Utilisation du Théorème de l'Energie Potentielle

On considère le problème de traction pure suivant. Le domaine étudié Ω est parallélépipède rectangle. les normales à ses faces sont alignées avec les vecteurs de la base orthonormée directe $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. La surface latérale, notée S_{lat}, est le regroupement des deux faces normales à $\underline{e}_2$ et des deux normales à $\underline{e}_3$. Elle est libre d'effort. La face S_+, de normale sortante $\underline{e}_1$ est soumise à une densité surfacique de charge $f\underline{e}_1$. La face S_-, de normale sortante $-\underline{e}_1$ est soumise à une densité surfacique de charge $-f\underline{e}_1$. f est un paramètre de charge donné. Le matériau est élastique linéaire de paramètres E et ν. λ et μ sont les coefficients de lamé associés. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et les effets dynamiques sont négligés. On appelle L la longueur dans la direction $\underline{e}_1$ et S la surface des sections perpendiculaires.

1. Poser le problème d'élasticité. A-t'il une solution unique ?
2. Définir les espaces d'admissibilité cinématique et statique.
3. On fait l'hypothèse d'un champ de déplacement de la forme :

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = q_1\underline{u}_1 + q_2\underline{u}_2 \quad \text{avec} \quad \underline{u}_1 = x_1\underline{e}_1 \text{ et } \underline{u}_2 = x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$$

   où les scalaires q_1 et q_2 sont quelconques. Le champ $\underline{u}_1$ correspond à une élongation dans la direction de traction et le champ $\underline{u}_2$ à un déplacement radial dû aux effets Poisson. Un tel champ est-il cinématiquement admissible ?
4. Construire l'énergie de potentielle d'un tel champ de déplacement.
5. Par application du théorème de l'énergie potentielle, construire le meilleur de ces champs.
6. En déduire le champ de contrainte associé en tout point $\underline{u}(M)$. Ce champ est-il statiquement admissible ? Conclure sur le qualité de ce couple solution.

Eléments de correction

1. Problème

$$\underline{\operatorname{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\pm\underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}}\pm\underline{e}_3 = 0,\ \forall M \in S_{lat} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_1 = f\underline{e}_1,\ \forall M \in S_+ \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_1) = -f\underline{e}_1,\ \forall M \in S_-$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\operatorname{Tr}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{1}}, \quad \forall M \in \Omega \qquad ; \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\operatorname{grad}}}^T\,\underline{u})$$

   Ce problème à une solution unique en contrainte et en déformation. La solution en déplacement est définie à une mouvement de solide rigide près car le système ne possède aucune condition aux limites en déplacement.

2. Espaces d'amissibilité :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\underline{u},\ \text{reg.}\}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{ad} = \Big\{\underline{\underline{\sigma}},\ \text{sym.} \ /\ \underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega,\\ \underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_3 = 0,\ \forall M \in S_{lat},\\ \underline{\underline{\sigma}}\underline{e}_1 = f\underline{e}_1,\ \forall M \in S_+,\\ \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{e}_1) = -f\underline{e}_1,\ \forall M \in S_- \Big\}\end{aligned}$$

3. Un tel champ de déplacement est cinématiquement admissible quelles que soient les valeurs de q_1 et q_2.
4. L'énergie de potentielle est :

$$E_p(q_1, q_2) = \frac{1}{2}LS\big((\lambda+2\mu)q_1^2 + 4(\lambda+\mu)q_2^2 + 4\lambda q_1 q_2\big) - fLSq_1$$

5. L'application du théorème de l'énergie potentielle donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial E_p}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial q_2} = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} (\lambda+2\mu)q_1 + 2\lambda q_2 = f \\ (2\lambda q_1 + (\lambda+\mu)q_2 = 0 \end{array}\right.$$

ce qui correspond au système matriciel :

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2\mu) & 2\lambda \\ 2\lambda & (\lambda+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dont la solution est :

$$\left\{\begin{array}{lll} q_1 & = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}f & = \dfrac{f}{E} \\ q_2 & = \dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}f & = -\dfrac{\nu f}{E} \end{array}\right.$$

soit

$$\underline{u}(M) = \frac{f}{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix}$$

6. Champ de déformation et champ de contrainte associé :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \dfrac{f}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\nu}{E}f & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\nu}{E}f \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)}$$

Le champ de contrainte est statiquement admissible. Le couple est admissible et vérifie la relation de comportement : c'est la solution exacte du problème.