

Etude d'une plaque trouée

L. CHAMPANEY et Ph. TROMPETTE

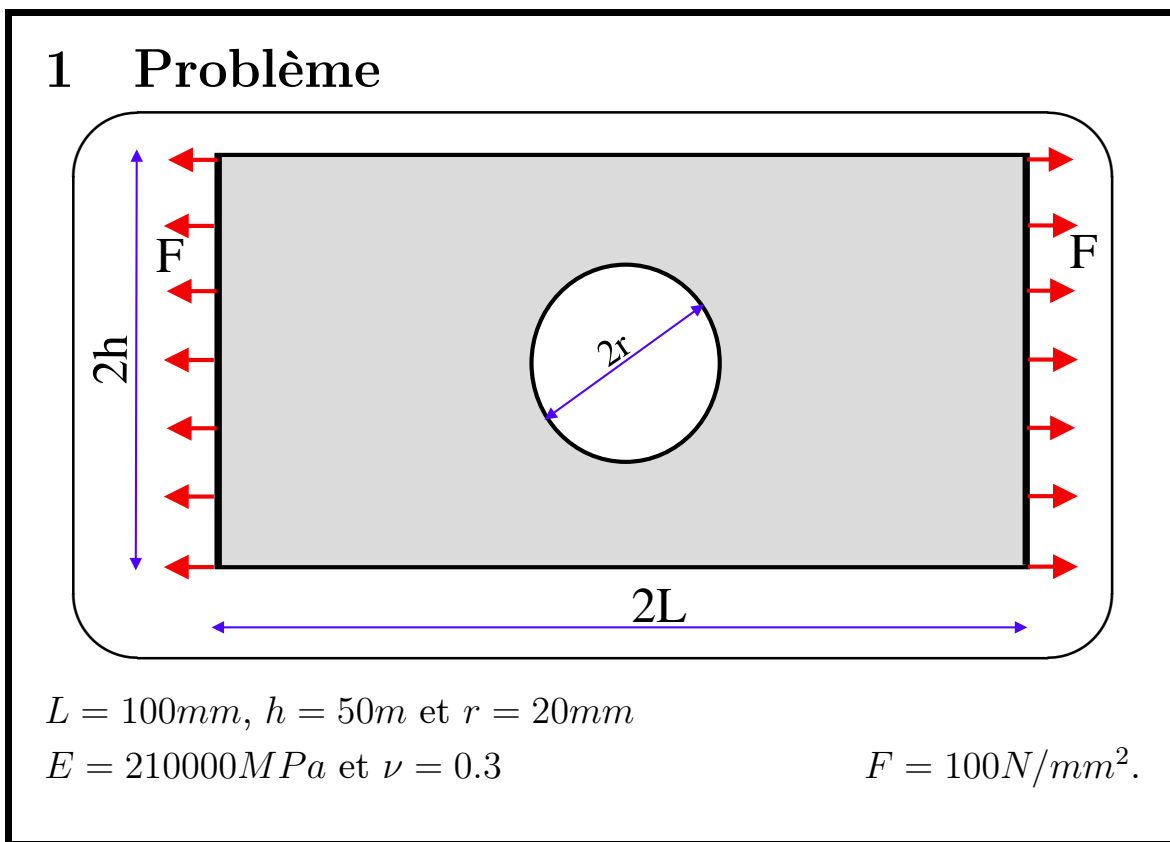
Objectifs :

- Concentrations de contraintes,
- Convergence de la solution,
- Représentation des contraintes,
- Influence du raffinement

Nous étudions le comportement de la méthode des éléments finis en présence de concentrations de contraintes. Pour cela, nous examinons le cas d'une plaque trouée en traction. Nous généralisons les résultats pratiques de convergence obtenus sur un exemple industriel.

Table des matières

1	Problème	2
2	Résultats bruts	4
3	Maillages uniformes	5
4	Déplacement	6
5	Contraintes	7
6	Maillages adaptés	12
7	Illustration	15
8	Conclusions	18



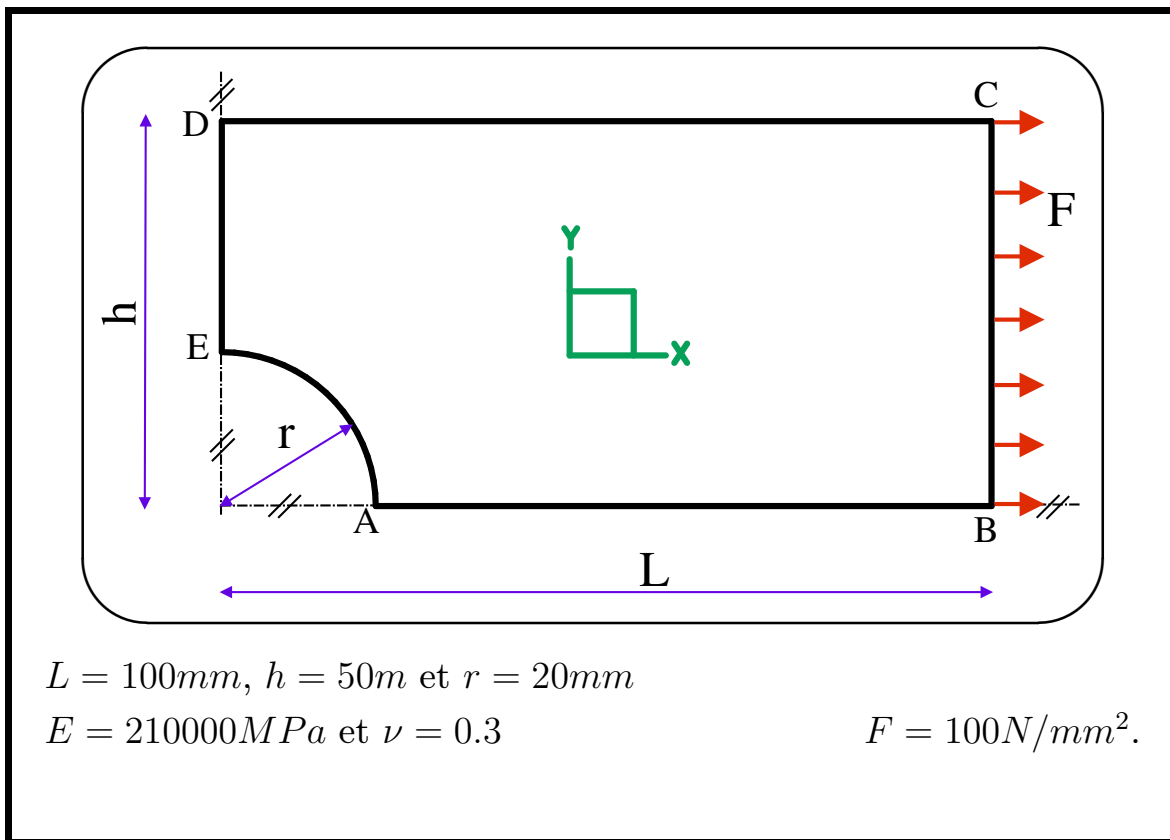
On s'intéresse à un problème classique de la mécanique des milieux continus : l'étude d'une plaque rectangulaire trouée soumise à une traction uniforme.

Sur cet exemple seront étudiés :

- la convergence de la solution en déplacement et en contrainte pour des maillages linéaires ou quadratiques (uniformes ou non),
- la représentation graphique des contraintes,
- la stratégie à adopter face à un problème de concentration de contrainte.

Les dimensions de cette plaque en acier sont indiquées sur la figure ci-dessus. Le champ de traction uniforme est obtenu par application d'une répartition de pression $F = 100\text{MPa}$ à chaque extrémité de la plaque.

On cherche à modéliser une plaque d'épaisseur fine. Le problème est donc traité en dimension deux sous l'hypothèse des contraintes planes.



Le problème présente deux plans de symétrie géométrique, matérielle et des conditions aux limites. Il est indispensable de prendre en compte les symétries du problème dans la modélisation.

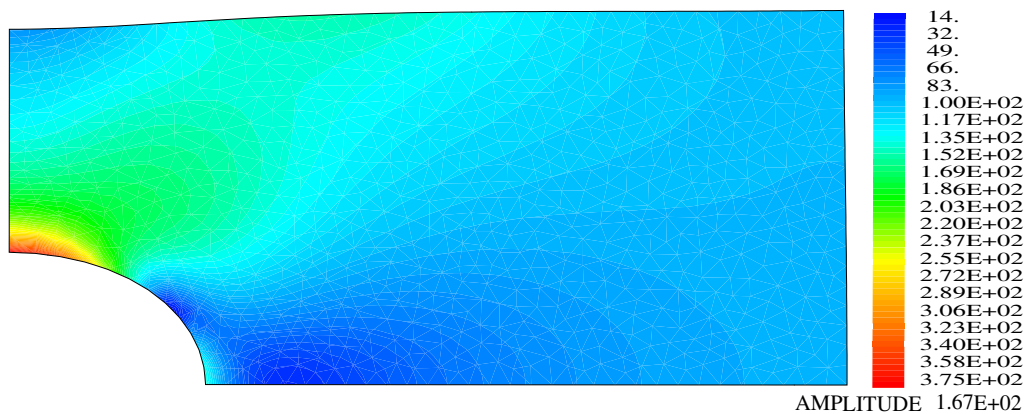
Cela permet de :

- réduire la taille du problème étudié,
- réduire les temps de modélisation, d'étude et de post-traitement.
- d'introduire un blocage des mouvements de solide rigide de cette plaque soumise uniquement à des efforts.

Les conditions de symétrie sont obtenues en imposant les conditions suivantes :

- déplacement U_x nul sur le bord DE ,
- déplacement U_y nul sur le bord AB .

2 Résultats bruts



*Contrainte équivalente de Von Mises (MPa)
sur la plaque déformée ($\times 167$)*

- Concentration des contraintes près du trou
- Lissage des contraintes

On présente d'abord les résultats bruts tels qu'ils seraient donnés par un code de calcul standard. La figure ci-dessus présente les isovaleurs de la contrainte équivalente de *Von Mises* tracées sur la structure déformée (le déplacement est amplifié 167 fois). Les constatations suivantes peuvent être faites :

- une concentration des contraintes est bien observée au bord du trou. Dans le cas d'un trou circulaire, le facteur d'intensité des contraintes est en première approximation de *trois* (pour les trous de petite taille). C'est-à-dire que :

$$\sigma_{max} = k\sigma_{nom} \quad \text{avec} \quad k = 3$$

ou la contrainte nominale σ_{nom} est :

$$\sigma_{nom} = F \frac{h}{h-r} = 166,7 MPa$$

Ce résultat peut être affiné par le développement limité suivant [?] :

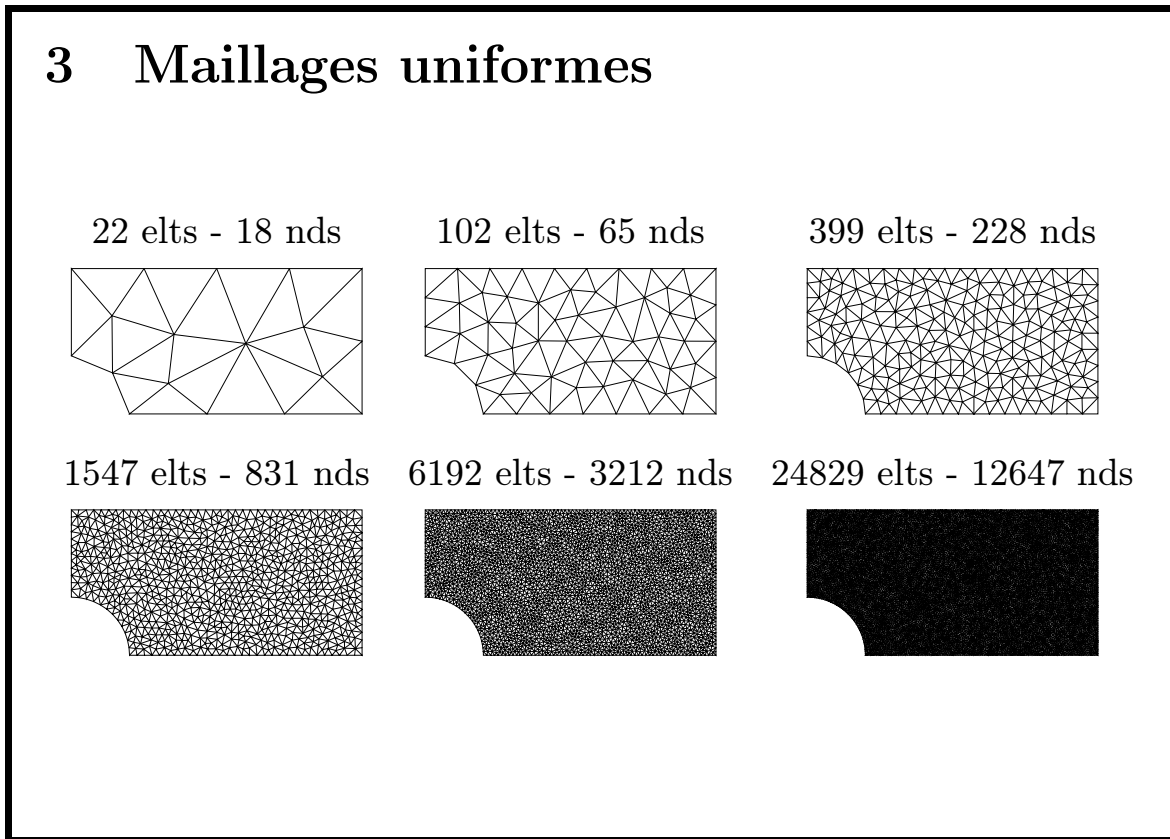
$$k = 3 - 3.13\left(\frac{d}{h}\right) + 3.66\left(\frac{d}{h}\right)^2 - 1.53\left(\frac{d}{h}\right)^3 = 2.2357$$

soit

$$\sigma_{max} = 372.7 MPa$$

- les contraintes tracées semblent continues dans le domaine. Elles ont manifestement été lissées lors du tracé.

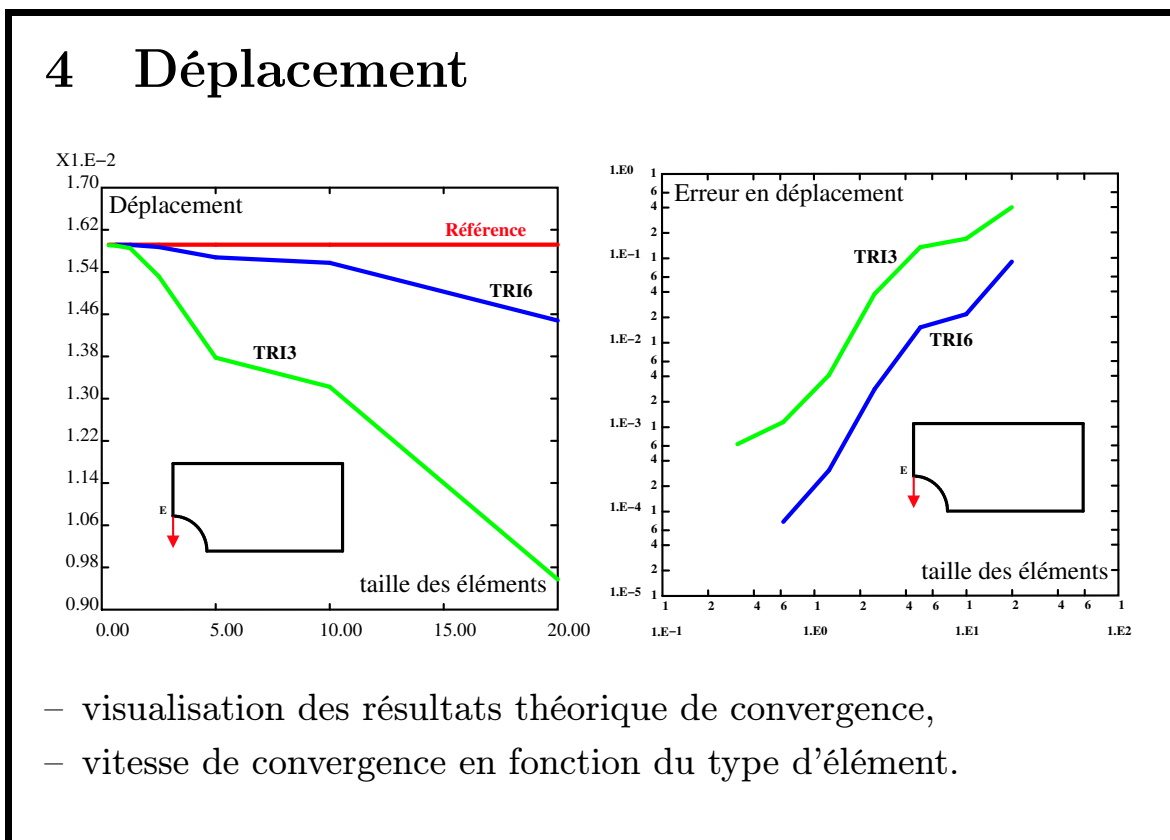
3 Maillages uniformes



Pour étudier l'influence du raffinement du maillage, nous utilisons les six maillages uniformes présentés sur la figure ci-dessus. Entre chaque maillage, la taille caractéristique des mailles été divisée par deux. Le nombre d'éléments est donc à peu près multiplié par quatre. Pour chacun de ces maillages, le calcul sera fait avec des éléments linéaires (triangles à trois noeuds) et avec des éléments quadratiques (triangles à six noeuds).

Le tableau ci dessous rassemble les caractéristiques des maillages linéaires (L_i) et quadratiques (Q_i) employés :

Nom	Nbre d'éléments	Nbre de noeuds	Nbre de ddl
L1	22	18	36
L2	102	65	130
L3	399	228	456
L4	1457	831	1662
L5	6192	3212	6424
L6	24829	12647	25294
Q1	22	57	114
Q2	102	231	462
Q3	399	854	1708
Q4	1457	3208	6416
Q5	6192	12615	25230
Q6	24829	50112	100224



Pour étudier l'influence de la discrétisation sur la solution en déplacement, on s'intéresse au déplacement d'un point de la plaque. Le problème étant linéaire, les conclusions tirées de l'étude du déplacement vertical du point E seront valables pour toutes les composantes de déplacement de tous les noeuds du maillage.

Pour illustrer la convergence de la méthode, on prend comme solution de référence la solution obtenue sur un maillages quadratique deux fois plus fin que le maillage Q6 (99363 éléments, 199656 noeuds soit 399312 ddl).

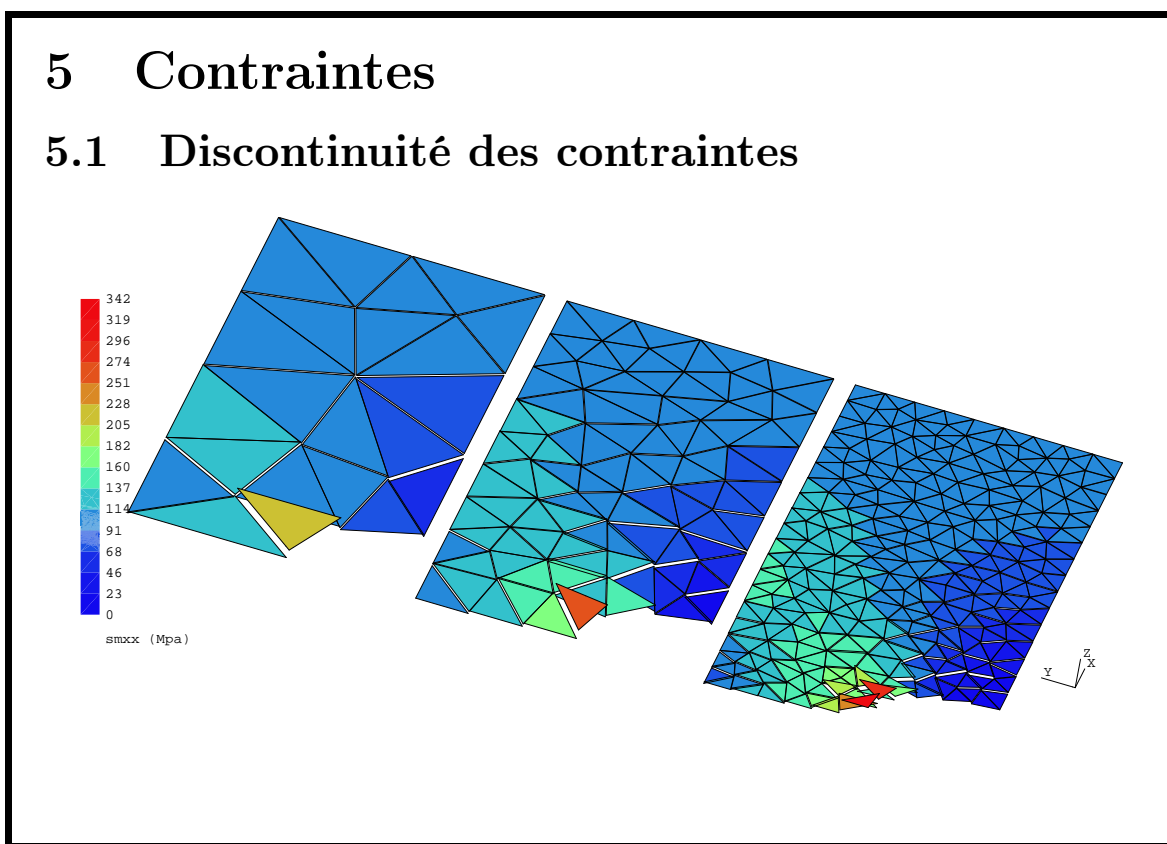
La figure de gauche montre l'évolution du déplacement vertical du point E en fonction de la taille caractéristique des maillages (de 20 à 0.625mm) pour les maillages linéaires (TRI3) et quadratiques (TRI6).

La figure de droite montre l'évolution de l'écart en déplacement vis-à-vis de la solution de référence.

On visualise bien ici les résultats théoriques sur la convergence de la méthode des éléments finis et sur la vitesse de convergence en fonction du type d'élément (linéaire ou quadratique) [?].

5 Contraintes

5.1 Discontinuité des contraintes



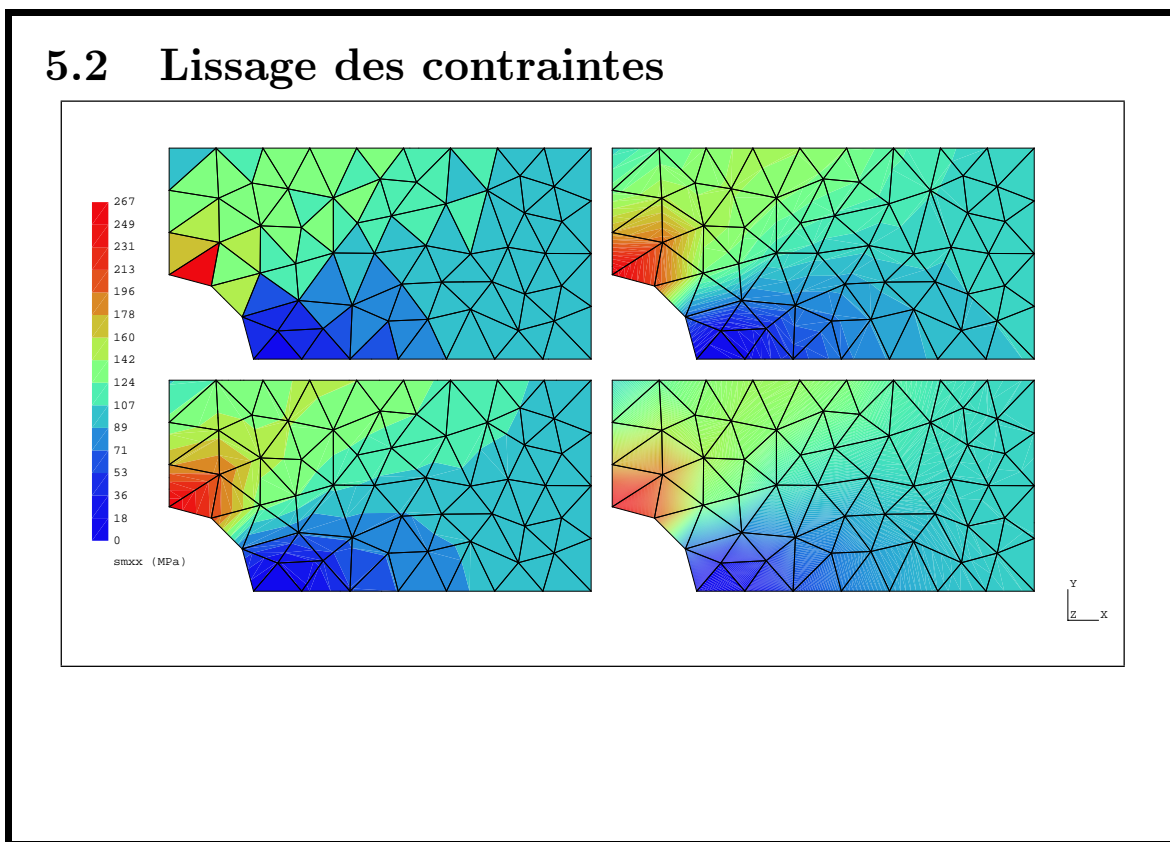
On s'intéresse maintenant à la répartition des contraintes dans la plaque. Pour simplifier, seule la composante σ_{xx} est tracée dans la suite.

La figure ci-dessus présente la répartition de la contrainte telle qu'elle est réellement calculée élément par élément en post-traitement de la résolution.

La contrainte est naturellement discontinue d'un élément à l'autre. Cette discontinuité est particulièrement visible sur les éléments linéaires pour lesquels la contrainte est constante par élément.

La figure présente la répartition de contrainte σ_{xx} pour les maillages $Q1$, $Q2$ et $Q3$. La discontinuité est visible grâce à l'échelle des couleurs mais aussi grâce à un décalage de position verticale des éléments proportionnel à la discontinuité.

Il est alors clair que parler de contraintes en un point (ou en un noeud) n'a pas de sens. Par ailleurs, le lieu du maximum des contraintes dépendra fortement du découpage du domaine.



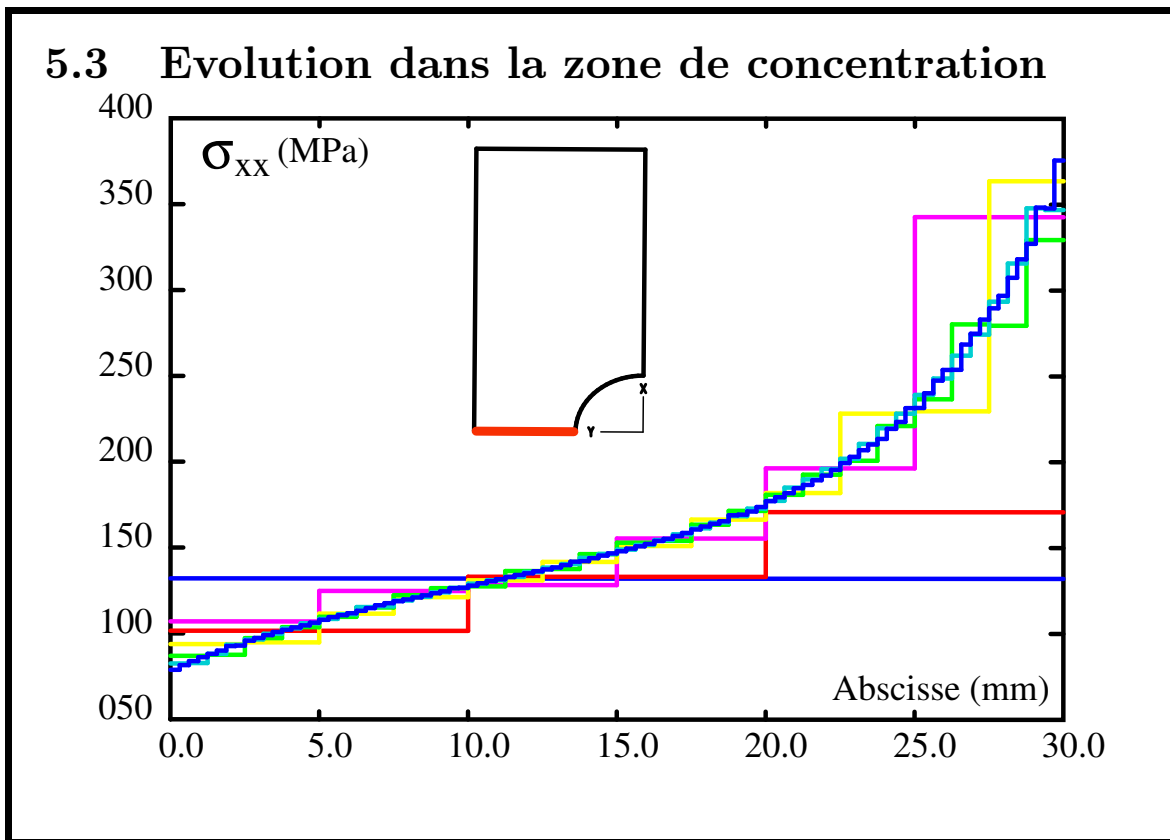
Dans les codes de calculs employés en bureau d'étude, il est très courant de lisser les contraintes lors du tracé.

La figure ci-dessus présente le même état de contrainte (maillage $Q2$) sans lissage et avec trois niveaux de lissages différents.

Pour obtenir les contraintes lissées, des valeurs de contraintes sont obtenues par moyenne sur les éléments entourant le noeud. Ces contraintes *nodales* sont alors interpolées sur les éléments de la même manière qu'est interpolé le déplacement. Le niveau de lissage dépend alors du nombre de plages considérées dans l'échelle des isovaleurs du tracé.

Il est important de noter que le lissage des contraintes n'est qu'un artifice du tracé. Il n'améliore en aucune manière la qualité de la solution en contrainte.

Il existe des techniques de reconstruction de champs de contraintes statiquement admissibles (champs réguliers qui vérifient parfaitement les conditions d'équilibre) [?]. Ces techniques sont à l'heure actuelle encore coûteuses et n'améliorent pas forcément la qualité du champ de contraintes calculé.

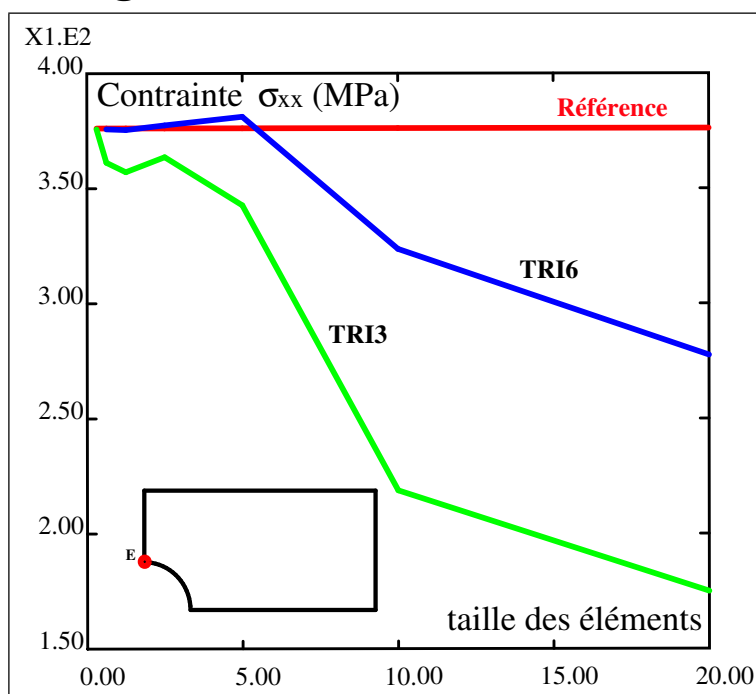


La figure ci-dessus présente la répartition de contraintes σ_{xx} le long du bord DE pour les maillages linéaires (L1 à L6).

On obtient rapidement (dès le maillage Q3) une répartition proche de la répartition de référence.

La discontinuité de la contrainte est, c'est bien normal, plus forte dans la zone où la contrainte évolue rapidement (on parle de zone à fort gradient). Cette discontinuité diminue avec la taille des mailles.

5.4 Convergence

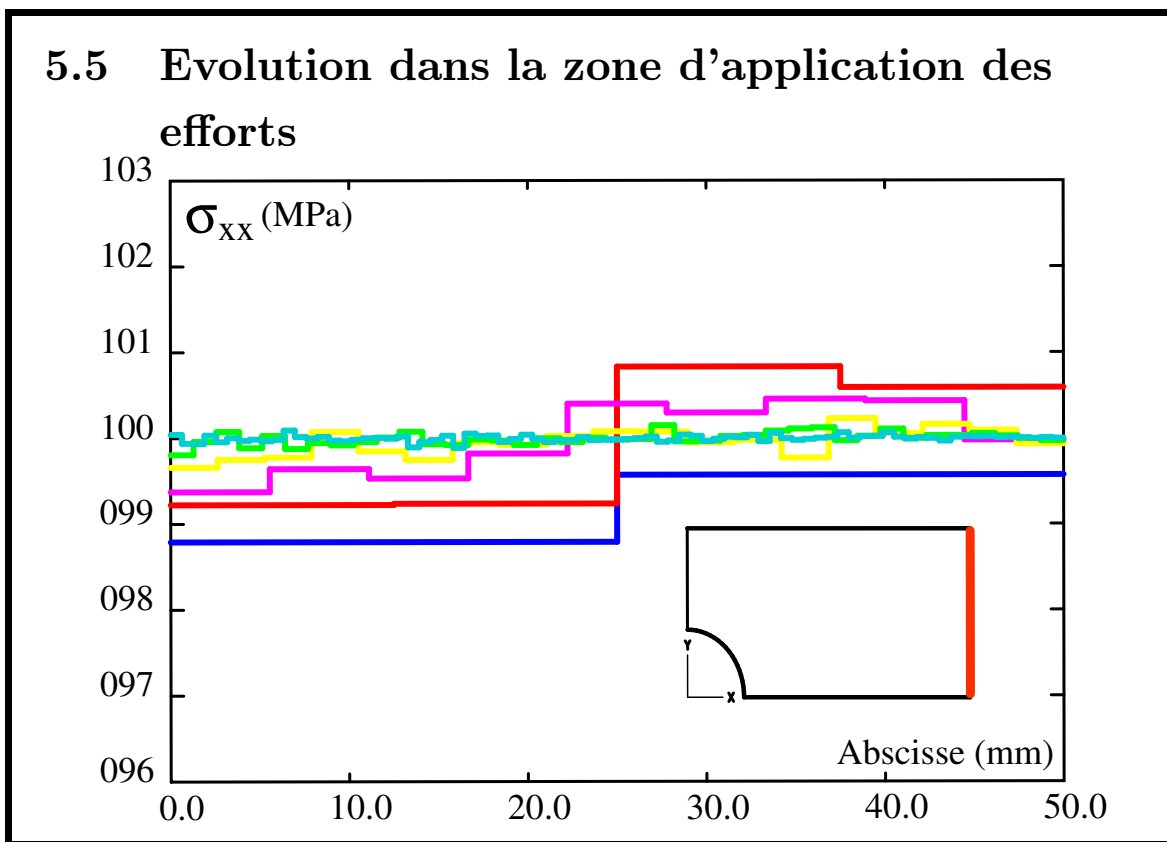


On trace maintenant l'évolution de l'écart du maximum de la contrainte σ_{xx} vis-à-vis de la solution de référence pour les différents maillages.

La convergence en contrainte est moins marquée que la convergence en déplacement. Le maximum de la contrainte est beaucoup plus soumis aux aléas de la taille et de la forme des mailles dans la zone de concentration.

Il est néanmoins possible d'atteindre rapidement moins de quelques pour cent d'écart avec la solution de référence.

Nom	Nbre d'éléments	Linéaire σ_{xx} (MPa)	Ecart (%)	Quadratique σ_{xx} (MPa)	Ecart (%)
L-Q1	22	175.0	53.5	277.5	26.2
L-Q2	102	218.7	41.8	323.7	13.9
L-Q3	399	342.7	8.9	381.2	1.3
L-Q4	1457	363.6	3.3	377.5	0.4
L-Q5	6192	357.1	5.0	375.5	0.2
L-Q6	24829	361.3	3.9	375.8	0.1



La figure ci-dessus présente le tracé de la répartition de contraintes σ_{xx} le long du bord BC pour les maillages linéaires (L1 à L6). Dans cette zone, la solution théorique donne des contraintes en équilibre avec les efforts externes, soit :

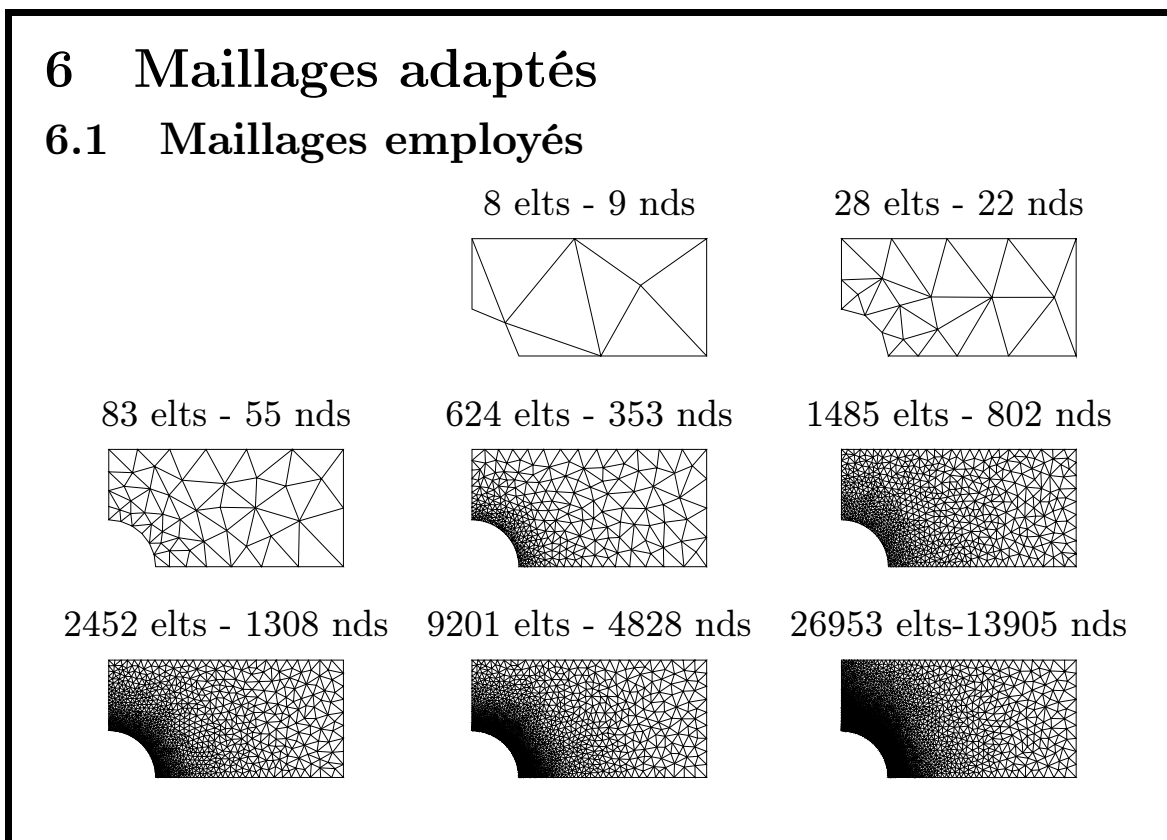
$$\sigma \vec{n} = F \vec{n} \Rightarrow \sigma_{xx} = F \quad \text{avec} \quad F = 100 \text{ Mpa}$$

On obtient rapidement une répartition très proche de la répartition théorique (moins de un pour cent d'écart).

Il est bien évident qu'il n'est pas nécessaire d'imposer un tel raffinement du maillage dans une zone où les contraintes sont quasiment constantes.

6 Maillages adaptés

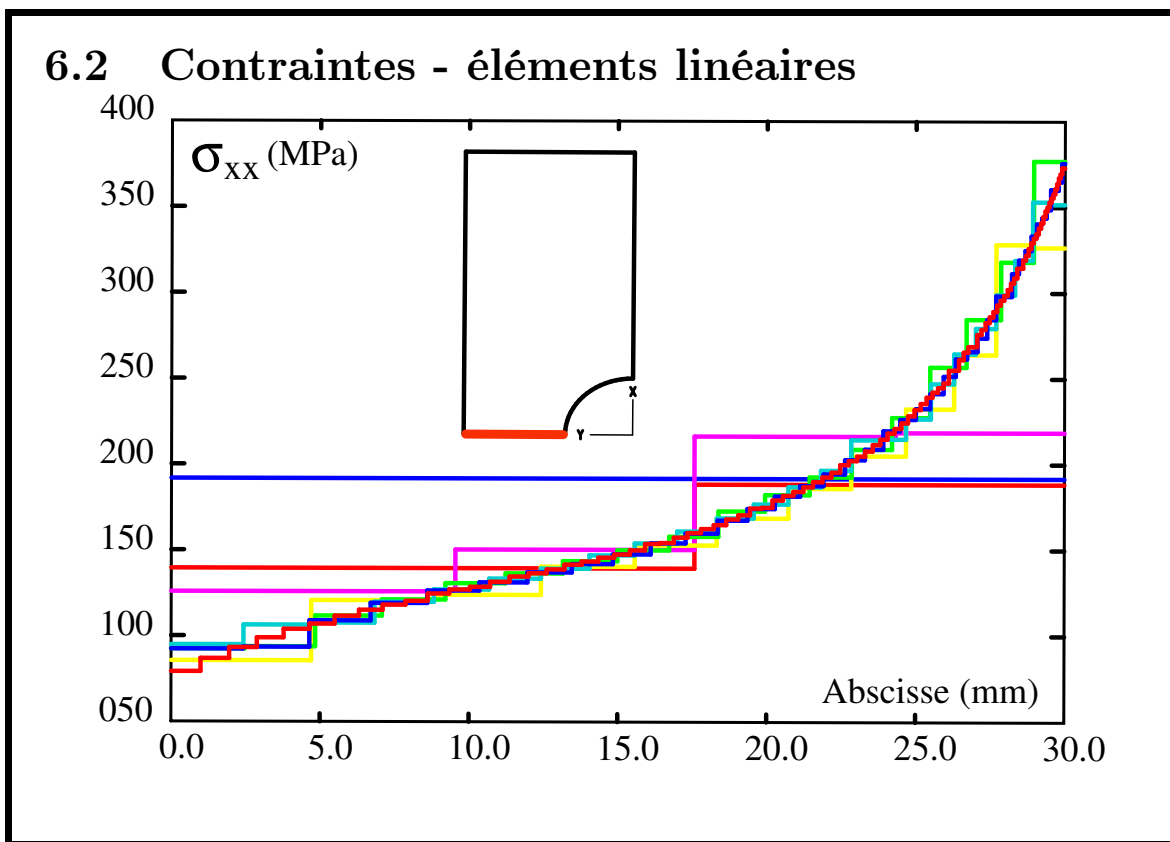
6.1 Maillages employés



Nous utilisons maintenant des maillages adaptés à la situation. La zone de concentration des contraintes est bien identifiée sur ce problème simple de plaque trouée. Les maillages présentés sur la figure ci-dessus ont donc été adaptés manuellement par des raffinements locaux successifs au bord du trou. Entre chaque maillage, la taille caractéristique des mailles au bord du trou a été divisée par deux. Pour chacun de ces maillages, le calcul sera fait avec des éléments linéaires (triangles à trois noeuds) et avec des éléments quadratiques (triangles à six noeuds).

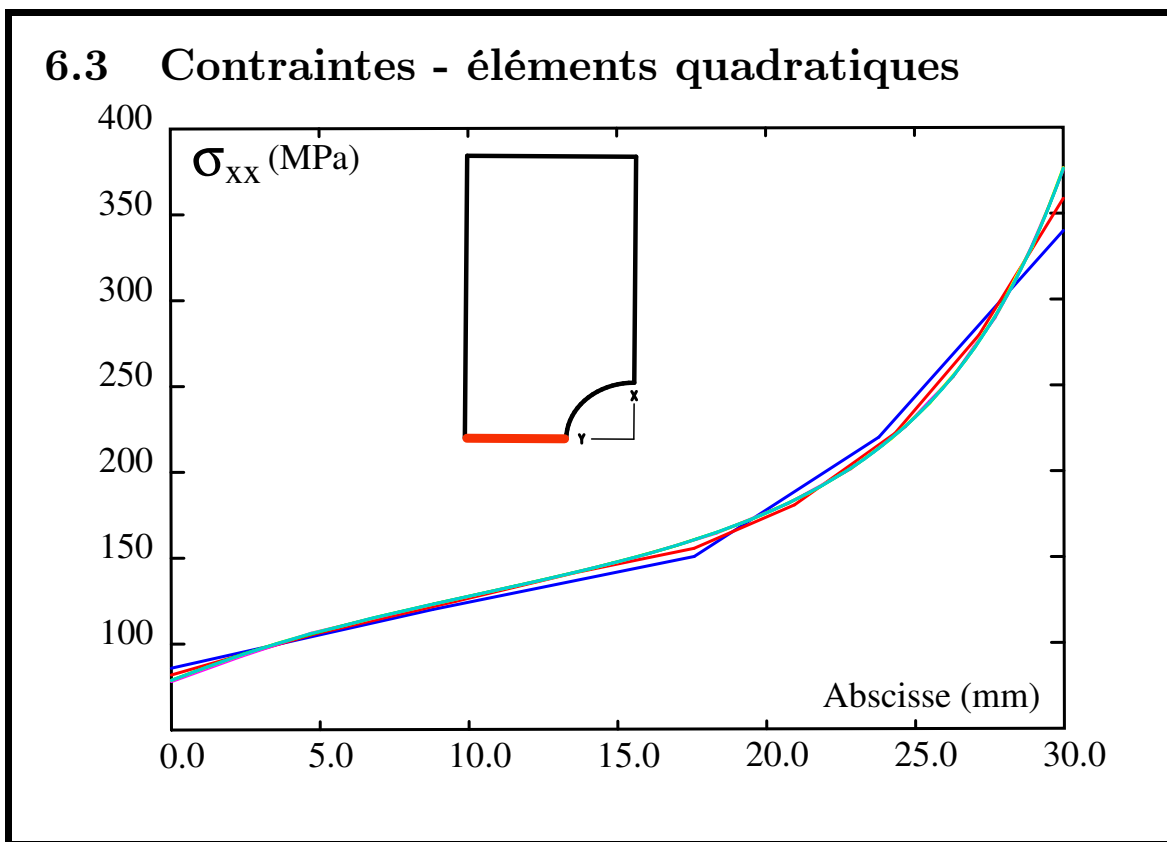
le tableau ci-dessous rassemble les caractéristiques des maillages adaptés linéaires (LA_i) et quadratiques (QA_i) employés :

Nom	Nbre d'éléments	Nbre de noeuds	Nbre de ddl
LA1	8	9	18
LA2	28	22	44
LA3	83	55	110
LA4	624	353	706
LA5	1485	802	1604
LA6	2452	1308	2616
LA7	9201	4828	9656
LA8	26953	13905	27810
QA2	28	71	142
QA3	83	192	384
QA4	624	1329	2658
QA5	1485	3088	6176



La figure ci-dessus présente le tracé de la répartition de contrainte σ_{xx} le long du bord DE pour les maillages linéaires ($LA1$ à $LA6$).

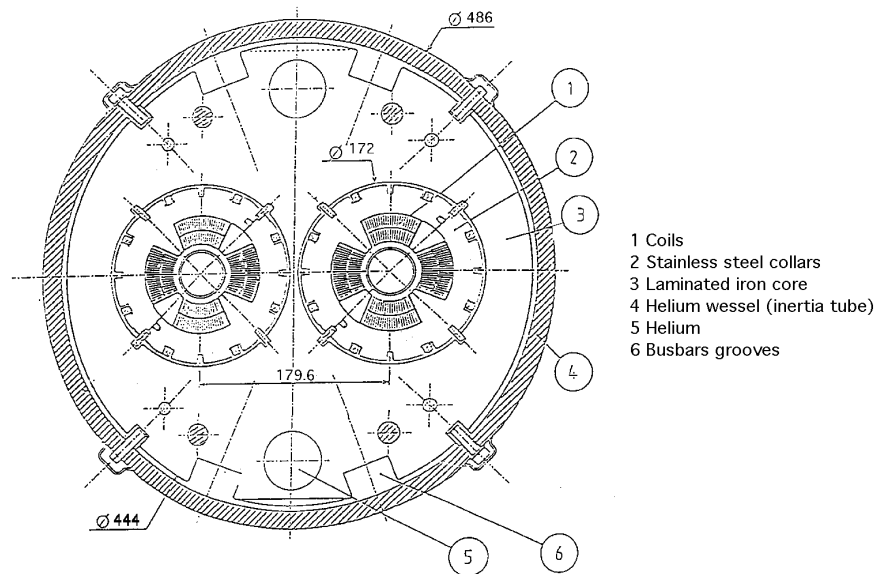
On obtient là aussi très rapidement la solution. La convergence semble être obtenue dès le maillage $LA4$. Les adaptations suivantes du maillage sont inutiles.



La figure ci-dessus présente le tracé de la répartition de contrainte σ_{xx} le long du bord DE pour les maillages quadratiques (Q4 à Q8).

On constate le très fort avantage des éléments quadratiques pour ce type de problème. La solution, même si elle comporte un gradient de contrainte important, est tout de suite captée par les éléments.

7 Illustration



Section de quadripôle LHC

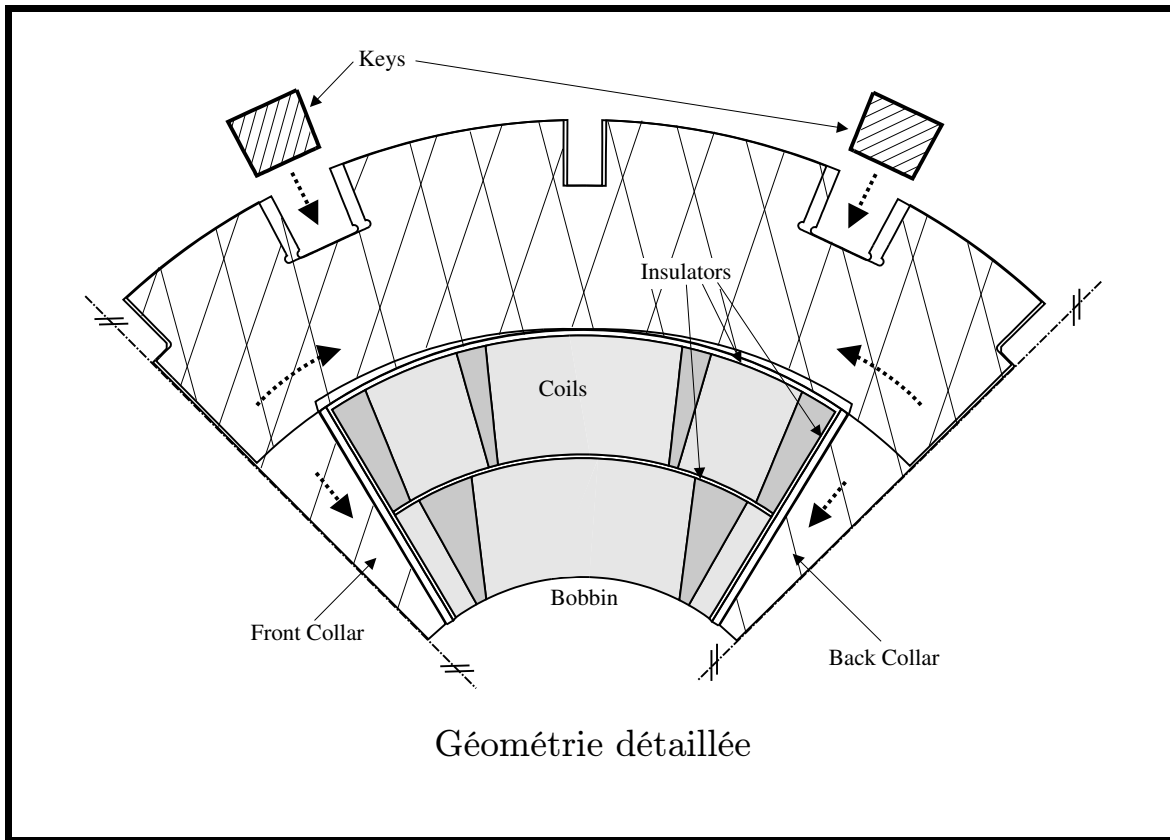
(source CEA/DAPNIA/STCM - C. Gourdin/L. Champaney)

Nous montrons, sur un problème industriel, comment a été faite l'adaptation du maillage et quelles ont été les causes de l'adaptation.

Il s'agit de l'étude d'une section de quadripôle du LHC (Large Hardon Collider), futur accélérateur de Genève. On cherche à étudier ici les précontraintes à appliquer sur les bobines pour éviter l'apparition de jeux une fois la bobine refroidie (pour atteindre un état supra-conducteur) et soumise à des efforts magnétiques.

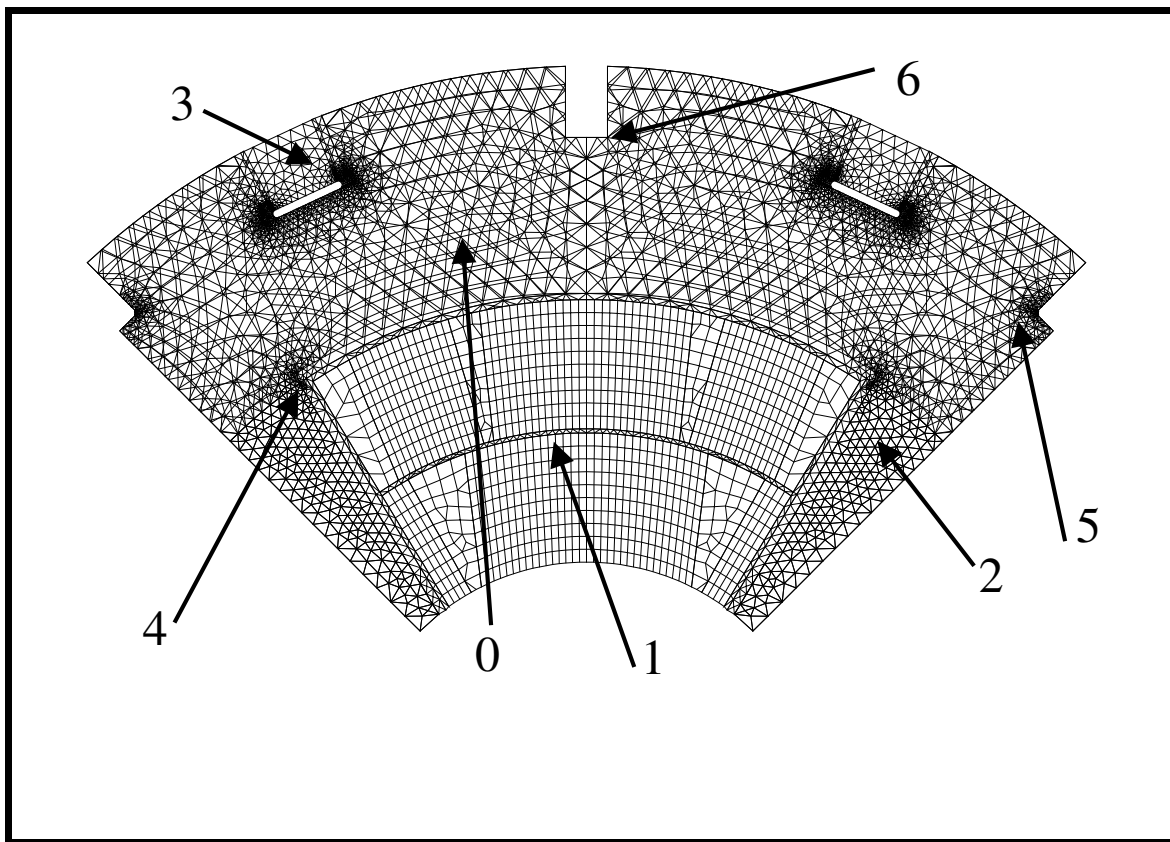
Si des jeux apparaissent, il y a risque de vibrations, donc de frottement et donc d'élévation de la température. Une élévation de température peut conduire le matériau à quitter son état supra-conducteur et donc à devenir résistif, ce qui est catastrophique compte tenu de l'intensité importante qui circule dans les conducteurs.

Nous ne présentons pas ici les résultats de l'étude mais juste le maillage utilisé.



La structure étudiée est un assemblage de tôles enserrant une bobine formée de divers constituants. Un quart de la section est modélisé ici. L'assemblage est précontraint par l'insertion de clavettes.

Les tôles et les pôles sont en acier. Les bobines (parties grisées au centre du schéma) sont un assemblage de différents matériaux : éléments supra-conducteurs, cuivre, isolants.



La figure ci-dessus présente la maillage (il y a, en fait, deux maillages superposés qui correspondent à deux tôles). Les numéros indiquent différentes zones pour lesquelles nous donnons des indications quant au raffinement du maillage.

Zone 0 Dans cette zone au milieu des tôles, l'état de contrainte est relativement homogène, le maillage est laissé grossier.

Zone 1 Cette zone représente les bobines qui sont un assemblage de différents matériaux. A cause de cette disparité de matériau, les gradients de contraintes peuvent être importants : il y a plusieurs interfaces où vont se concentrer les contraintes. Le maillage devrait être adapté dans cette région. Malheureusement, ce maillage sert de support aux forces d'origine magnétique qui ont été calculées par un précédent calcul. Pour des problèmes de projection de champ, ce maillage ne peut être adapté sans que le calcul magnétique soit modifié.

Zone 2 Dans la zone des pôles de bobine, on constate un état de compression quasi uniforme : le maillage est laissé grossier.

Zones 3, 4 et 5 Il s'agit de zones de concentration de contraintes faisant apparaître de faibles rayons de raccordement. Le problème local est le même que celui de la plaque trouée. Le maillage est raffiné en conséquence.

Zone 6 Il s'agit d'une zone sans intérêt où la réalité géométrique n'a même pas été modélisée. Le maillage est donc laissé très grossier.

8 Conclusions

- Concentrations de contraintes,
- Convergence de la solution EF avec la taille de maille,
 - rapide dans les zones à faibles gradients,
 - lente dans les zones à forts gradients,
- Discontinuité des contraintes,
- Lissage des contraintes,
- Raffinement local,
- Grande efficacité des éléments quadratiques.

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement de la méthode des éléments finis en présence de concentrations de contraintes. Comme cela a été montré dans les premiers chapitres de ce cours, la solution EF en contrainte est discontinue. Il faut donc de se méfier des résultats couramment donnés par les codes EF sous forme de champs lissés.

Nous avons constaté une convergence très rapide de la solution EF dans les zones à faibles gradients de contrainte. Par contre, dans les zones à gradients plus forts, un raffinement du maillage s'impose. Ce raffinement peut être très localisé autour de la zone de concentration.

Nous avons observé une grande efficacité des éléments quadratiques en déplacement pour ce type de problème.

Références

- [1] Batoz J.L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Volume I - Solides Elastiques*, Hermès, 1990.
- [2] Trompette Ph., *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis finis*, Masson, 1992.
- [3] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : *The Finite Element Method Volume 1 : The Basics*, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.