Exercice de cinématique des milieux continus

Soit $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ le référentiel cartésien orthonormé d'étude. On étudie le mouvement d'un milieu continu donné par le champ eulérien des vitesses $\overrightarrow{V}(M)$, où M est le point courant de coordonnées (X_1, X_2, X_3) :

$$\overrightarrow{V}(M,t) = -\frac{vt}{\tau}\overrightarrow{e_1} - \frac{X_2}{\tau}\overrightarrow{e_2}$$

où v et τ sont des constantes positives données.

1. Calculer le taux de déformation $\mathbb{D}$.
2. Donner une représentation Lagrangienne du mouvement. On appellera (X_1^0, X_2^0, X_3^0) les coordonnées du point M^0 correspondant au point M dans la configuration de référence.
3. Calculer l'opérateur gradient $\mathbb{F}$ et l'opérateur de déformation de Green-Lagrange $\mathbb{E}$.

Eléments de correction

1. Taux de déformation :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Représentation Lagrangienne :

$$\begin{cases} X_1(M^0,t) & = -\dfrac{vt^2}{\tau} + X_1^0 \\ X_2(M^0,t) & = X_2^0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ X_3(M^0,t) & = X_3^0 \end{cases}$$

3. Gradient de la transformation et opérateur de Green-Lagrange :

$$\mathbb{F}(M^0,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{\tau}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbb{E}(M^0,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2t}{\tau}} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$