)^2 + \sqrt{2} \cdot u_2^2 + (v_1 - u_1)^2 \right) \tag{2.7}$$

Calcul du travail des efforts extérieur

De la même manière, l'équation 2.6 nous donne :

$$W_{Fd} = p \cdot u_1 + q \cdot v_1 \tag{2.8}$$

Utilisation du théorème de l'énergie potentielle

Pour le problème considéré, l'équation 2.1 devient :

$$Ep(u_1, v_1, u_2) = e_d(u_1, v_1, u_2) + W_{Fd}(u_1, v_1, u_2)$$

On applique le théorème de l'énergie potentielle, qui dit que la solution du problème minimise la valeur de Ep :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Ep}{\partial u_1} = 0 \\ \frac{\partial Ep}{\partial v_1} = 0 \\ \frac{\partial Ep}{\partial u_2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{ES}{2 \cdot L} \left[\sqrt{2} \cdot u_1 + (u_1 - u_2 + v_1) - (v_1 - u1) \right] - p = 0 \\ \frac{ES}{2 \cdot L} \left[(u_1 - u_2 + v_1) - (v_1 - u1) \right] - q = 0 \\ \frac{ES}{2 \cdot L} \left[\cdot u_2 + (u_1 - u_2 + v_1) + \sqrt{2} \cdot u_2 \right] - 0 = 0 \end{array} \right.$$

On obtient un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues, qui est très facile à résoudre, si le problème est bien posé.

2.4 Autre écriture du problème - Écriture matricielle

Définition des nouveaux objets utiles

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est appelé *vecteur de déplacement généralisé*. Il est cinématiquement admissible, de dimension $2N - L$, avec N le nombre de noeuds, et L le nombre de liaisons.

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est appelé *vecteur de déformation généralisé*. Il est de dimension b, le nombre de barre. Par ailleurs, il est linéairement dépendant de $\underline{u}$, et on peut trouver B tel que :

$$\underline{\varepsilon} = B \cdot \underline{u} \tag{2.9}$$

Avec B une matrice de dimension $b \times (2N - L)$.

On peut ensuite écrire :

$$e_d = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \cdot \Delta \cdot \underline{\varepsilon} \tag{2.10}$$

Avec la matrice Δ qui s'écrit comme le produit de trois matrices diagonales $\Delta = E \cdot S \cdot L$, telle que :

- $E = diag\,(E_\alpha)_{\alpha \in \{1,\dots,b\}}$
- $S = diag\,(S_\alpha)_{\alpha \in \{1,\dots,b\}}$
- $L = diag\,(L_\alpha)_{\alpha \in \{1,\dots,b\}}$

Alors l'équation 2.10 peut s'écrire sous la forme :

$$e_d(\underline{u}) = \frac{1}{2} \cdot (B \cdot \underline{u})^T \cdot \Delta \cdot (B \cdot \underline{u})$$

Ce qui nous donne, en effectuant la transposition, et en regroupant habilement les facteurs :

$$e_d(\underline{u}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot (B^T \cdot \Delta \cdot B) \cdot \underline{u}$$

En notant K la matrice de rigidité du problème, telle que : $K = (B^T \cdot \Delta \cdot B)$, on obtient une nouvelle expression de l'énergie de déformation :

$$e_d(\underline{u}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot K \cdot \underline{u} \tag{2.11}$$

Remarque : $K^T = ((B^T \cdot \Delta \cdot B)^T = B^T \cdot \Delta \cdot (B^T)^T = K$

On vient de montrer que K est symétrique : cela signifie que e_d est une forme quadratique de $\underline{u}$.

Il nous reste ensuite à écrire le travail des efforts extérieurs W_{Fd}. Pour cela, on note $\underline{F}$ le *vecteur des efforts généralisé*. On obtient :

$$W_{Fd} = \underline{F}^T \cdot \underline{u} \tag{2.12}$$

Application du théorème de l'énergie potentielle

D'après l'équation 2.11, on peut écrire la relation du théorème de l'énergie potentielle sous la forme suivante :

$$\min_{\underline{u}} Ep(\underline{u}) = \min_{\underline{u}} \left[e_d(\underline{u}) = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot K \cdot \underline{u} \right]$$

Pour la résolution, on utilise ensuite la relation :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^{\emptyset}, \ \left. \frac{\partial Ep(\underline{u}_{ex} + \lambda \underline{u}^*)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \tag{2.13}$$

Par ailleurs, on a : $Ep(\underline{u}_{ex} + \lambda \underline{u}^*) = a + b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$. On retrouve toujours cette forme pour l'expression de Ep. On peut alors transformer l'équation 2.13 en :

$$\left. \frac{\partial Ep}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = b = 0$$

C'est à dire :$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}^{\emptyset}, b = 0$. En développant le calcul de $Ep(\underline{u}_{ex} + \lambda \underline{u}^*)$, on a :

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left[\underline{u\ t}^* \cdot K \cdot \underline{u}_{ex} + \underline{u}_{ex}^T \cdot K \cdot \underline{u}^* \right] - \underline{F}^T \cdot \underline{u}^* = 0$$

Comme K est symétrique, on obtient :

$$\underline{u}^* \cdot (K \cdot \underline{u}_{ex} - \underline{F}) = 0$$

Ce qui revient en fait à résoudre le système linéaire :

$$K \cdot \underline{u}_{ex} = \underline{F} \tag{2.14}$$

Propriété 2.1 *On a l'équivalence suivante :*

$$B régulière \ \Leftrightarrow \ K régulière$$

On rappelle que : $(M régulière) \ \Leftrightarrow \ (M \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{u} = 0)$
Soit, dit autrement : $dim\,(Ker(M)) = 0$

Démonstration: *Démontrons les deux implications :*

1. *On suppose B régulière. Alors :*

$$B \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{u} = 0)$$

Ainsi :

$$K \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{u}^T \cdot K \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow (B \cdot \underline{u})^T \cdot \Delta \cdot (B \cdot \underline{u}) = 0$$

Considérons alors le problème suivant : $\underline{x}^T \cdot \Delta \cdot \underline{x}$ avec Δ symétrique, définie, positive. Alors cela revient à dire que $\underline{x} = \underline{0}$. Ce qui signifie que, dans notre cas précis, $B \cdot \underline{u} = 0$, et donc par conséquent : $\underline{x} = \underline{0}$. C'est à dire que :

$$(B \ \textit{régulière}) \ \Rightarrow \ (K \ \textit{régulière})$$

2. *On suppose maintenant K régulière. Soit $\underline{u}$ tel que $B \cdot \underline{u} = 0$. Alors :*

$$\Delta \cdot (B \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow b^T \cdot \Delta \cdot B \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow K \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{u} = 0$$

Ainsi :

$$(K \ \textit{régulière}) \ \Rightarrow \ (B \ \textit{régulière})$$

Autres exemples

Les autres exemples dévelloppés en cours ne seront pas traités ici. Mentionnons simplement que pour assurer une matrice B régulière, il faut supprimer tout problème de mouvement de solide rigide.

3 Calcul par le théorème de l'énergie complémentaire

On a la relation suivante :

$$\underbrace{Ec}_{1} = \underbrace{e_d}_{2} - \underbrace{W_{\underline{u}_d}}_{3} \tag{2.15}$$

avec :

1. l'énergie complémentaire du système ;
2. l'énergie de déformation ;
3. le travail des efforts aux noeuds à déplacements imposés.

De plus, il s'agit de traction-compression. Seul l'effort normal intervient : $N_\alpha = cste$.

3.1 Écriture du problème

Pour que les champs d'effort soient statiquement admissibles, on a :

$$\sum_{k}^{N} N_k \cdot \underline{n}_{ki} = \underline{F}_d \tag{2.16}$$

Cette équation résulte de l'équilibre des noeuds :

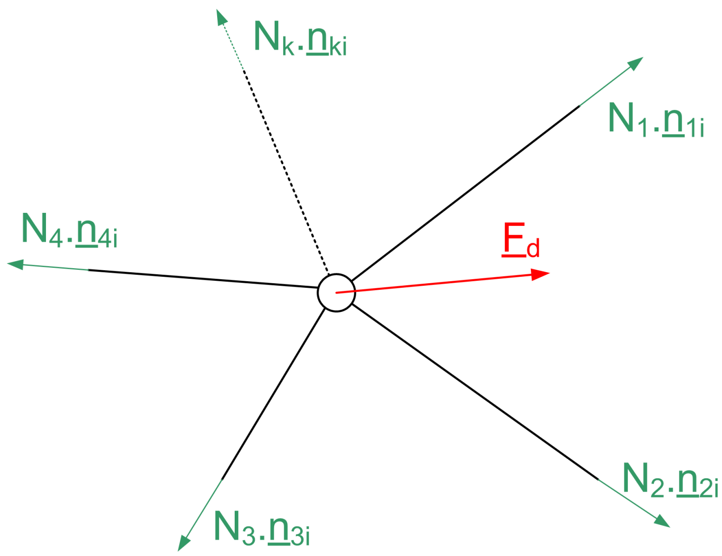

Fig. 2.3 – Équilibre du noeud i

Équilibre des 4 noeuds

– noeud 1 : $N_1 \cdot \underline{x} + N_3 \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}} + N_5 \cdot \frac{-x+y}{\sqrt{2}} = p \cdot \underline{x} + q \cdot \underline{y}$ *(soit 2 équations scalaires d'admissibilité statique)* ;
– noeud 2 : $N_2 \cdot \frac{x-y}{\sqrt{2}} + N_3 \cdot \frac{-x-y}{\sqrt{2}} + N_4 \cdot \underline{x} = 0 \cdot \underline{x} + R? \cdot \underline{y}$ *(soit 1 équation d'admissibilité statique, car on ne connaît pas la valeur de $R?$ avant résolution)* ;

– on ne peut tirer aucune équation d'admissibilité statique supplémentaire pour les noeuds 3 et 4, qui sont à déplacement imposé.

Bilan

L'espace des champs d'effort statiquement admissible est l'ensemble des champs $(N_i)_{i\in\{1,2,3,4,5\}}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} N_1 + \frac{N_3}{\sqrt{2}} - \frac{N_5}{\sqrt{2}} = p \\ \frac{N_3}{\sqrt{2}} + \frac{N_5}{\sqrt{2}} = q \\ \frac{N_2}{\sqrt{2}} - \frac{N_3}{\sqrt{2}} - N_4 = 0 \end{cases}$$

On peut donc tout écrire en fonction de deux paramètres seulement :

$$\begin{cases} N_1 = p + q - \sqrt{2} \cdot N_3 \\ N_2 = N_3 + \sqrt{2} \cdot N_4 \\ N_3 = N_3 \\ N_4 = N_4 \\ N_5 = \sqrt{2} \cdot q - N_3 \end{cases}$$

Théorème de l'énergie complémentaire

Minimisons l'énergie complémentaire pour obtenir N_1 et N_3

On a $W_{\underline{u}_d} = 0$ car les déplacements imposés sont nuls. Par ailleurs, l'énergie de déformation pour une barre s'écrit :

$$e_{di} = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{ES}\, dx = \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot ES} \tag{2.17}$$

Ainsi, les équation 2.15 et 2.17 nous donnent :

$$Ec = e_d = \sum_{i=1}^{5} e_{di} = \frac{L}{2 \cdot ES} \left[\sqrt{2} \left(\sqrt{2}(p + q - \sqrt{2} \cdot N_3) \right)^2 + \left(N_3 + \sqrt{2} \cdot N_4 \right)^2 + N_3^2 + \sqrt{2} \cdot N_4^2 + \left(\sqrt{2} \cdot q - N \right.\right.$$

L'utilisation du théorème de l'énergie complémentaire donne le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial Ec}{\partial N_3} = 0 \\ \frac{\partial Ec}{\partial N_4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{2} + 3) \cdot N_3 + \sqrt{2} \cdot N_4 = 2 \cdot (p + q) + \sqrt{2} \cdot q \\ \sqrt{2} \cdot N_3 + (2 + \sqrt{2}) \cdot N_4 = 0 \end{cases}$$

3.2 Problème sous forme matricielle

Soit B le nombre de barres. On a le vecteur des efforts généralisés $\underline{N}$ définit par :

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_5 \end{pmatrix}$$

$$Ec = e_d = \sum_{i=1}^{5} \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E_i S_i} = \frac{1}{2} \cdot \underline{N}^T \cdot E^{-1} \cdot S^{-1} \cdot L \cdot \underline{N}$$

Avec E, S et L trois matrices diagonales définie comme au paragraphe précédent. De plus, si on note $M = E^{-1} \cdot S^{-1} \cdot L$, on a :

$$e_d \frac{1}{2} \cdot \underline{N}^T \cdot M \cdot \underline{N} \tag{2.18}$$

Remarque : *Dans le cas général, on a également :* $\underline{W}_{\underline{u}_d} = \underline{N}^T \cdot \underline{u}_d$

Remarque sur l'équilibre des noeuds

$$\underline{N} = E \cdot S \cdot \underline{\varepsilon} = E \cdot S \cdot B \cdot \underline{u}$$

Lorsqu'on applique le théorème de l'énergie potentielle, on doit résoudre le système linéaire $K \cdot \underline{u} = \underline{F}$. Or :

$$K = B^T \cdot E \cdot S \cdot L \cdot B = B^T \cdot L \cdot E \cdot S \cdot B$$

C'est à dire : $E \cdot S \cdot B \cdot \underline{u} = \underline{N}$. Soit en fait : $B^T \cdot L \cdot \underline{N} = \underline{F}$. Ce système linéaire correspond à celui qu'on a écrit sur les noeuds. Pour trouver la solution, on a donc à résoudre :

$$\min_{B^T \cdot L \cdot \underline{N} = \underline{F}} \left(\underline{N}^T \cdot M \cdot \underline{N} \right) \tag{2.19}$$

Ceci conduit également à un système linéaire.

Initiation à la méthode des éléments finis

1 Introduction

A la base, on a un problème de mécanique des milieux continus classique :
– formulation du problème ;
– existence et unicité de la solution ;
– expliciter la solution.

En général, on est incapable de trouver la solution analytique du problème. On cherche donc une solution approchée au problème :
– basées sur les théorèmes de l'énergie *(*NAVIER - *1810* , RAYLEIGH - *1870)* ;
– bases mathématiques *(*RIESZ & GALERKIN - *1910)* ;
– 1 ^er^calcul par éléments finis *(*ARGYRIS - *1954, aéronautique)* ;
– code éléments finis : *NASTRAN - 1963* ;
– estimation de l'erreur commise - *depuis les années 1980.*

Presque 100 % des codes industriels utilisent le théorème de l'énergie potentielle, délaissant le théorème de l'énergie complémentaire, utilisé expérimentalement seulement.

2 Principe de la méthode des éléments finis en déplacement

2.1 Hypothèses

– élasticité linéaire isotrope et homogène ;
– hypothèse des petites perturbations ;
– hypothèse supplémentaire : $\begin{cases} \partial_1\Omega \neq \emptyset \\ \underline{u}_d = \underline{0} \end{cases}$

Remarque : dans ce cadre, il existe une unique solution au problème, et de plus : $\mathcal{U}_{ad}^* = \mathcal{U}_{ad}$. De plus, $\mathcal{U}_{ad}$ possède une structure d'espace vectoriel.

2.2 Rappel de la formulation

Le champ solution exacte $\underline{u}_{ex}(M)$ donnera le minimum sur $\mathcal{U}_{ad}$ de l'énergie potentielle $Ep(\underline{u})$.

$$Ep(\underline{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\right] dV - \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}\, dV - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}\, dS$$

On trouve ensuite $\underline{\underline{\sigma}}_{ex}$ par post traitement, d'après la loi de comportement.

2.3 Formulation du problème approché

Remarque : *On a : $dim(\mathcal{U}_{ad}) = +\infty$*

On va appliquer le théorème de l'énergie potentielle dans un sous espace de dimension finie : $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}_{ad}$, avec $dim(\mathcal{U}_h)$ = N. On obtient alors le problème approché suivant :

$$\underline{u}_h = \min_{\underline{u}\in\mathcal{U}_h} Ep(\underline{u}) \tag{3.1}$$

Comme $\mathcal{U}_h$ est de dimension fine, on en exhibe une base :

$$\Phi = (\underline{\Phi}_1, \ldots, \underline{\Phi}_N)$$

On peut ensuite décomposer $\underline{u}_h$ dans cette base :

$$\underline{u}_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \underline{\Phi}_i$$

Les inconnues sont devenues les $(u_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$, et on obtient :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \int_\Omega Tr\left[\left(\sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\Phi}_i)\right) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\Phi}_i)\right)\right] dV \tag{3.2}$$

En développant cette expression on arrive à :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i}^{N}\sum_{j=1}^{N} u_i \cdot u_j \cdot \underbrace{\int_\Omega Tr\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\Phi}_i) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\Phi}_j)\right) dV}_{K_{ij}}$$

Dans la même idée, on a :

$$W_{Fd} = \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \underbrace{\left[\int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{\Phi}_i\, dV + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{\Phi} dS\right]}_{F_i}$$

De cette manière, on obtient la relation suivante :

$$Ep(\underline{u}_h) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} u_i \cdot u_j \cdot K_{ij} - \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot F_i \tag{3.3}$$

On se donne alors :

$$K = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & K_{ij} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \;;\; \underline{u}_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \;;\; \underline{F} = \begin{pmatrix} \vdots \\ F_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Et l'équation 3.3 nous permet alors d'écrire :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot K \cdot \underline{u} - \underline{F}^T \cdot \underline{u} \tag{3.4}$$

La solution du problème de minimisation de l'énergie de déformation exprimée en 3.4 conduit à la résolution du système linéaire : $K \cdot \underline{u} = \underline{F}$, avec K une matrice symétrique, définie et positive (condition très utile pour la résolution, *voir le cours de LA311*)

Vocabulaire : *K est dite matrice de rigidité et $\underline{F}$ est dit vecteur d'effort généralisé.*

2.4 Propriétés complémentaires

2.4.1 Nature de l'approximation

On voudrait savoir en quoi notre approximation est fausse.

	Problème exact	Problème approché
Admissibilité cinématique :	$\underline{u}_{ex}$ régulier, $\underline{u}_{ex}$ sur $\partial_1\Omega$	$\underline{u}_h$ régulier, $\underline{u}_h$ sur $\partial_1\Omega$
Admissibilité statique :	$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) + \underline{f}_d = \underline{0}$ sur Ω $\underline{\underline{\sigma}}_{ex} \cdot \underline{n} = \underline{F}_d$ sur $\partial_2\Omega$	$\underline{div}(\underline{\underline{\sigma}}_{ex}) + \underline{f}_d \neq \underline{0}$ sur Ω $\underline{\underline{\sigma}}_h \cdot \underline{n} \neq \underline{F}_d$ sur $\partial_2\Omega$
Relation de comportement	$\underline{\underline{\sigma}}_{ex} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex})$	$\underline{\underline{\sigma}}_h = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h)$

2.4.2 Réécrivons les conditions de minimisation

$\underline{u}_h$ solution de $\min_{\underline{u}\in\mathcal{U}_h} Ep(\underline{u})$ revient à écrire :

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathcal{U}_h^{\emptyset}, \ \left.\frac{\partial Ep(\underline{u}_h + \lambda \cdot \underline{u}_h^*)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = 0 \tag{3.5}$$

On exprime l'énergie potentielle :

$$Ep(\underline{u}_h+\lambda\cdot\underline{u}_h^*) = \frac{1}{2}\cdot\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h + \lambda \cdot \underline{u}_h^*) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h + \lambda \cdot \underline{u}_h^*)\right] dV - \int_\Omega \underline{f}_d\cdot(\underline{u}_h+\lambda\cdot\underline{u}_h^*)\, dV - \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d\cdot(\underline{u}_h+\lambda\cdot\underline{u}_h^*)$$

Soit en développant : $Ep(\lambda) = A + B \cdot \lambda + C \cdot \lambda^2$. Alors l'équation 3.5 devient$B = 0$
C'est à dire :

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathcal{U}_h^{\emptyset}, \int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h^*) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h)\right] dV = \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}_h^*\, dV + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_h^*\, dS \tag{3.6}$$

$$\forall \underline{u}_h^* \in \mathcal{U}_h^{\emptyset}, \int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h^*) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_h\right] dV = \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}_h^*\, dV + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_h^*\, dS \tag{3.7}$$

On peut écrire la même chose pour la solution exacte du problème, qui correspond à $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}_h$. On obtient alors :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{ad}, \int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ex}\right] dV = \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}^*\, dV + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^*\, dS \tag{3.8}$$

Mais l'équation 3.8 est vraie aussi si $\underline{u}_h \in \mathcal{C}_\langle$:

$$\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h^*) \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ex}\right] dV = \int_\Omega \underline{f}_d \cdot \underline{u}_h^*\, dV + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}_h^*\, dS \tag{3.9}$$

En effectuant la soustraction (3.7−3.9), on obtient :

$$\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h^*) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_h - \underline{\underline{\sigma}}_{ex})\right] dV = 0 \tag{3.10}$$

Ce qui reste vrai si $\underline{u}_h^* = \underline{u}_h$ puisque $\underline{u}_h^* \in \mathcal{U}_h$
Et la différence entre les deux équations créées donne :

$$\int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h^* - \underline{u}_h) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}_h - \underline{\underline{\sigma}}_{ex})\right] dV = 0 \tag{3.11}$$

2.4.3 Interprétation dans l'espace des champs cinématiquement admissibles

On introduit le produit scalaire suivant :

$$\forall(\underline{u}_1, \underline{u}_2) \in (\mathcal{U}_{ad})^2,\ (\underline{u}_1|\underline{u}_2) = \int_\Omega Tr\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_1) \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_2)\right] dV$$

C'est bien une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive, d'après les propriétés de l'opérateur de *Hooke* $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$. Alors l'équation 3.11 s'écrit plus simplement :

$$(\underline{u}_h^* - \underline{u}_h|\underline{u}_h - \underline{u}_{ex}) = 0 \tag{3.12}$$

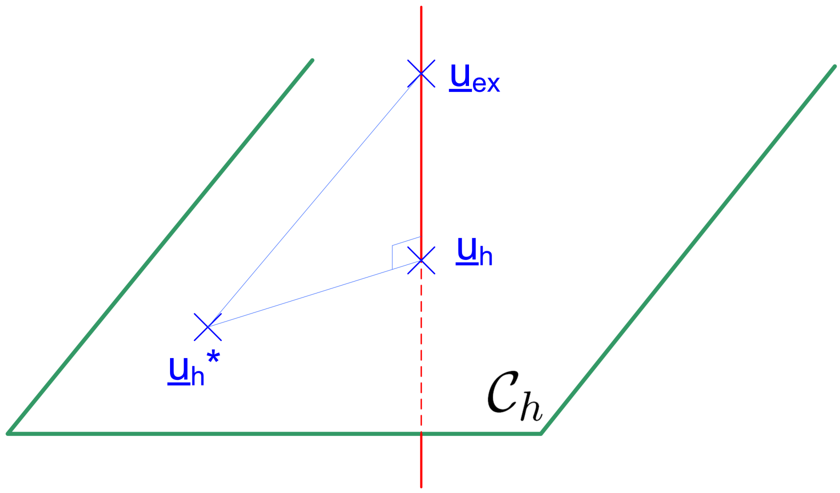

FIG. 3.1 – Projection de la solution exacte sur un sous espace de recherche de solution approchée

Le minimum de $\|\underline{u}_h^* - \underline{u}_{ex}\|$ est obtenu pour $\underline{u}_h^* = \underline{u}_h$, qui est en fait le projeté de $\underline{u}_{ex}$ sur $\mathcal{U}_h$.

2.4.4 Mise en oeuvre des éléments finis

1. Choisir une base $(\underline{\Phi}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ de fonctions de formes, pour constituer le sous espace $\mathcal{U}_h$.
2. Calculer $K, \underline{F}$.
3. Résoudre le système $K\,\underline{u} = \underline{F}$. *(en général, la matrice K est de dimension ≥ 10000)*

Remarque : Un des points clé de la méthode est de choisir des fonctions des formes $\underline{\Phi}_i$ qui prennent une valeur non-nulle dans une partie restreinte de Ω. Ceci a pour conséquence de faire apparaître beaucoup de zéros dans K. La matrice de rigidité ainsi créée est dite *creuse* et même *bande.*

3 Éléments finis pour les poutres droites

3.1 Rappel - Traction

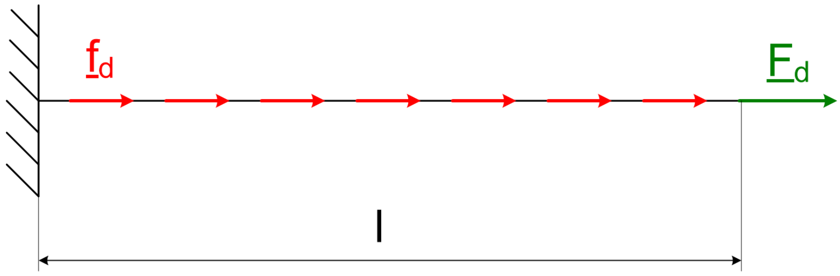

FIG. 3.2 – Poutre sollicitée à la traction

Soit u un champ de déplacement cinématiquement admissible.

$$Ep(u(x)) = \frac{1}{2}\int_0^l ES \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \left[\int_0^l f_d \cdot u(x)\, dx + F_d \cdot u(l)\right]$$

On a : $\mathcal{U}_{ad} = \{u \text{ régulier }, u(0) = 0\}$. On définit $\mathcal{U}_h$, le sous espace dans lequel on va chercher la solution le plus approchée de la solution exacte par :

$$\mathcal{U}_h = \left\{ u_h \text{ régulier }, \forall x \in [0, l],\, u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \varphi_i(x) \right\}$$

avec $(\varphi_i)_{i\in\{1,\ldots,N\}}$ la famille de fonction des formes de base pour $\mathcal{U}_h$.

Énergie de déformation

On cherche ensuite à trouver K_{ij}, le terme de la matrice de rigidité globale. Pour cela, on écrit l'énergie de déformation :

$$e_d = \frac{1}{2}\int_0^l ES \cdot \left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \varphi_i(x)\right)\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^l ES \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \cdot \varphi_i'(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} u_j \cdot \varphi_j'(x)\right) dx$$

On peut réécrire cette expression de manière plus simple, en sortant les termes constants de l'intégrale. On obtient :

$$e_d = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(u_i \cdot u_j \cdot \underbrace{\int_0^l ES \cdot \varphi_i'(x) \cdot \varphi_j'(x)\, dx}_{K_{ij}} \right)$$

Soit en fait :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & K_{ij} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}^T \cdot K \cdot \underline{u} \tag{3.13}$$

Travail des efforts imposés

On veux pouvoir exprimer $\underline{F}$ pour avoir : $W_{Fd} = \underline{u}^T \cdot \underline{F}$.

$$W_{Fd} = \int_0^l f_d \cdot \left(\sum_{i=1}^N u_i \cdot \varphi_i(x) \right) dx + F_d \cdot \left(\sum_{i=1}^N u_i \cdot \varphi_i(l) \right)$$

Ce qui donne en fait :

$$W_{Fd} = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \underbrace{\left(\int_0^l f_d \cdot \varphi_i(x)\, dx + F_d \cdot \varphi_i(l) \right)}_{F_i}$$

Soit, écrit sous forme matricielle :

$$W_{Fd} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ F_i \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

3.2 Choix des fonctions de base

Dans ce paragraphe, on présente le choix classique utilisé pour obtenir un des codes éléments finis les plus simples.

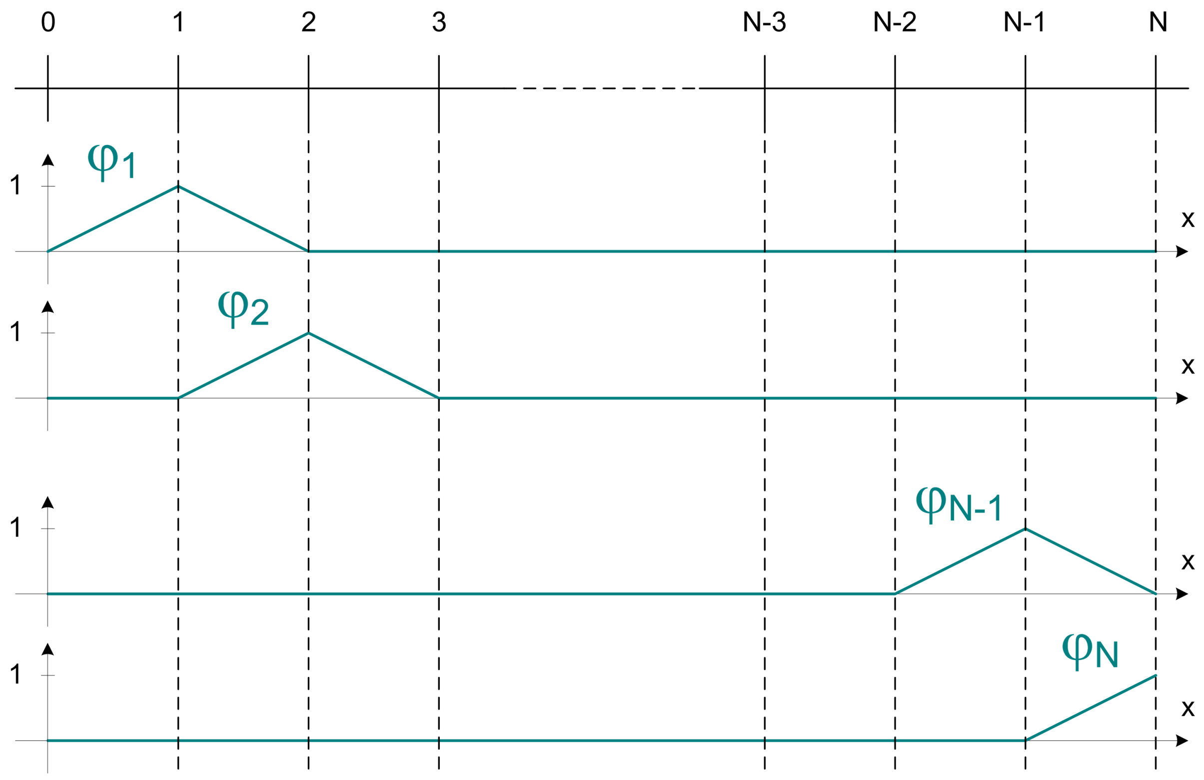

Fig. 3.3 – Fonctions des formes de base utilisées dans cet exemple

$$\begin{cases} u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \cdot \varphi_i(x) \\ u_h(x_j) = u_j \text{ (déplacement nodal)} \end{cases}$$

3.2.1 Calcul des termes de la matrice de rigidité

$$K_{ij} = ES \int_0^l \varphi_i'(x) \cdot \varphi_j'(x)\, dx$$

C'est à dire, plus précisément :
- $K_{ij} = 0 \; si \; |i-j| > 1$
- $K_{ij} = ES \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x) \cdot \varphi_{i+1}'(x)\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x) \cdot \varphi_{i+1}'(x)\, dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i'(x) \cdot \varphi_{i+1}'(x)\, dx \right]$
  $= ES \left(0 - \frac{1}{l_{i+1}} + 0 \right) \; si \; |i-j| = 1$
- $K_{ij} = ES \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_i'(x))^2\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i'(x))^2\, dx \right] = ES \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) \; si \; i = j \; et \; i \neq N$
- $K_{NN} = \frac{ES}{l_N}$

D'où : $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & & & \\ -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} & -\frac{1}{l_{n-1}} \\ & & & -\frac{1}{l_{n-1}} & \frac{1}{l_n} \end{pmatrix}$

3.2.2 Autre méthode de calcul de la matrice de rigidité : par assemblage

$$e_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} ES \left(\frac{du_h}{dx} \right)^2 dx$$

On peut écrire cette expression de manière simplifiée, en utilisant :

$$\left. \frac{du_h}{dx} \right|_{[x_{i-1}, x_i]} = u_{i-1} \cdot \varphi_{i-1}'(x) + u_i \cdot \varphi_i'(x) = \frac{u_i - u_{i-1}}{l_i} \tag{3.15}$$

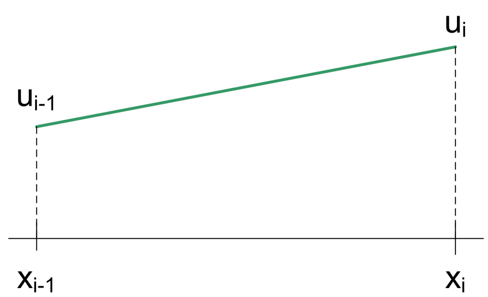

Fig. 3.4 – Expression de la dérivée de u_h sur l'élément i

En utilisant l'équation 3.15, on écrit l'énergie de déformation de l'élément i :

$$e_{di} = \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} ES \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{l_i} \right)^2 dx = \frac{ES}{2 \cdot l_i} \left[u_i^2 + u_{i-1}^2 + 2 \cdot u_i \cdot u_i \right]$$

On peut a nouveau écrire cette expression sous forme matricielle.

$$e_{di} = \frac{1}{2} \cdot \underline{u}_i^T \cdot K_i \cdot \underline{u}_i = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}^T \cdot \frac{ES}{l_i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Vocabulaire : On appelle K_i la matrice de rigidité élémentaire pour l'élément i

On assemble ensuite toutes les matrices élémentaires crées pour construire la matrice de rigidité globale du problème.

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} \ulcorner & \urcorner K_1 & & & \\ \llcorner & \ulcorner \; \lrcorner & \urcorner K_2 & & \\ & \llcorner & \ulcorner \; \lrcorner & \urcorner K_3 & \\ & & \llcorner & \lrcorner & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

La matrice $\widetilde{K}$ ainsi créée est de dimension $(N+1)\times(N+1)$, associée au vecteur déplacement $(u_0, \ldots, u_N)$. Les conditions aux limites imposent $u_0 = 0$, ce qui nous permet de supprimer la première ligne et la première colonne de la matrice brute $\widetilde{K}$: on obtient la matrice de rigidité globale K.