Bases de la MMC

Exercice 1 *Elasticité*

On considère un tube cylindrique creux d'axe $\vec{e}_z$, de longueur L, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e. Dans un repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on se donne le champs de déplacement $\vec{u}(r,\theta,z) = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta + u_z\vec{e}_z$ pour les points de coordonnées (r,θ,z) avec :

$$u_r = -\alpha((1+\nu)\frac{R_i^2}{r} + (1-2\nu)r) \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = -\alpha(1-2\nu)z + d \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{p}{E}\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

où E est le module d'Young du matériau, ν le coefficient de Poisson, p un scalaire donnée et d une constante indéterminée.

1. Exprimer le tenseur linéarisé des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé dans le référentiel cylindrique.
2. En déduire l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, en fonction de R_i, R_e et p.
3. En déduire la valeur du vecteur contrainte sur le bord du tube, en fonction de R_i, R_e et p.

Formulaire

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Eléments de Corrections : Exercice 1

1. Déformations :

$$\varepsilon_{rr} = -\alpha(-(1+\nu)\frac{R_i^2}{r^2} + (1-2\nu)) \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\alpha((1+\nu)\frac{R_i^2}{r} + (1-2\nu)) \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -\alpha(1-2\nu)$$

2. Contraintes

$$\sigma_{rr} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}(1 - \frac{R_i^2}{r^2})p \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}(1 + \frac{R_i^2}{r^2})p \quad ; \quad \sigma_{zz} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}p$$

3. Vecteur contrainte :

$$\text{Surface intérieure } (r = R_i) : \vec{T} = 0 \quad ; \quad \text{Surface extérieure } (r = R_e) : \vec{T} = -p\vec{e}_r$$

$$\text{Extrémités : } \vec{T} = -\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}p$$