Utilisation du Théorème d'Encadrement

On considère le problème de traction pure suivant. Le domaine étudié Ω est un parallélépipède rectangle. les normales à ses faces sont alignées avec les vecteurs de la base orthonormée directe ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$). La surface latérale, notée S_{lat}, est le regroupement des deux faces normales à $\underline{e}_2$ et des deux normales à $\underline{e}_3$. Elle est libre d'effort. La face S_+, de normale sortante $\underline{e}_1$ est soumise à un déplacement normal donné u_d et libre d'efforts tangentiels. La face S_-, de normale sortante $-\underline{e}_1$ est soumise à un déplacement normal nul et libre d'effort tangentiel. La structure est composée de deux couches d'épaisseurs égales (Ω_1 et Ω_2) constituées chacune de matériaux élastiques linéaires différents de paramètres E_1 et ν_1 pour l'une et E_2 et ν_2 pour l'autre. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et les effets dynamiques sont négligés. On appelle L la longueur dans la direction $\underline{e}_1$ et S la surface des sections perpendiculaires.

On note F la résultantes des efforts de traction mesurée. Par aplication du théorème d'encadrement, on cherche ici à encadrer la valeur d'un module d'Young E_a macroscopique de ce bi-matériau, défini par :

$$F = \frac{E_a S}{L} u_d$$

1. Poser le problème d'élasticité. A-t'il une solution unique ?
2. Définir les espaces d'admissibilité cinématique et statique.
3. Par application de la formule de Clapeyron, proposer un moyen d'encadrer E_a.
4. On fait l'hypothèse d'un état de contraite $\underline{\underline{\sigma}}'$ uniaxial uniforme dans la direction $\underline{e}_1$. Proposer une forme de champs de contrainte statiquement admissible de ce type. Construire l'énergie complémentaire de tels champs. Par application du théorème de l'énergie complémentaire, construire le meilleur de ces champs et exprimer son énergie complémentaire.
5. On considère le champ de déplacement $\underline{U}' = u_d \frac{x_1}{L} \underline{e}_1$. Est-il cinématiquement admissible ? Donner son énergie potentielle.
6. Proposer un encadrement de E_a en utilisant les résultats des questions précédentes.
7. Que devient cet encadrement quand les matériaux sont identiques.

Eléments de correction

1. Problème

$$\underline{u}.\underline{e}_1 = u_d, \ \forall M \in S_+ \quad ; \quad \underline{u}.\underline{e}_1 = 0, \ \forall M \in S_-$$

$$\underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_3 = 0, \ \forall M \in S_{lat} \quad ; \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \ \forall M \in S_+ \quad ; \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \ \forall M \in S_-$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu_i}{E_i}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu_i}{E_i}\,\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{1}}, \quad \forall M \in \Omega_i \ (i=1,2) \qquad ; \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}^T\,\underline{u})$$

Ce problème à une solution unique en contrainte et en déformation. La solution en déplacement est définie à un mouvement de solide rigide près défini par trois paramètres : translations dans les directions $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ et rotation autour de $\underline{e}_1$.

2. Espaces d'amissibilité :

$$\mathcal{U}_{ad} = \big\{\underline{u},\ \text{reg.}/\underline{u}.\underline{e}_1 = u_d,\ \forall M \in S_+,\\ \underline{u}.\underline{e}_1 = 0,\ \forall M \in S_-\big\}$$

$$\Sigma_{ad} = \Big\{\underline{\underline{\sigma}},\ \text{sym.}/\ \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega,\\ \underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_3 = 0,\ \forall M \in S_{lat},\\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0,\ \forall M \in S_+,\\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0,\ \forall M \in S_-\Big\}$$

3. La formule de Clapeyron donne :

$$-E_c(\underline{\underline{\sigma}}_{ex} = E_p(\underline{U}_{ex}) = \frac{1}{2}\int_{S_+} \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_1.u_d\underline{e}_1 dS = \frac{1}{2}Fu_d = \frac{1}{2}\frac{E_aS}{L}u_d^2$$

En utilisant deux champs admissibles approchés $\underline{U}'$ et $\underline{\underline{\sigma}}'$, on peut encadrer E_a par application du théorème d'encadrement :

$$-E_c(\underline{\underline{\sigma}}') \leq \frac{1}{2}\frac{E_aS}{L}u_d^2 \leq E_p(\underline{U}')$$

4. Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}'$ suivant est statiquement admissible et correspond à un état local de traction dans la direction $\underline{e}_1$:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)} \qquad \text{avec } \sigma \text{ scalaire constant inconnu}$$

Son énergie complémentaire est :

$$E_c\sigma = \frac{1}{2}LS\frac{E_1+E_2}{2E_1E_2}\sigma^2 - u_dS\sigma$$

La minimisation de l'énergie complémentaire donne :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{u_d}{L}\frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}$$

et l'énergie complémentaire associée est :

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}') = -\frac{1}{2}\frac{S}{L}\frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}u_d^2$$

5. Le champ de déplacement $\underline{U}'$ est bien cinématiquement admissible. Son énergie potentielle est :

$$E_p(\underline{U}') = \frac{1}{2}\frac{S}{L}\frac{E_1 + E_2}{2}u_d^2$$

6. L'application du théorème d'encadrement donne :

$$\frac{1}{2}\frac{S}{L}\frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}u_d^2 \leq \frac{1}{2}\frac{S}{L}E_a u_d^2 \leq \frac{1}{2}\frac{S}{L}\frac{E_1 + E_2}{2}u_d^2$$

soit

$$\frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} \leq E_a \leq \frac{E_1 + E_2}{2}$$

7. Lorsque les matériaux sont identiques de module d'Young E on retrouve bien :

$$E_a = E$$