

Méthode des Eléments Finis

en Thermique et en Thermo-mécanique

L. CHAMPANEY

Dans cette partie, nous rappelons la formulation d'un problème de conduction thermique linéaire en régime établi par analogie avec l'élasticité linéaire. Nous présentons la formulation des éléments finis pour la conduction thermique. Enfin, nous présentons la méthodologie d'un calcul de thermo-mécanique faiblement couplé.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Conduction thermique | 2 |
| 1.1 | Cadre | 2 |
| 1.2 | Problème de conduction thermique | 2 |
| 1.3 | Analogie avec l'élasticité linéaire | 8 |
| 1.4 | Formulation globale du problème | 9 |
| 2 | Méthode des éléments finis pour la conduction thermique | 11 |
| 2.1 | Approximation nodale élémentaire | 11 |
| 2.2 | Eléments finis pour la conduction thermique | 12 |
| 2.3 | Exemple | 15 |
| 3 | Méthode des éléments finis en thermo-mécanique | 20 |
| 3.1 | Couplage thermo-mécanique | 20 |
| 3.2 | Résolution par la méthode des éléments finis | 21 |
| 3.3 | Exemple | 23 |
| 4 | Conclusions | 27 |

1 Conduction thermique

1.1 Cadre

Nous nous intéressons seulement à des problèmes de conduction thermique en régime établi; C'est-à-dire que les effets dus au temps et la vitesse à laquelle se passent les phénomènes qui nous intéressent ne sont pas pris en compte. Nous cherchons simplement à pouvoir décrire l'état thermique interne d'une structure (répartition de la température et des flux de chaleur) soumise à différentes conditions aux limites thermiques stables une fois que tous les processus dépendants du temps se sont stabilisés.

1.2 Problème de conduction thermique

On considère un solide constitué d'un matériau conducteur de chaleur. Ce solide était initialement dans un état de température donné supposé uniforme

$$T_0(x, y, z) = T_0$$

Sous l'action de différentes conditions aux limites ou volumiques indépendantes du temps, le champ de température interne, va varier pour atteindre, au bout d'un temps infini s'il le faut, la valeur :

$$T(x, y, z)$$

que nous recherchons.

Le problème de conduction thermique se pose sous la forme suivante :

Trouver le champs de variation de température

$$\theta(x, y, z) = T(x, y, z) - T_0$$

et le vecteur des flux de chaleur

$$\vec{q}(x, y, z)$$

en tout point du domaine, vérifiant :

- la loi de comportement thermique.
- les conditions aux limites (convection, rayonnement, ...)
- l'équilibre thermique en régime établi,

Le vecteur des flux de chaleur exprime la quantité de chaleur traversant une surface dans une direction \vec{n} donnée (Fig 1 :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

Le vecteur flux de chaleur s'exprime donc en *Watt par mètres carrés* : $W.m^{-2}$

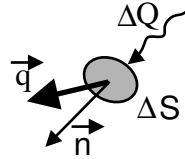


FIG. 1 – Vecteur flux de chaleur

1.2.1 Loi de comportement

La loi de comportement communément utilisée en conduction thermique est la loi de **Fourier** :

$$\vec{q} + k \overrightarrow{\text{grad}} \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} q_x + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ q_y + k \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ q_z + k \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

qui traduit le fait que le flux de chaleur se produit des zones chaudes vers les zones froides proportionnellement au gradient de température.

Ceci s'illustre simplement en dimension un (fig 2) :

$$q_x + k \frac{d\theta}{dx} = 0$$

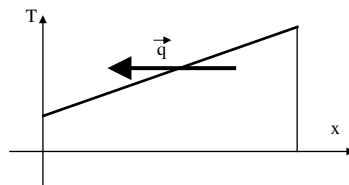


FIG. 2 – Loi de Fourier en dimension un

Les tangentes en chaque point au vecteur flux déterminent les lignes de flux de chaleur. Un tube de flux de chaleur est constitué par un ensemble de lignes de flux s'appuyant sur un contour fermé. La loi de Fourier impose qu'en chaque point les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes.

La loi de Fourier est une loi *phénoménologique*. Les théories de l'interprétation microscopique du processus de conduction thermique dépendent de la nature du milieu (gaz, liquide, solide amorphe, solide cristallin, ...); elles sont loin d'être achevées.

Le coefficient k est appelé *coefficient de conductivité* ou simplement *coefficient de Fourier*. Il s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Nous nous plaçons ici dans le cas du comportement thermique isotrope. Il est bien entendu possible de simuler des matériaux anisotropes. Le tableau 1 présente des valeurs courantes pour ce coefficient :

| Matériau | k |
|------------------------------|------------|
| Gaz (pression atmosphérique) | 0.006—0.18 |
| Air | 0.024 |
| Matériaux isolants | 0.025—0.25 |
| Alliages métalliques | 10—150 |
| <u>Matériaux purs</u> | |
| Cuivre | 390 |
| Aluminium | 238 |
| Inox | 14 |
| Béton pur | 1.75 |
| Verre | 1.13 |

TAB. 1 – Ordres de grandeur du coefficient de conductivité thermique (à 20 ° C)

1.2.2 Conditions aux limites

Il existe différents types de conditions aux limites en thermique. Elles traduisent les échanges de chaleur entre le corps qui nous intéresse et son environnement extérieur. Dans notre cas, nous considérons surtout des corps solides. L'environnement extérieur est le fluide qui entoure le solide, mais aussi les autres corps solides qui peuvent être à proximité.

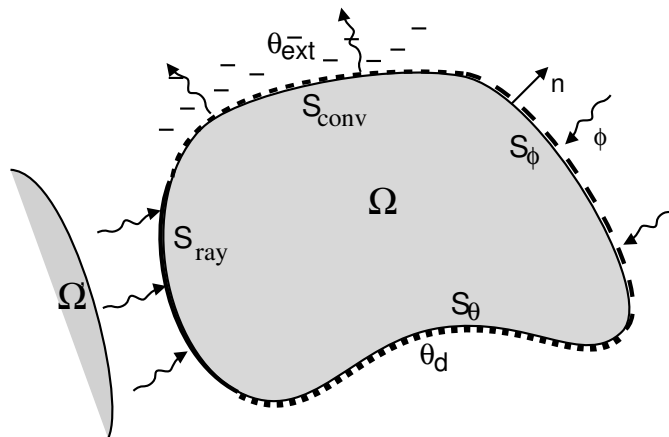


FIG. 3 – Conditions aux limites en thermique

Convection Le phénomène de convection thermique traduit les échanges de chaleur avec un fluide extérieur. Ces échanges peuvent être libres ou forcés (renouvellement permanent du fluide). La condition de convection à travers la surface S_c avec un milieu extérieur sur lequel est imposée une variation de température θ_{ext} par rapport à la température de référence s'écrit :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} + h_c(\theta_{ext} - \theta) = 0 \quad \text{sur } S_c$$

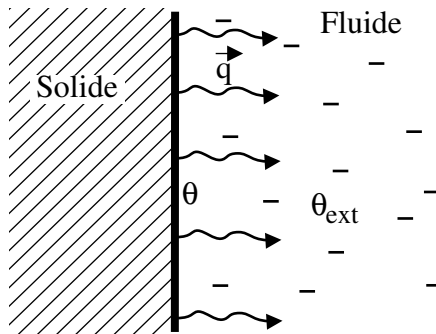


FIG. 4 – Convection

Le coefficient de convection h_c s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$. Il dépend du fluide extérieur et du caractère forcé ou non de l'échange. Le tableau 2 donne quelques ordres de grandeur du coefficient d'échange.

| Fluide | Convection libre | Convection forcée |
|--------|------------------|-------------------|
| Air | 5—25 | 10—50 |
| Eau | 100—900 | 100—15000 |
| Huile | — | 50—2000 |

TAB. 2 – Ordres de grandeur du coefficient de convection thermique

Cette loi de convection permet de simplifier l'extérieur du domaine dans l'étude : le problème de thermique n'est résolu qu'à l'intérieur du domaine. La loi linéarisée présentée ci-dessus est bien vérifiée dans le cas de la convection forcée. Elle l'est moins dans le cas de la convection libre pour laquelle le coefficient d'échange h_c devrait être pris sous la forme

$$h_c = \alpha(\theta - \theta_{ext})^m$$

où m est égal à **0.25** pour un écoulement laminaire et à **0.33** pour un écoulement turbulent.

Les coefficients d'échange peuvent aussi dépendre de la définition de l'écart en température extérieure θ_{ext} . Dans le cas d'un espace extérieur ouvert, il s'agit de la température

au loin, c'est-à-dire en dehors de la couche limite. Dans le cas d'un espace intérieur, il peut s'agir de la température *centrale* ou moyenne dite *de mélange*.

Rayonnement Le phénomène de rayonnement est un échange de chaleur entre deux corps voisins par radiation à travers le fluide qui les sépare. Si les deux parois des deux corps sont aux températures θ_1 et θ_2 , le flux d'échange est :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} + \sigma f(\theta_2^4 - \theta_1^4) = 0$$

où f est un facteur de forme dépendant des positions relatives des parois et de leur aptitude à émettre de la chaleur sous forme d'ondes. $\sigma = 5.6710^{-8}$ est la constante de *Stefan-Boltzmann*.

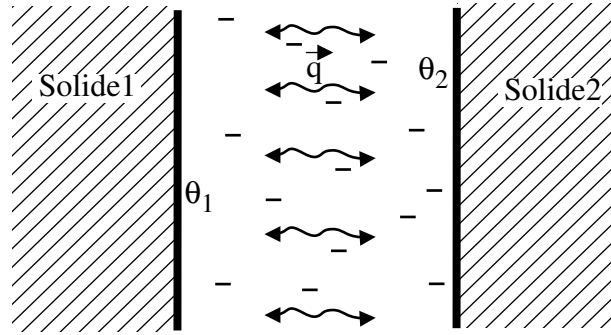


FIG. 5 – Rayonnement

Dans le cas où les températures des deux corps sont voisines d'une température moyenne θ_m , on peut linéariser :

$$\sigma f(\theta_1^4 - \theta_2^4) = 4\sigma f\theta_m^4(\theta_1 - \theta_2) = h_r(\theta_1 - \theta_2)$$

Au final, le rayonnement à travers la surface S_r avec un corps extérieur sur lequel est imposée une variation de température θ_{ext} par rapport à la température de référence est :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} + h_r(\theta_{ext} - \theta) = 0 \quad \text{sur } S_r$$

Le flux a la même forme que dans le cas de la convection. Le coefficient h_r vaut en général quelques $W.m^{-2}.K^{-1}$. Il peut bien sûr y avoir à la fois convection et rayonnement sur une surface. On note alors de manière générale :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} + h(\theta_{ext} - \theta) = 0 \quad \text{sur } S_r \cup S_c$$

où h est le coefficient d'échange.

Les échanges par convection et par rayonnement sont les conditions aux limites naturelles en thermique. Pour simplifier le problème, on peut aussi utiliser deux autres types de condition, qui sont en fait des dérivées des conditions d'échange.

Température imposée

$$\theta = \theta_d \quad \text{sur } S_\theta$$

qui peut correspondre à une convection tellement forcée que le corps prend la température θ_d du fluide.

Flux imposé

$$\vec{q} \cdot \vec{n} + \phi_d = 0 \quad \text{sur } S_\phi$$

où \vec{n} est la normale à la surface. On utilise cette condition aux limites pour les situations mal maîtrisées pour lesquelles on connaît seulement la quantité de chaleur échangée globalement qu'on relie au flux ϕ_d à partir de la surface d'échange.

Cette condition aux limites est aussi utilisée pour traduire :

– une isolation :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$$

– une condition de symétrie :

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$$

qui traduit que la chaleur qui sort par la surface rentre aussi (par symétrie). Il n'y a donc ni perte ni de gain de chaleur.

1.2.3 Equilibre thermique

La loi d'équilibre thermique est l'application directe du premier principe de la thermodynamique. Elle traduit le fait que le flux de chaleur ne peut varier en traversant un élément de volume que s'il y a un apport volumique de chaleur extérieur dans l'élément de volume :

$$\text{div } \vec{q} + c_d = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + c_d = 0$$

Les apports volumiques de chaleur c_d peuvent correspondre à des effets Joule ou bien au résultat d'une réaction chimique endo- ou exo-thermique dans le volume.

1.3 Analogie avec l'élasticité linéaire

L'analogie avec l'élasticité linéaire est simple car les équations ont la même structure. Il y a seulement un ordre de différence entre les deux types de problèmes : en élasticité l'inconnue de base (le déplacement) est un vecteur (tenseur d'ordre 1) alors qu'en thermique c'est un scalaire (la variation de température, tenseur d'ordre 0).

Le tableau 3 rassemble les correspondances entre l'élasticité statique et la thermique stationnaire terme par terme.

| Elasticité | | Thermique | |
|--------------------|---|---|--------------------------|
| Nom | Description | Description | Nom |
| Déplacement | \vec{u} | θ | Variation de température |
| Contrainte | σ | \vec{q} | Flux de chaleur |
| Déformation | ϵ | $\overrightarrow{\text{grad}} \theta$ | Gradient |
| Déplacement imposé | \vec{u}_d | θ_d | Température imposée |
| Effort imposé | \vec{F}_d | ϕ_d | Flux imposé |
| Effort volumique | \vec{f}_d | c_d | Apport volumique |
| Ressort | $\vec{F} \cdot \vec{n} = k \vec{u} \cdot \vec{n}$ | $\vec{q} \cdot \vec{n} = h(\theta - \theta_{ext})$ | Convection |
| Comportement | $\sigma = C \epsilon$ | $\vec{q} + k \overrightarrow{\text{grad}} \theta = 0$ | Loi de Fourier |

TAB. 3 – Analogie élasticité-thermique

Les différences de signe qui apparaissent (dans la relation de comportement et dans les conditions aux limites) sont liées au fait que :

- en mécanique, quand une force positive est appliquée, elle est dirigée vers l'extérieur de la matière (Fig 6),
- en thermique, quand un flux positif est appliqué, il est dirigé vers l'intérieur de la matière (chaleur entrante) (Fig 6).

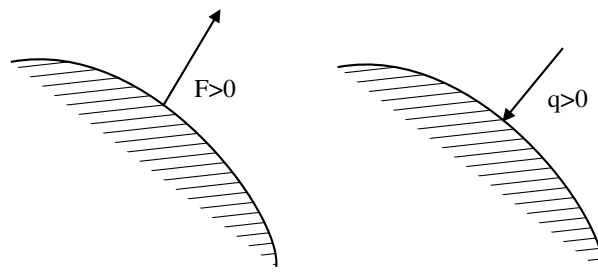


FIG. 6 – Analogie thermique-mécanique

1.4 Formulation globale du problème

En suivant la logique qui a conduit à l'élaboration de la méthode des éléments finis en élasticité linéaire (voir le premier chapitre de ce cours), nous devons d'abord formuler le problème de thermique sous forme globale.

Il n'est pas possible d'utiliser ici le théorème des travaux virtuels qui est un outil dédié à la mécanique. Nous pourrions construire arbitrairement un équivalent du théorème des travaux virtuels. Cette voie n'est pas la plus simple, car il n'est pas possible de trouver une signification physique aux termes que nous allons construire.

Il est plus systématique de passer par une *formulation variationnelle* du problème. C'est ce qui est fait ci-dessous. Nous ne nous attardons pas sur les considérations mathématiques compliquées qui accompagnent les formulations variationnelles.

La relation d'équilibre (premier principe)

$$\operatorname{div} \vec{q} + c_d \quad \text{dans } \Omega$$

est écrite sous forme faible :

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{q} + c_d) \cdot \theta^* dV \quad \forall \theta^* \in \Theta_{ad}$$

où Θ_{ad} est l'ensemble des champs de température qui sont nuls sur les zones de température imposée :

$$\theta^* = 0 \quad \text{sur } S_{\theta}$$

Par le théorème d'intégration par partie, on obtient :

$$-\int_{\Omega} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta^* dV + \int_S \vec{q} \cdot \vec{n} \theta^* dS + \int_{\Omega} c_d \cdot \theta^* dV = 0, \forall \theta^* \in \Theta_{ad}$$

En appliquant la relation de comportement et les conditions aux limites, on obtient :

$$\int_{\Omega} \vec{k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta^* dV = \int_{S_{\phi}} \phi_d \theta^* dS + \int_{S_r \cup S_c} h(\theta - \theta_{ext}) \theta^* dS + \int_{\Omega} c_d \cdot \theta^* dV, \quad \forall \theta^* \in \Theta_{ad}$$

qu'on écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega} \vec{k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \theta^* + \int_{S_r \cup S_c} h \theta \theta^* dS =$$

$$\int_{S_{\phi}} \phi_d \theta^* dS - \int_{S_r \cup S_c} h \theta_{ext} \theta^* dS + \int_{\Omega} c_d \cdot \theta^* dV, \quad \forall \theta^* \in \Theta_{ad}$$

Le problème à résoudre, aussi appelé *formulation variationnelle en température*, est :

Trouver le champs d'élévation de température $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$ satisfaisant aux conditions aux limites en températures imposées et tel que :

$$\int_{\Omega} \overrightarrow{k} \text{grad } \theta \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta^* dV + \int_{S_r \cup S_c} h \theta \theta^* dS =$$

$$\int_{S_\phi} \phi_d \theta^* dS - \int_{S_r \cup S_c} h \theta_{ext} \theta^* dS + \int_{\Omega} c_d \cdot \theta^* dV, \quad \forall \theta^* \in \Theta_{ad}$$

Cette expression est l'équivalente de celle obtenue en élasticité par le principe des puissances virtuelles.

2 Méthode des éléments finis pour la conduction thermique

2.1 Approximation nodale élémentaire

C'est le champ de température qui est approximé ici :

$$\theta(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i = \{N\} \{\bar{\theta}\}$$

où $\{\bar{\theta}\}$ est le vecteur des températures nodales.

En adoptant les notations du deuxième chapitre de ce cours, le gradient de température s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \theta = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial z} \theta_i \end{array} \right\} = [\partial N] \{\bar{\theta}\}$$

Dans le membre de gauche de la formulation variationnelle, le terme issu de la conduction thermique devient, après assemblage sur tous les éléments :

$$\int_{\Omega} k \overrightarrow{\text{grad}} \theta \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta^* = \int_{\Omega} k \{\bar{\theta}^*\}^t [\partial N]^t [\partial N] \{\bar{\theta}\} = \{\bar{\theta}^*\}^t [C_d] \{\bar{\theta}\}$$

où $[C_d]$ est la matrice de conductivité pour les effets de conduction. Le terme provenant des conditions d'échange devient après assemblage sur les éléments :

$$\int_{S_r \cup S_c} h \theta \theta^* dS = \int_{S_r \cup S_c} h \{\bar{\theta}^*\}^t \{N\}^t \{N\} \{\bar{\theta}\} dS = \{\bar{\theta}^*\}^t [C_c] \{\bar{\theta}\}$$

où $[C_c]$ est la matrice de conductivité pour les effets de convection.

Au final on obtient :

$$\int_{\Omega} k \overrightarrow{\text{grad}} \theta \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta^* + \int_{S_r \cup S_c} h \theta \theta^* dS = \{\bar{\theta}^*\}^t [[C_d] + [C_c]] \{\bar{\theta}\} = \{\bar{\theta}^*\}^t [C] \{\bar{\theta}\}$$

où $[C]$ est la *matrice de conductivité*.

De la même manière que nous avons procédé en élasticité, le membre de droite devient :

$$\int_{\Omega} c_d \cdot \theta^* dV + \int_{S_{\phi}} \phi_d \theta^* dS - \int_{S_r \cup S_c} h \theta_{ext} \theta^* dS = \{\bar{\theta}^*\} \{\phi\}$$

où $\{\phi\}$ est le *vecteur des flux généralisés*.

La formulation variationnelle approchée devient donc :

Trouver le vecteur d'élévation de température nodale $\{\bar{\theta}\}$ satisfaisant aux conditions aux limites en températures imposées et tel que :

$$\{\bar{\theta}^*\}^t \{[C]\{\bar{\theta}\} - \{\phi\}\} = 0$$

Comme en élasticité, les conditions aux limites en température peuvent s'appliquer par substitution (suppression de lignes et colonnes), pénalisation ou multiplicateur de Lagrange.

Le problème à résoudre devient alors :

$$[C]\{\bar{\theta}\} = \{\phi\}$$

où $[C]$ contient les modifications permettant de satisfaire aux conditions aux limites en température.

Une fois les températures nodales connues, on peut calculer les flux de chaleur élément par élément :

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = -k[\partial N]\{\bar{\theta}\}$$

2.2 Eléments finis pour la conduction thermique

2.2.1 Remarques générales

La construction des éléments finis pour la conduction thermique fait appel aux mêmes techniques que celles employées pour les éléments finis en mécanique. Nous rappelons quelques techniques et constats :

- les éléments sont construits à partir de la notion de d'élément de référence, qui est la même qu'en mécanique.
- l'intégration numérique employée est la même que celle utilisée en mécanique.
- dans le cas de la convection, le terme :

$$\int_{S_r \cup S_c} h\theta\theta^* dS = \int_{S_r \cup S_c} h\{\bar{\theta}^*\}^t \{N\}^t \{N\} \{\bar{\theta}\} dS = \{\bar{\theta}^*\}^t [C_c] \{\bar{\theta}\}$$

n'a pas d'équivalent en mécanique. Il faut juste remarquer que ce terme est de degré plus élevé que les autres termes de la matrice de conductivité. Il nécessite donc l'emploi d'une intégration numérique adaptée.

- les composantes du vecteur flux ont les mêmes propriétés que les composantes de contrainte :
 - discontinuité entre deux éléments,
 - non vérification de l'équilibre thermique,
 - expression des valeurs aux points d'intégration.
 Comme le flux est un vecteur, il est souvent tracé en post traitement sous forme de vecteur.

Etant données les similitudes avec les éléments finis en mécanique, nous ne donnons donc pas le détail de chaque élément.

2.2.2 Eléments structuraux unidimensionnels

Ces éléments, qui sont l'équivalent des *barres* en mécanique, ne sont pas très utiles pour la résolution de problèmes de conduction thermique. En effet, étant donnée la simplicité des équations, la résolution de problèmes de conduction thermique unidimensionnel ne requiert pas le recours à la méthode des EF. En fait, ils sont utilisés dans le cas de couplages thermomécaniques sur des barres, pour les calculs de treillis par exemple. Voir le paragraphe 3 pour le couplage thermo-mécanique.

2.2.3 Eléments Massifs

Les éléments massifs pour la conduction thermique sont les mêmes que les éléments massifs pour la mécanique.

Le tableau 4 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments massifs bidimensionnels.

| Elément | Quantités | Noms | Qualité |
|---------------------|---------------------|------------------------|-----------------------------------|
| Triangle 3 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y | linéaire constant |
| Triangle 6 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y | quadratique linéaire |
| Quadrangle 4 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y | linéaire linéaire ¹ |
| Quadrangle 8 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y | quadratique linéaire |

TAB. 4 – Eléments Finis massifs bidimensionnels pour la conduction thermique

On trouve aussi l'équivalent de ces éléments pour les problèmes axi-symétriques.

Le tableau 5 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments massifs tridimensionnels.

¹à cause d'un terme linéaire dû à la présence du terme *rs* dans l'approximation nodale

| Élément | Quantités | Noms | Qualité |
|---------------------|---------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Tétraèdre 4 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | linéaire constant |
| Tétraèdre 10 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | quadratique linéaire |
| Pyramide 5 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | linéaire constant |
| Pyramide 13 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | quadratique linéaire |
| Prisme 6 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | linéaire constant |
| Prisme 15 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | quadratique linéaire |
| Cube 8 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | linéaire constant |
| Cube 20 noeuds | Température Flux | θ q_x, q_y, q_z | quadratique linéaire |

TAB. 5 – Eléments Finis massifs tridimensionnels pour la conduction thermique

2.2.4 Elements finis structuraux 2D et 3D

Selon les logiciels employés, on peut trouver des éléments finis dits *plaque* ou *coque* qui proposent une variation quadratique de la température dans l'épaisseur. Les degrés de liberté sont alors la température sur la surface moyenne, la température sur la surface supérieure et la température sur la surface inférieure (Fig 7).

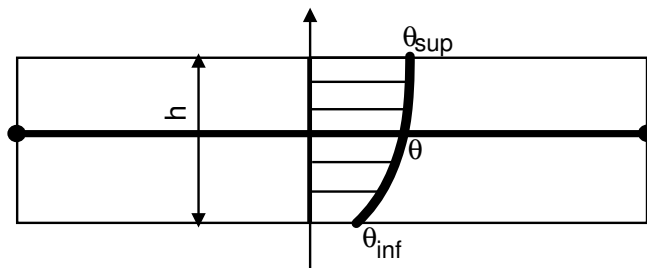


FIG. 7 – Plaque avec répartition quadratique de la température dans l'épaisseur

Les conditions aux limites peuvent être différentes sur la peaux inférieures et supérieure de manière à créer une répartition inhomogène dans l'épaisseur. Ces éléments sont aussi et surtout utilisés pour le couplage avec la mécanique.

2.3 Exemple

Nous montrons ici un exemple de calcul en conduction thermique résolu par la méthode des éléments finis.

2.3.1 Problème

Il s'agit d'un problème de plancher chauffant en béton (Fig 8). Une dalle de béton de $0.2m$ d'épaisseur est située entre deux pièces dans lesquelles règne des températures différentes. Elle est traversée de tuyaux de $0.04m$ de diamètres distants de $0.4m$ dans lesquels circule de l'eau chaude.

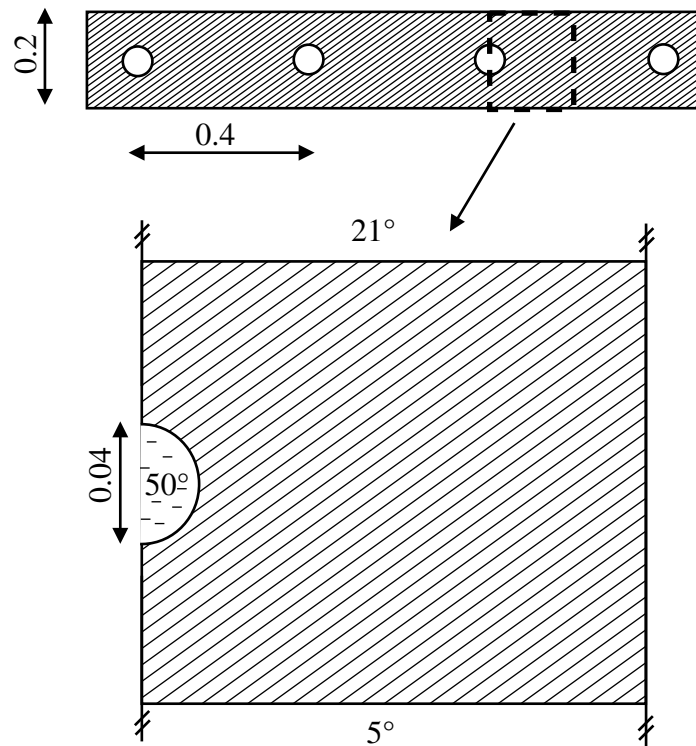


FIG. 8 – Plancher chauffant

Compte tenu des symétries, on étudie seulement une portion du plancher. On impose des conditions de symétrie (flux normal nul) sur les bords gauche et droit. Le chauffage est assurée par la circulation d'eau à $50^\circ C$ dans le tuyau. On imagine que l'eau circule suffisamment rapidement pour que la paroi du tuyau soit en permanence à $50^\circ C$.

On imagine des conditions de convection libre ($h_c = 20W.m^{-2}.K^{-1}$) avec l'air ambiant à $21^\circ C$ dans la pièce du dessus et avec l'air ambiant de la pièce du dessous à $5^\circ C$. La température de référence T_0 est prise uniforme à $0^\circ C$

Le matériau considéré est du béton ($k = 1.75W.m^{-1}.K^{-1}$).

2.3.2 Champ de température

La figure 9 présente le maillage utilisé. Il s'agit ici d'éléments triangulaires à trois noeuds linéaires en température. Ce maillage est constitué de **57** éléments et **40** noeuds. Le problème contient donc **40** degrés de liberté.

La figure donne aussi les isovaleurs du champ de température.

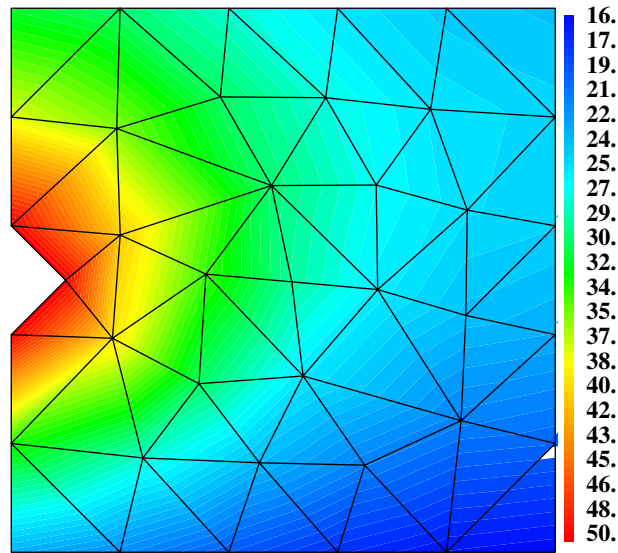


FIG. 9 – Champ de température EF

2.3.3 Champ de flux

La figure 10 représente les isovaleurs des deux composantes (q_x et q_y) du champ de température.

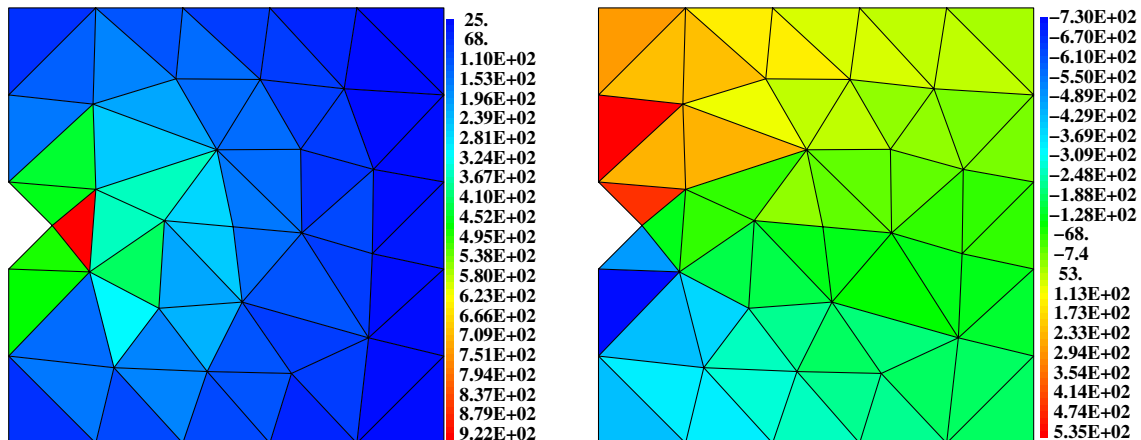


FIG. 10 – Composantes q_x (gauche) et q_y (droite) du vecteur flux

On constate bien que ces champs sont discontinus au passage d'un élément à un autre.

Ce champ des flux est tracé sous forme de vecteur sur la figure 11. Pour obtenir ce tracé, le champ de flux à été calculé et moyenné aux noeuds. Il s'agit en quelque sorte d'un champ *lissé*.

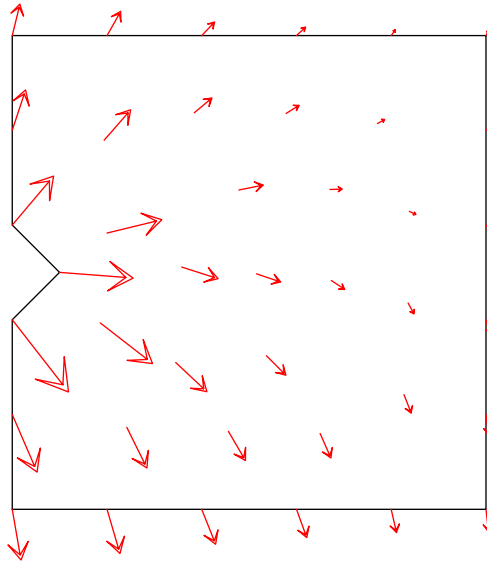


FIG. 11 – Champ de vecteur flux EF

On constate sur cette figure que les conditions aux limites de symétrie ne sont pas vérifiées exactement par ce champ. En effet, les composantes normales du champ ne sont pas nulles sur les bords gauche et droit.

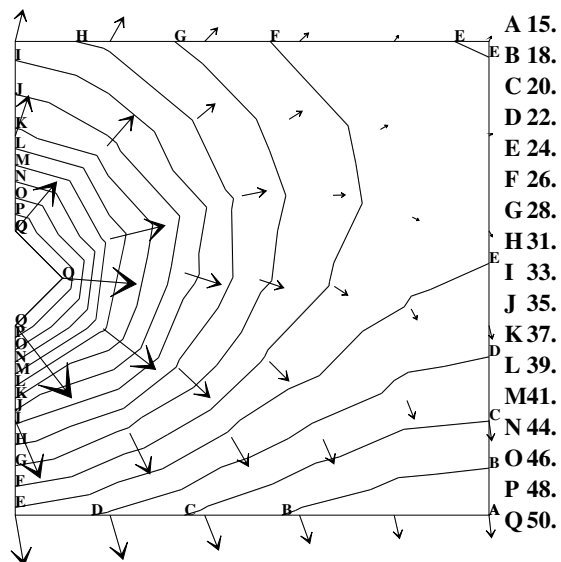


FIG. 12 – Champ de vecteur flux EF et isothermes

Ce champ de vecteur flux est maintenant superposé aux isothermes (Fig 12). Le vecteur flux est bien perpendiculaire aux isothermes, aux erreurs d'approximation EF près.

2.3.4 Amélioration de la solution

La solution précédente est améliorée en utilisant des éléments plus petits et une approximation quadratique du champ de température. Il s'agit ici d'éléments triangulaires à six noeuds. Ce maillage est constitué de **217** éléments et **476** noeuds. Le problème contient donc **476** degrés de liberté.

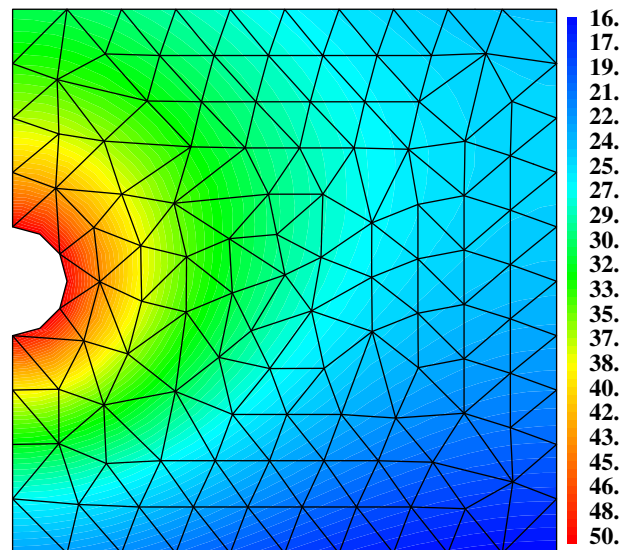


FIG. 13 – Champ de température EF (éléments quadratiques)

Le champ de solution ne semble pas être tellement amélioré, si ce n'est en régularité. Par contre, le champ de flux (Fig 14) est nettement amélioré. Les conditions de symétrie sont maintenant respectées.

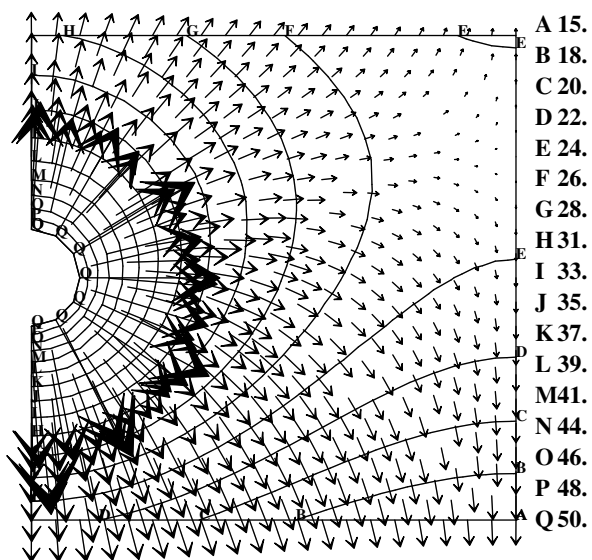


FIG. 14 – Champ de vecteur flux EF et isothermes (éléments quadratiques)

3 Méthode des éléments finis en thermo-mécanique

3.1 Couplage thermo-mécanique

3.1.1 Couplage faible

Le couplage thermo-mécanique dont nous parlons ici est appelé couplage faible. Nous ne prenons en compte que les effets de dilatation c'est-à-dire les effets de la thermique sur la mécanique. Les effets inverses, mécanique sur thermique, que sont les élévations de température dues aux déformations ne sont pas prise en compte.

La mécanique n'ayant pas d'effet sur la thermique, le problème de conduction thermique peut être résolu d'abord sans aucune modification par rapport à ce qui est présenté dans les paragraphes précédents.

3.1.2 Relation de comportement thermo-mécanique

Le couplage se fait par la relation de comportement qui s'écrit, lorsque les effets de dilatation thermique sont pris en compte :

$$\{\epsilon\} = [C_{el}]^{-1}\{\sigma\} + \alpha\theta\{I\}$$

ou dans l'autre sens :

$$\{\sigma\} = [C_{el}]\{\epsilon\} - \alpha\theta[C_{el}]\{I\}$$

avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad \{I\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[C_{el}]$ est la matrice du comportement élastique introduite au premier chapitre. $\{I\}$ est le vecteur identité au sens de la représentation vectorielle des contraintes et des déformations.

Cette relation de comportement exprime que :

- s'il y a élévation de température ($\theta > 0$), il peut y avoir dilatation (les composantes de cisaillement ne sont pas affectées) sans contrainte.
- s'il y a élévation de température sans possibilité de déformation, il y a compression du milieu.

α est un paramètre scalaire appelé *coefficient de dilatation thermique*. Il est exprimé en K^{-1} . Nous nous plaçons ici dans le cas de la dilatation thermique isotrope. Il est bien entendu possible d'utiliser une dilatation anisotrope. Le tableau 6 présente des valeurs de α pour quelques matériaux usuels.

| matériau | α |
|-----------|---------------|
| Plomb | 2.9510^{-5} |
| Zinc | 2.9010^{-5} |
| Aluminium | 2.3310^{-5} |
| Cuivre | 1.7010^{-5} |
| Fer | 1.2210^{-5} |
| Laiton | 1.8510^{-5} |
| Verre | 7.0010^{-6} |
| Invar | 1.0010^{-6} |

TAB. 6 – Ordres de grandeur du coefficient de dilatation thermique

3.2 Résolution par la méthode des éléments finis

3.2.1 Formulation EF du problème

La quantité :

$$\{\epsilon_{th}\} = \alpha\theta\{I\}$$

est appelée *dilatation thermique*. Elle est complètement connue sur un élément dès lors que le problème de conduction thermique est résolu (c'est-à-dire que le champ de température $\theta(x, y, z)$ est calculé).

La quantité :

$$\{\epsilon_m\} = [C_{el}]^{-1}\{\sigma\}$$

est appelée *déformation mécanique*. Elle est inconnue et dépend de la résolution du problème thermique.

Pour la résolution du problème de mécanique, il s'agit d'imposer une partie de la déformation :

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_m\} + \{\epsilon_{th}\}$$

Or, il n'est pas possible d'imposer une partie de la déformation en éléments finis. Les seules quantités qui peuvent être imposées sont des déplacements, des efforts surfaciques et des efforts volumiques. Le problème est donc réécrit en introduisant :

$$\{\sigma_{th}\} = \alpha\theta[C_{el}]\{I\}$$

une contrainte *thermique* initiale connue qui est en équilibre avec le champ de forces volumiques *thermiques* :

$$\{\bar{f}_{th}\} = \int_{\Omega} [\partial N]^t \{\sigma_{th}\} dV$$

Ce champ de forces volumiques $\{\bar{f}_{th}\}$ imposé sur la structure libre crée le champ de contrainte $\{\sigma_{th}\}$, à qui correspond la dilatation thermique $\{\epsilon_{th}\}$ par la relation de comportement.

Le problème mécanique est donc résolu en appliquant le champ de forces volumiques *thermiques* $\{\bar{f}_{th}\}$ en plus du reste du chargement mécanique. Une fois le vecteur des déplacements nodaux $\{\bar{u}\}$ calculé, on obtient le champ de déformation :

$$\{\epsilon\} = [\partial N]\{\bar{u}\} = \{\epsilon_m\} + \{\epsilon_{th}\}$$

à partir du duquel on peut calculer :

$$\{\sigma\} = [C_{el}]\{\epsilon\} - \{\sigma_{th}\}$$

Remarque Attention, ce champ de contraintes *thermiques* $\{\sigma_{th}\}$ n'est pas un champ de contrainte associé aux effets thermiques seuls. En effet, la dilation thermique sur une structure libre sous l'effet d'une élévation de température se fait sans création de contrainte. Ce champ $\{\sigma_{th}\}$ est un artifice de calcul : c'est simplement la contrainte qui correspond à la dilatation $\{\epsilon_{th}\}$ par la relation de comportement mécanique élastique. C'est pour cela qu'elle est retirée de la contrainte $[C_{el}]\{\epsilon\}$ en fin de calcul.

3.2.2 Stratégie de résolution

La stratégie de résolution d'un problème thermo-mécanique faiblement couplé est donc la suivante :

1. Résolution du problème de conduction. Obtention du champ de températures nodales $\{\bar{\theta}\}$.
2. Calcul dans chaque élément des contraintes *thermiques* :

$$\{\sigma_{th}\} = \alpha\theta[C_{el}]\{I\}$$

3. Calcul du vecteur des forces volumiques *thermiques* nodales par assemblage des termes élémentaires :

$$\{\bar{f}_{th}\} = \int_{\Omega} [\partial N]^t \{\sigma_{th}\} dV$$

4. Résolution du problème mécanique par application des charges mécaniques en plus du champ de forces nodales $\{\bar{f}_{th}\}$. Obtention du vecteur des déplacements nodaux $\{\bar{u}\}$.
5. Calcul du champ de contraintes vraies, élément par élément :

$$\{\sigma\} = [C_{el}][\partial N]\{\bar{u}\} - \{\sigma_{th}\}$$

3.2.3 Difficultés

Ce besoin des températures nodales pour le calcul des forces *thermiques* nodales implique l'utilisation du même maillage pour le calcul mécanique et pour le calcul thermique.

Il n'est pas du tout évident qu'un même maillage soit à la fois adapté pour le calcul thermique et pour le calcul mécanique. Heureusement, le problème mécanique est en général plus compliqué que le problème thermique (présence de concentrations de contraintes, de singularités, ...). C'est pourquoi le maillage utilisé pour le calcul thermique et le calcul mécanique est souvent celui qui est optimisé pour le calcul mécanique.

Une autre solution est de faire une projection du champ de température du maillage thermique vers le maillage mécanique. Cependant, cette projection se fait rarement sans perte de qualité de la solution. C'est pourquoi cette technique est relativement peu utilisée.

3.3 Exemple

On reprend l'exemple du plancher chauffant. Pour l'étude des couplages thermo-mécaniques, nous commençons par garder le maillage qui donnait les meilleurs résultats en thermique. Les éléments sont donc des triangles à six noeuds. Comme en thermique, le maillage comporte **217** éléments et **476** noeuds. En mécanique, il y a donc **952** degrés de liberté. Les calculs mécaniques utilisent les températures nodales calculées dans la partie précédente.

On commence par étudier la dilatation thermique seule de la pièce. Bien évidemment, cela n'a rien de physique. La figure 15 présente la déformée de la pièce lorsque seuls les mouvements de solide rigide sont bloqués. Cette dilatation se fait librement sans contrainte. Le champ des contraintes est nul en tout point.

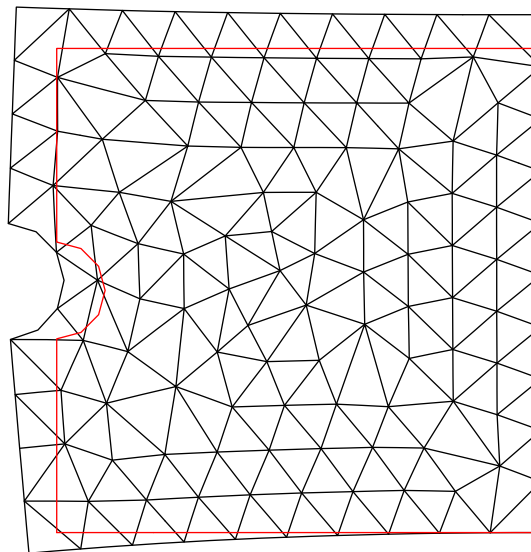


FIG. 15 – Déformée libre ($\times 311$)

On ajoute maintenant les conditions aux limites mécaniques qui sont simplement ici des conditions de symétrie du déplacement sur les deux faces latérales. Compte tenu de la forme obtenue en dilatation libre, il est logique que la dilatation crée des contraintes une fois les conditions de symétries imposées.

La figure 16 présente la déformée du morceau de plancher.

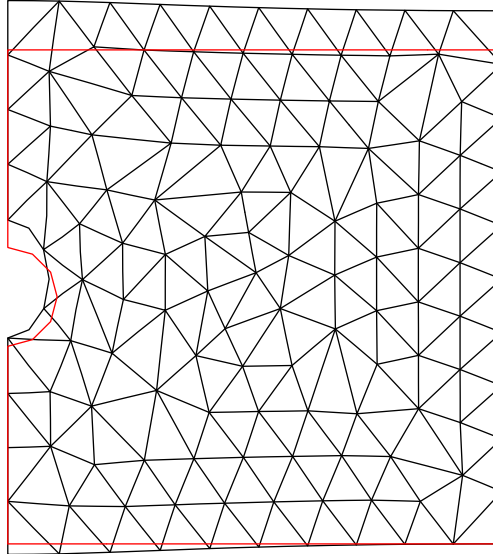


FIG. 16 – Déformée avec les conditions aux limites mécaniques ($\times 286$)

La figure 17 présente la contrainte équivalente de Von Mises obtenue par le calcul. Dans ce calcul, il n'y a pas de chargement mécanique. Les contraintes obtenues proviennent simplement des effets de dilatation thermique bloqués par les conditions aux limites.

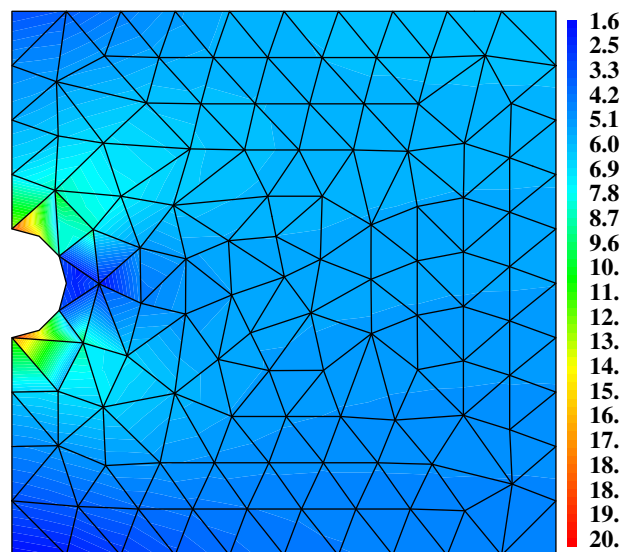


FIG. 17 – Contraintes équivalentes de Von Mises

Il est clair que le maillage utilisé n'est pas du tout adapté au problème mécanique. En effet, la présence du trou circulaire génère des concentrations de contrainte (voir l'exemple de la plaque trouée). Le maillage est donc adapté manuellement et des éléments plus petits sont ajoutés autour du trou. Ce nouveau maillage contient **1583** éléments et **3248** noeuds. Il y a donc **3248** degrés de liberté pour le problème thermique et **6496** pour le problème mécanique.

Le calcul thermique est donc à nouveau conduit sur ce maillage. La figure 18 présente le champ de température sur le maillage adapté pour le calcul mécanique.

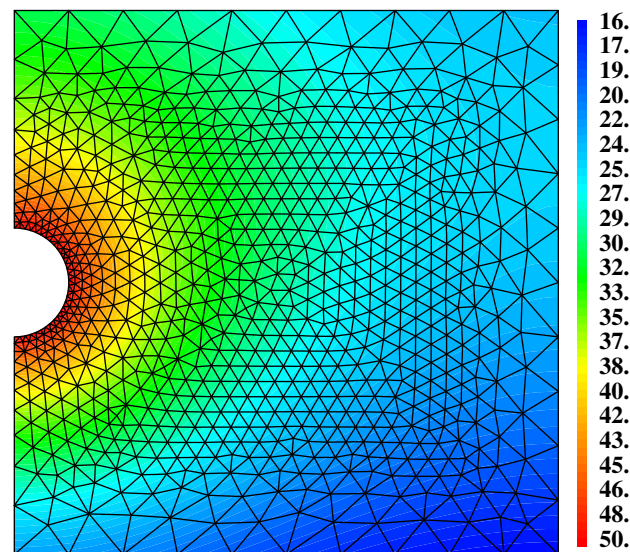


FIG. 18 – Champ de Température (maillage adapté)

La figure 19 présente la déformée obtenue avec ce nouveau maillage.

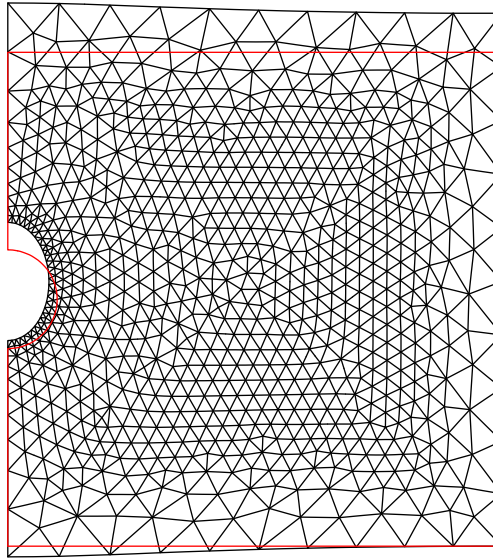


FIG. 19 – Déformée avec les conditions aux limites mécaniques (maillage adapté, $\times 286$)

La figure 20 présente les isovaleurs de la contrainte équivalente de Von Mises sur ce nouveau maillage. On voit clairement que la contrainte est beaucoup mieux représentée qu'avec le maillage précédent.

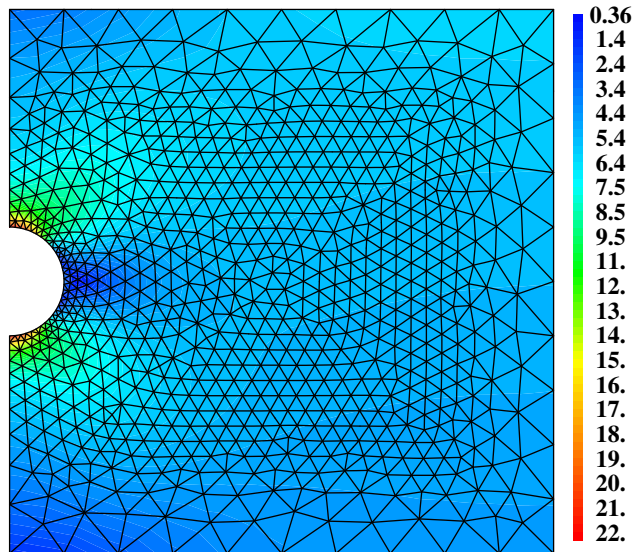


FIG. 20 – Contraintes équivalente de Von Mises (maillage adapté)

4 Conclusions

Nous avons présenté la mise en équation du problème de conduction thermique. Ce problème est tout à fait analogue à celui de l'élasticité linéaire. Seules les conditions aux limites (convection, rayonnement) sont particulières.

La méthode des éléments finis appliquée aux problèmes de conduction thermique ne pose pas de problème. Les éléments finis sont construits de la même manière que ceux utilisés en mécanique.

Il faut savoir que d'autres problèmes physiques se formulent de la même manière que le problème de conduction thermique. Citons par exemple :

- les écoulements irrotationnels de fluides parfaits,
- la distribution de potentiel électrique,
- la distribution de potentiel magnétique,
- les écoulements dans les milieux poreux,
- ...

La résolution de problèmes thermo-mécaniques couplés se fait elle-aussi sans problème. La seule difficulté est l'obligation d'utiliser le même maillage pour le calcul thermique et le calcul mécanique. En général, on utilise pour les deux calculs le maillage optimisé pour le calcul mécanique, qui est souvent plus compliqué.

Références

- [1] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : *The Finite Element Method Volume 1 : The Basics*, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.