

Méthode des Eléments Finis :

Effets spécifiques

L. CHAMPANEY

Dans cette partie, nous présentons quelques points spécifiques à la méthode des éléments finis. Nous rappelons d'abord la méthode d'intégration numérique utilisée. Nous présentons aussi sur des exemples les techniques qui permettent d'imposer des conditions aux limites sur les degrés de liberté.

Ensuite les problèmes de verrouillage des éléments finis ainsi que les techniques d'amélioration sont brièvement évoqués.

Table des matières

1	Intégration numérique	2
1.1	Forme générale	2
1.2	En dimension un	2
1.3	En dimension deux	3
2	Prise en compte des conditions sur les inconnues	5
2.1	Forme générale des conditions	5
2.2	Méthode d'élimination	6
2.3	Méthode de pénalisation	6
2.4	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	7
2.5	Conclusions	8
3	Problèmes spécifiques aux éléments finis	9
3.1	Verrouillage	9
3.2	Influence de la forme	11
3.3	Influence du positionnement de noeuds	13
4	Techniques d'amélioration	14
4.1	Intégration réduite	14
4.2	Addition de modes incompatibles	15
4.3	Addition de degrés de liberté de rotation	16
5	Conclusions	17

1 Intégration numérique

1.1 Forme générale

Les termes à intégrer sur les éléments sont des polynômes et sont le plus souvent intégrés numériquement. La méthode générale d'intégration numérique est la suivante :

$$\int_{\Omega_{ref}} h(M) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_p} w_i h(M_i)$$

où les M_i sont des points particuliers (*points d'intégration*) et les w_i sont des coefficients de pondération appelés *poids d'intégration*.

La méthode la plus utilisée dans le cadre de la méthode des éléments finis est celle de Gauss, pour laquelle les positions et les poids sont déterminés de manière à intégrer exactement un polynôme de degré le plus élevé possible. Dans ce cas, les points d'intégration sont communément appelés *points de Gauss*.

1.2 En dimension un

En dimension un, l'élément de référence est un segment de longueur **2** centré sur l'origine. La forme générale d'intégration est donc :

$$\int_{-1}^1 h(r) dr = \sum_{i=1}^{n_p} w_i h(r_i)$$

Les positions r_i et les poids w_i sont choisis de manière à intégrer exactement un polynôme de degré n . C'est à dire qu'ils sont solution du système suivant qui résulte de l'intégration des $n + 1$ monômes de degrés **0** à n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 r^0 dr = \sum_{i=1}^{n_p} w_i r_i^0 \\ \int_{-1}^1 r dr = \sum_{i=1}^{n_p} w_i r_i \\ \int_{-1}^1 r^2 dr = \sum_{i=1}^{n_p} w_i r_i^2 \\ \dots \\ \int_{-1}^1 r^n dr = \sum_{i=1}^{n_p} w_i r_i^n \end{array} \right.$$

La méthode de Newton Cotes consiste à fixer a priori les positions des points. Le système précédent comporte donc n_p inconnues (les w_i) et est linéaire. Il a une solution s'il comporte n_p équations, soit $n_p = n + 1$. La méthode de Newton Cotes permet donc, avec n_p point, d'intégrer exactement un polynôme de degré $n_p - 1$.

La méthode la plus utilisée en Éléments Finis est la méthode de Gauss qui ne fixe pas a priori la position des points. Le système à résoudre comporte donc $2n_p$ inconnues (les w_i et les r_i) et est non linéaire (par rapport aux r_i). Il a une solution s'il comporte $2n_p$ équations, soit $2n_p = n + 1$. La méthode de Gauss permet donc, avec n_p points, d'intégrer exactement un polynôme de degré $2n_p - 1$.

On utilise, en général des tables (comme celle présentée dans le tableau 1 ci-après) qui donnent directement les positions et les poids pour l'élément de référence 1D, pour un nombre de points ou un ordre d'intégration donné.

n_p	r_i	w_i	n
1	0	2	1
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	3
3	0 $\pm \sqrt{3/5}$	8/9 5/9	5
4	± 0.3399810435 ± 0.8611363115	0.6521451548 0.3478548451	7

TAB. 1 – Intégration de Gauss sur un segment

1.3 En dimension deux

Éléments triangulaires En dimension deux, l'élément triangulaire de référence est un triangle isocèle de côtés égaux de longueur 1. L'angle droit est à l'origine du repère. La forme générale d'intégration est donc :

$$\int_{\Omega_{ref}} h(r, s) dr ds = \sum_{i=1}^{n_p} w_i h(r_i, s_i)$$

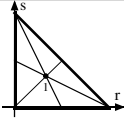
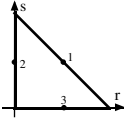
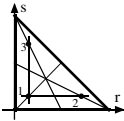
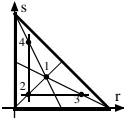
Les positions r_i et les poids w_i sont choisis de manière à intégrer exactement un polynôme d'ordre n , c'est à dire incluant les monômes $r^i s^j$ avec $i + j \leq n$. La méthode de recherche des points et des poids d'intégration est la même qu'en dimension un. La table 2 présente des exemples de jeux de poids et de points sur l'élément de référence triangle.

Éléments carrés Pour l'élément de référence carré (de largeur deux, centré sur l'origine) on peut formuler le problème comme précédemment, soit utiliser une intégration *produit* qui consiste à intégrer dans chaque direction comme en 1D. Les poids sont alors les produits des poids 1D.

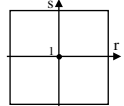
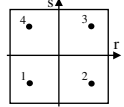
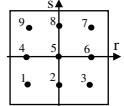
$$\int_{\Omega_{ref}} h(r, s) dr ds = \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} w_i w_j h(r_i, s_j)$$

Cette dernière méthode est la plus employée et est décrite dans le tableau 3. L'intégration est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n dans chaque direction.

La méthode d'intégration de Gauss s'étend naturellement aux éléments 3D.

	n_p	r_i	s_i	w_i	n
	1	1/3	1/3	1/2	1
	3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6	2
	3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6	2
	4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	-27/96 25/96 25/96 25/96	3

TAB. 2 – Intégration de Gauss sur un triangle

	n_p	r_i	s_i	w_i	n
	1	0	0	4	1
	2×2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
	3×3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ 0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	0 0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{64}{81}$ $\frac{40}{81}$ $\frac{40}{81}$ $\frac{25}{81}$	5

TAB. 3 – Intégration de Gauss sur un quadrangle (méthode produit)

2 Prise en compte des conditions sur les inconnues

2.1 Forme générale des conditions

La méthode des éléments finis s'appuie sur la minimisation d'une énergie potentielle

$$E_p(\{q\}) = \frac{1}{2}\{q\}^t[K]\{q\} - \{q\}^t\{F\}$$

où $\{q\}$ est le vecteur des inconnues nodales, $[K]$ la matrice de raideur et $\{F\}$ le vecteur des forces généralisées.

Le système est par ailleurs soumis à des conditions sur les inconnues (déplacements imposés, température imposée, ...). Nous donnons à ces conditions la forme générale suivante :

$$[D]\{q\} = \{\beta\} \quad (1)$$

où $[D]$ contient la réduction aux zones de liaison considérées et $\{\beta\}$ les valeurs à imposer.

Par exemple, dans le cas de la figure 1 (barre de longueur L , de module d'Young E et de section S modélisée par deux éléments *barre*), les deux conditions cinématiques :

$$u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_3 = u_d$$

s'écrivent sous la forme :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[D]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\{q\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_d \end{Bmatrix}}_{\{\beta\}}$$

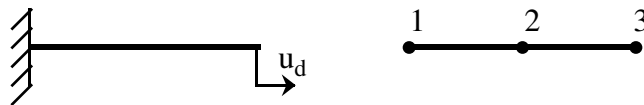


FIG. 1 – Exemple de conditions sur les inconnues

Le problème à résoudre est donc de trouver le vecteur des inconnues nodales $\{q\}$ tel que :

$$\{q\} \text{ minimise } E_p(\{q\}) = \frac{1}{2}\{q\}^t[K]\{q\} - \{q\}^t\{F\}$$

et vérifie $[D]\{q\} = \{\beta\}$

2.2 Méthode d'élimination

2.2.1 Approche

Il s'agit d'éliminer directement les degrés de liberté qui sont connus car soumis à des conditions.

2.2.2 Exemple

Dans le cas du problème de la figure 1, on a :

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad k = \frac{ES}{L} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dans le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la première ligne est supprimée, car u_1 est connu, la première colonne est supprimée car u_1 est nul, la troisième ligne est supprimée car u_3 est connu et la troisième colonne passe au second membre car $u_3 = u_d$. Le système devient :

$$2ku_2 = 0 + ku_d$$

soit

$$u_2 = \frac{u_d}{2}$$

La solution est donc rapidement obtenue par modification de la matrice. Par contre, les réactions aux appuis doivent être calculées en post-traitement.

2.3 Méthode de pénalisation

2.3.1 Approche

Dans cette approche énergétique, on minimise la quantité :

$$E_p(q_i) + \frac{1}{2}g [[D]\{q\} - \{\beta\}]^t [[D]\{q\} - \{\beta\}]$$

où $E_p(q_i)$ est l'énergie potentielle standard de la structure. Ainsi, plus le paramètre scalaire g est grand, plus la condition $[D]\{q\} = \{\beta\}$ est assurée.

Cette approche est simple car elle ne consiste qu'à l'ajout de termes élevés dans le système linéaire :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow [[K] + g[D]^t[D]] \{q\} = \{F\} + g[D]^t\{\beta\} \quad (2)$$

Ce n'est pas une méthode exacte car la valeur de g est limitée par des problèmes numériques de conditionnement de la matrice du système linéaire.

2.3.2 Exemple

Dans le cas du problème de la figure 1, on a :

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad k = \frac{ES}{L} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[D]^t[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [D]^t\{\beta\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_d \end{Bmatrix}$$

L'équation 2 est alors :

$$\begin{bmatrix} k+g & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k+g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ gu_d \end{Bmatrix}$$

Cette méthode est aussi appelée méthode du *gros poids*, car elle consiste à ajouter des termes prépondérants dans la matrice.

On obtient la solution :

$$u_1 = \frac{k}{2(k+g)}u_d \simeq 0 \quad u_2 = \frac{u_d}{2} \quad u_3 = \frac{k+2g}{2(k+g)}u_d \simeq u_d$$

qui est bien proche de la solution voulue lorsque g est grand. Là encore, les réactions aux appuis doivent être calculées en post-traitement.

2.4 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

2.4.1 Approche

Cette approche est dite *duale* car elle consiste à chercher les efforts de liaison qui permettent assurer les conditions extérieures sur les inconnues. Pour cette méthode, on cherche les extrema de :

$$E_p(q_i) + \{\lambda\}^t [[D]\{q\} - \{\beta\}]$$

Ces extrema correspondent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow [K]\{q\} - \{F\} + \{\lambda\}^t[D] = 0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial \lambda_i} = 0 \Rightarrow [D]\{q\} - \{\beta\} = 0 \end{cases}$$

donc la condition sur les inconnues est imposée strictement.

Le système linéaire à résoudre devient alors :

$$\begin{bmatrix} [K] & [D]^t \\ [D] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{\beta\} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

On peut montrer que les λ_i sont les actions dans les liaisons servant à imposer les conditions sur les inconnues.

2.4.2 Exemple

Dans le cas du problème de la figure 1 où :

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad k = \frac{ES}{L} \quad \{F\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation 3 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 1 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_d \end{pmatrix}$$

et la solution est :

$$u_1 = 0 \quad u_2 = \frac{u_d}{2} \quad u_3 = u_d$$

qui est bien la solution exacte du problème. Par ailleurs, on obtient les réactions à l'encastrement et au point de déplacement imposé :

$$\lambda_1 = \frac{k}{2}u_d \quad \lambda_2 = -\frac{k}{2}u_d$$

2.5 Conclusions

Nous avons présenté les trois méthodes utilisées pour imposer des conditions aux limites sur les inconnues dans la résolution du problème éléments finis.

La méthode de pénalisation est très peu employée dans les calculs statiques standards car les conditions ne sont pas imposées strictement. Par contre, elle est souvent employée dans des cas de conditions aux limites évolutives (contact unilatéral en dynamique rapide, par exemple) à cause de sa simplicité de mise en oeuvre et du peu de modification de la matrice qu'elle entraîne.

3 Problèmes spécifiques aux éléments finis

Les chapitres précédents ont présenté les approximations nodales polynomiales utilisées en élément finis. Des exemples ont montré les limitations de ces approximations pour des situations simples. Nous examinons cette spécificité un peu plus en détail et de façon plus systématique.

3.1 Verrouillage

On appelle *verrouillage* d'un élément une insuffisance de l'approximation polynomiale qui empêche l'élément de représenter correctement certains modes de déformation. L'élément se *verrouille* ou se bloque lorsque ces modes sont sollicités et les contraintes peuvent devenir très fausses. Diverses raisons étudiées ci-dessous peuvent conduire au verrouillage d'un élément.

Verrouillage du quadrangle par le cisaillement Nous nous plaçons dans une situation simple d'élément massif bidimensionnel en contraintes planes, où élément réel et élément de référence sont confondus.

Supposons que le champ vrai à représenter soit défini par :

$$u = xy \quad v = -\frac{1}{2}x^2$$

Ce champ n'est pas imaginaire, il correspond à celui d'une flexion pure. Les champs de déformation et de contrainte associés sont :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \sigma_{xx} = \frac{Ey}{(1-\nu^2)} \quad \sigma_{yy} = \frac{\nu Ey}{(1-\nu^2)} \quad \sigma_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Si nous considérons un élément quadrangulaire à quatre noeuds, la représentation éléments finis de ce champ est :

$$u_{EF} = u_h = xy \quad v_{EF} = v_h = -\frac{1}{2}x^2$$

auquel correspondent :

$$\begin{aligned} \epsilon_{hxx} = y \quad \epsilon_{hyy} = 0 \quad \gamma_{hxy} = x \\ \sigma_{hxx} = \frac{Ey}{(1-\nu^2)} \quad \sigma_{hyy} = \frac{\nu Ey}{(1-\nu^2)} \quad \sigma_{hxy} = \frac{Ex}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

On remarque que le cisaillement est faux. Il en va de même pour l'énergie de déformation qui diffère de l'énergie vraie dans un rapport $1 + (1 - \nu^2)/2$.

C'est ce qu'on appelle le **verrouillage** par le cisaillement. Le remède est, on le verra plus tard, *l'intégration réduite*.

Verrouillage du quadrangle par la dilatation Nous nous plaçons dans la même situation, avec un champ vrai à représenter défini par :

$$u = xy \quad v = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{\nu}{1-\nu}y^2$$

Les champs de déformation et de contrainte associés sont :

$$\epsilon_{xx} = y \quad \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{1-\nu^2}y \quad \gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{Ey}{(1-\nu^2)} \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0$$

La dilatation est égale à :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}y$$

valeur qui tend bien vers 0 quand le coefficient de Poisson ν tend vers 0.5.

Le meilleur champ éléments finis du rectangle est :

$$u_h = xy \quad v_h = -\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2(1-\nu)}$$

auquel correspondent :

$$\epsilon_{hxx} = y \quad \epsilon_{hyy} = 0 \quad \gamma_{hxy} = x$$

$$\sigma_{hxx} = \frac{E(1-\nu)y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \sigma_{hyy} = \frac{E(1-\nu)y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \sigma_{hxy} = \frac{Ex}{2(1+\nu)}$$

La dilatation ne tend pas vers 0 quand le coefficient de Poisson tend vers 0.5. Par ailleurs, l'énergie de déformation est trouvée égale à

$$E_{hd} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{(1-\nu)y^2}{(1-2\nu)} + \frac{x^2}{2} \right)$$

alors que la valeur vraie est :

$$E_d = \frac{E}{2(1-\nu^2)}y^2$$

Il y a donc deux erreurs, l'une liée au terme $x^2/2$ et l'autre au fait que le facteur multiplicatif de y^2 diffère de $(1-\nu)(1-2\nu)$ quantité qui devient très grande lorsque ν tend vers 0.5.

Les remèdes sont d'ajouter deux modes dits incompatibles, l'un en $(x^2 - 1)$ et l'autre en $y^2 - 1$ (voir plus loin). Il n'est de toute façon pas facile de trouver une dilatation correcte.

Par ailleurs, la pratique et la théorie montrent qu'une augmentation du nombre d'éléments standards n'est pas une solution acceptable tant la convergence est lente.

Verrouillage du quadrangle à huit noeuds Pour les éléments de degrés plus élevés, le verrouillage peut provenir de l'utilisation de polynômes incomplets. Il suffit qu'une composante du champ de déplacement soit mal représentée pour que le verrouillage se produise ou qu'il n'y ait pas des résultats acceptables en contraintes.

Pour le quadrangle à huit noeuds, les fonctions de l'approximation sont :

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2$$

Le verrouillage peut être constaté sur les champs d'ordre trois puisque l'élément est complet pour l'ordre deux. Envisageons le champ :

$$u = x^2y \quad v = -\frac{1}{3}x^3$$

auquel correspond le champ de déformations

$$\epsilon_{xx} = 2xy \quad \epsilon_{yy} = 0 \quad \gamma_{xy} = 0$$

spécialement construit pour représenter de la flexion.

Le meilleur champ éléments finis correspondant fait que le terme en x^3 est représenté au mieux par $-1/3x^2$. D'où

$$\epsilon_{hxx} = 2xy \quad \epsilon_{hyy} = 0 \quad \gamma_{hxy} = x^2 - \frac{1}{3}$$

Le cisaillement n'est pas nul sauf ... aux points de Gauss de l'élément ($x = \pm 1/\sqrt{3}$) qui sont les points utilisés en cas d'intégration réduite. Ainsi, il peut y avoir verrouillage mais une intégration réduite est le bon remède pour trouver le bon cisaillement donc obtenir un comportement correct aux ennuis près de la construction de la matrice de raideur (voir plus loin). Un raisonnement identique apporterait les mêmes conclusions s'agissant du verrouillage en dilatation.

On peut montrer des comportements et des remèdes identiques sur les cubes à huit et vingt noeuds.

3.2 Influence de la forme

Comme on le verra plus loin, des problèmes peuvent apparaître sur des éléments présentant une forte distorsion de forme par rapport à l'élément de référence.

Il est difficile de généraliser, car l'étude générale est complexe en raison du grand nombre de paramètres de distorsion, surtout en dimension trois.

On regarde ici un exemple simple de problème lié à la distorsion d'un quadrangle à quatre noeuds. La distorsion des quadrangles en dimension deux intervient essentiellement à travers trois paramètres (Fig. 2) :

- le rapport largeur/longueur : (a/b) ,
- le travers : δ ,

– la conicité : d/b .

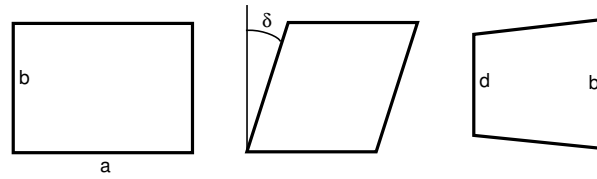


FIG. 2 – Modes de distorsion d'un quadrangle

A titre d'illustration, on considère la configuration simple de la figure 3.

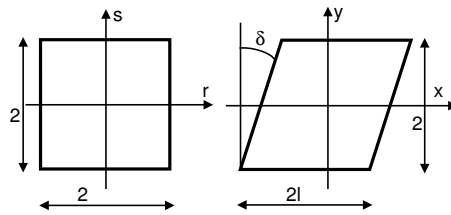


FIG. 3 – Quadrangle de référence et quadrangle avec distorsions

La matrice jacobienne inverse (voir chapitre sur les éléments) s'écrit :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 \\ -\frac{\text{tg} \delta}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

Un champ d'extension simple tel que :

$$\begin{aligned} u &= xy & v &= -\frac{1}{2}x^2 \\ \epsilon_{xx} &= y & \epsilon_{yy} &= 0 & \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

devient dans l'espace de référence :

$$u = lrs + s^2 \text{tg} \delta \quad v = -\frac{1}{2} (l^2 r^2 + 2lrs \text{tg} \delta + s^2 \text{tg}^2 \delta)$$

auquel correspond le champ éléments finis :

$$u_h = lrs + \text{tg} \delta \quad v_h = -\frac{1}{2} (l^2 + 2lrs \text{tg} \delta + \text{tg}^2 \delta)$$

et les déformations

$$\epsilon_{hxx} = s \quad \epsilon_{hyy} = \text{tg} \delta (-lr + s \text{tg} \delta) \quad \gamma_{xy} = ls$$

ϵ_{hyy} et ϵ_{hxy} sont faux et même très faux si l est très grand. On pourrait éliminer ces erreurs par une intégration réduite à un seul point ($\mathbf{r} = \mathbf{s} = 0$) si on ne trouvait alors une raideur nulle ($\epsilon_{xx} = 0$).

En pratique, ces problèmes dus à la distorsion de forme sont limités par le fait que les maillages actuels appliquent des critères limitant la distorsion des éléments. Par contre, en dimension trois, les problèmes de maillages sont plus sévères et il n'est pas toujours possible de fournir des maillages satisfaisant à des critères de distorsion stricts.

3.3 Influence du positionnement de noeuds

On peut constater le même type de problème lorsqu'il y a une erreur sur le positionnement des noeuds (Fig. 4). Il y a, là encore, une sorte de verrouillage.

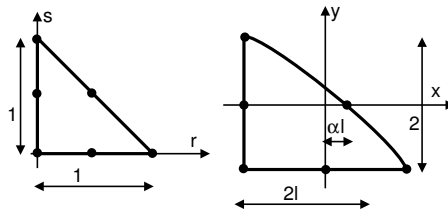


FIG. 4 – Erreur de positionnement sur un triangle à six noeuds

De même que pour les problèmes de distorsions, les maillages actuels ne fournissent plus d'éléments possédant des erreurs de positionnement des noeuds sauf peut être dans le cas de géométries très complexes maillées avec peu d'éléments.

4 Techniques d'amélioration

4.1 Intégration réduite

Nous avons déjà montré que l'intégration de Gauss, quand elle s'effectue avec un nombre limité de points, inférieur à celui fixé par la théorie pour obtenir un résultat exact, pouvait apporter un gain de comportement appréciable en supprimant les contraintes qui peuvent peser sur la représentation des déformations, en particulier celle du cisaillement. Par ailleurs, il est clair que les temps de calcul des termes d'une matrice de raideur sont proportionnels au nombre de points retenus pour l'intégration.

Donc, il y a généralement intérêt à utiliser la notion d'intégration réduite à condition toutefois de ne pas trop altérer la précision et ne pas introduire de *faux modes de déformations* ou *modes virtuels*.

Ces modes sont les vecteurs propres de la matrice de raideur. Ils diffèrent des modes de corps rigides par le fait que l'énergie de déformation qui leur est associée n'est pas nulle partout. Ils n'existent que par ce que le nombre d'évaluations des déformations aux points de Gauss est plus faible que le nombre des états de déformation produits par le champ de déplacement. Dans ce cas, il est possible que certaines combinaisons linéaires des modes de déformation produisent des modes nuls aux points d'intégration. Cette situation ne peut se produire si on utilise l'intégration complète car alors le nombre d'états de déformation est au delà du nombre des états possibles constructibles par le champ des déplacements de l'élément.

Par exemple, pour un quadrangle à quatre noeuds et deux degrés de liberté par noeuds il y a $4 \times 2 - 3 = 5$ modes de déformation indépendants. Si on utilise **1** point de Gauss, on se donne **3** composantes de la déformation ; il reste donc **2** modes virtuels (Fig. 5).

Pour déterminer ces modes, il faut se faire deux réflexions ; la première est que ces modes virtuels sont forcément compatibles avec les déplacements et qu'ensuite ils ne peuvent être nuls partout ce qui exclut les modes de déformations constantes.

Ainsi, pour le quadrangle à quatre noeuds, par exemple, il ne reste que les termes $\mathbf{u} = \mathbf{r}\mathbf{s}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{r}\mathbf{s}$ qui peuvent générer les modes virtuels.

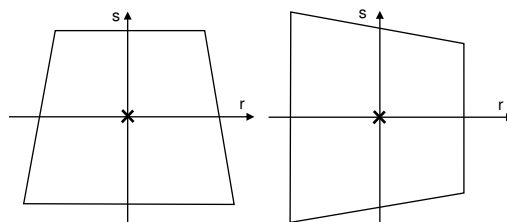


FIG. 5 – Modes virtuels pour un quadrangle 4 noeuds avec 1 point d'intégrations

Pour le cube à huit noeuds avec 1 point d'intégration, il y a $8 \times 3 - 6 - 6 = 12$ modes possibles. En ôtant les modes constants, il en reste **6** qui ne peuvent provenir que des termes $\mathbf{r}\mathbf{s}$, $\mathbf{r}\mathbf{t}$, $\mathbf{s}\mathbf{t}$ et $\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{t}$.

Selon que l'approximation polynômiale est complète ou non (Lagrange ou Serendip), le nombre de ces modes virtuels est évidemment variable. Si les éléments sont d'ordre plus élevé que **1** ou **2**, l'examen des champs de déformation et des points où ils peuvent s'annuler peut généralement suffire à trouver la forme des modes virtuels compte tenu de la position des points d'intégration (voir figure 5). Cela reste cependant souvent difficile.

De plus, ces modes virtuels peuvent se propager dans toute la structure (Fig. 6). Cela ne peut se produire que pour les modes les plus simples qui sont bien identifiés.

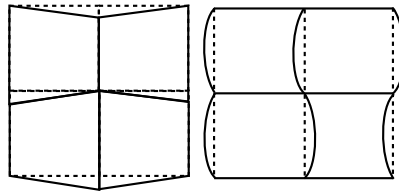


FIG. 6 – Propagation des modes virtuels dans la structure

Evidemment, les conditions aux limites peuvent très souvent empêcher un mode de se propager complètement et rendent ainsi possible la résolution statique. Cependant, l'existence de ces modes proches d'un mécanisme peuvent gravement perturber la précision.

Une technique souvent employée consiste à faire une intégration *sélective* c'est-à-dire différente sur l'ensemble des termes en sous-intégrant évidemment ceux qui induisent le verrouillage.

4.2 Addition de modes incompatibles

Cette technique consiste à ajouter des fonctions de base à l'approximation nodale. Ces fonctions de base sont dites *incompatibles*, car avec cet ajout, les déplacements ne sont plus identiques sur un bord commun à deux éléments.

La correction ainsi obtenue sur le cisaillement est excellente pour les quadrangles. Par exemple, sur un quadrangle à quatre noeuds, on prend l'approximation nodale suivante :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2}(1 - r^2)\mathbf{u}_5 + \frac{1}{2}(1 - s^2)\mathbf{u}_6$$

où les N_i sont les fonctions de base classiques du quadrangle à quatre noeuds, $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_4$ les degrés de liberté classiques et \mathbf{u}_5 et \mathbf{u}_6 des degrés de liberté additionnels.

Ces fonctions $1 - r^2$ et $1 - s^2$ additionnelles sont appelées fonctions *bulles*. Elles induisent des déformations qui permettent à la fois d'annuler le cisaillement parasite mais aussi la dilatation parasite (voir paragraphe 3.1). En fait, on a ajouté les polynômes r^2 et s^2 qui manquaient pour que l'approximation soit *Lagrange complète*.

Dans la construction de la matrice, les degrés de liberté \mathbf{u}_5 et \mathbf{u}_6 , qui ne correspondent à aucun noeud, sont éliminés par condensation statique, c'est-à-dire par élimination des variables du système.

Si on appelle \mathbf{q}_i les degrés de liberté initiaux de l'élément et \mathbf{q}_0 ceux qui sont ajoutés et qui ne correspondent à aucun noeud, le système :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{i0}^t \\ \mathbf{K}_{i0}^t & \mathbf{K}_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

devient

$$[\underline{\mathbf{K}}_{ii}] \{\mathbf{q}_i\} = \{\mathbf{F}_i\}$$

en éliminant \mathbf{q}_0 , avec

$$[\underline{\mathbf{K}}_{ii}] = [\mathbf{K}_{ii}] - [\mathbf{K}_{0i}]^T [\mathbf{K}_{ii}]^{-1} [\mathbf{K}_{0i}]$$

$[\underline{\mathbf{K}}_{ii}]$ est la matrice de raideur condensée sur les degrés de libertés associés à des noeuds.

Ces fonctions bulles existent aussi pour les éléments cubiques à huit noeuds.

4.3 Addition de degrés de liberté de rotation

Pour améliorer des éléments massifs plans ou 3D, on peut aussi ajouter des degrés de liberté en rotation (*drilling freedom* en anglais).

Par exemple, pour le quadrangle à quatre noeuds de la figure 7 soumis à une déformation de flexion, on constate un très fort apport en qualité dû aux degrés de liberté en rotation aux noeuds.

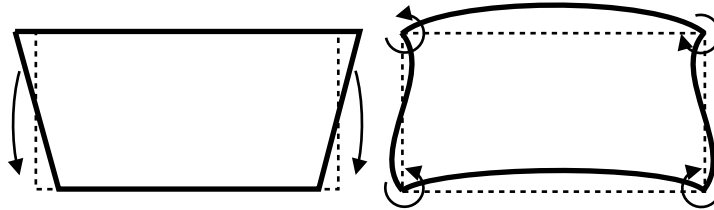


FIG. 7 – Quadrangle en flexion avec ou sans ddl de rotation

5 Conclusions

Les limitations de l'approximation nodale et les phénomènes de verrouillage doivent rester présents dans nos esprits pendant la modélisation par éléments finis. Cependant, les outils modernes de modélisation nous simplifient fortement la tâche :

- En ce qui concerne le verrouillage dû à la distorsion ou à la position des noeuds, leurs effets sont limités car les maillages actuels utilisent des critères géométriques relativement stricts limitant la distorsion et rendant quasi nulles les erreurs de positions.
- Pour les autres types de verrouillage, les éléments à disposition dans les codes de calcul industriels ont en général été améliorés soit par intégration réduite soit par ajout de modes.

Références

- [1] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : *The Finite Element Method Volume 1 : The Basics*, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [2] Bathe K.J. : *Finite element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall Ed.
- [3] Hugues T.J.R. : *The Finite Element Method*, Prentice Hall Ed.
- [4] Cook R.D., Malkus D.S. et Plesha M.E. : *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, J. Wiley, 3ème Ed.
- [5] Batoz J.L. et Dhett G. : *Modélisation des structures par éléments finis, Volume I*, Hermès Ed, en français.
- [6] Imbert J.F. : *Analyse des structures par la méthode des éléments finis*, Cépadués Ed., en français.