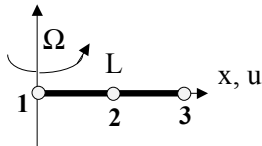


MISE EN ŒUVRE SUR DES EXEMPLES

Exemple à UNE variable : Poutre en rotation

On considère une poutre en rotation autour de l'axe Oz tournant à la vitesse angulaire constante Ω . Déplacements et contraintes ?



Maillage : la poutre est arbitrairement divisée en 2 éléments de même longueur $L/2$. 2EF, 3 nœuds.

On choisit une représentation linéaire de $u(x)$ dans chaque élément.

La seule contrainte inconnue est celle de traction compression σ_{xx} . Le travail virtuel de cette contrainte est :

$$\int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^* dV = \int_0^L ES \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx$$

1

La force centrifuge qui s'exerce sur la poutre est, pour un élément de matière Sdx:

$$F_c = \rho S \Omega^2 x dx$$

Il existe une solution exacte de ce problème donnée par la solution de l'équilibre local :

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho \Omega^2 x = 0$$

ce qui donne : $u = \frac{\rho \Omega^2}{E} \left(\frac{-x^3}{6} + \frac{xL^2}{2} \right) \quad \sigma_{xx} = \frac{\rho \Omega^2}{2} (L^2 - x^2)$

L'équation d'équilibre en termes de travaux virtuels s'écrit :

$$\int_0^L ES \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx = \int_0^L \rho S \Omega^2 x u^* dx$$

La solution par éléments finis est obtenue en résolvant cette équation.

Pour l'élément fini I défini par $x \in (0, L/2)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{-u_1 + u_2}{L/2}$$

l'intégrale $\int_0^{L/2} f(x)dx$ est écrite $\int_0^1 g(s)ds$ avec $dx = \frac{dx}{ds} ds$ d'où

$$\int_0^{L/2} ES \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx = \int_0^1 ES \frac{-u_1+u_2}{L/2} \frac{-u_1^*+u_2^*}{L/2} \frac{L}{2} ds = \frac{2ES}{L} (-u_1+u_2)(-u_1^*+u_2^*)$$

$$= \langle u_1 \quad u_2 \rangle \frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix}$$

La matrice $\frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ est appelée matrice raideur élémentaire.

L'autre intégrale représentative du travail virtuel de l'effort centrifuge vaut,

$$\int_{L/2}^1 \rho S \Omega^2 x u^* dx = \int_0^1 \rho S \Omega^2 ((1-s)x_2 + s x_3) ((1-s)u_2^* + s u_3^*) \frac{L}{2} ds$$

$$= \rho S L^2 \langle 1/24 \quad 2/24 \rangle \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix}$$

3

Des calculs analogues sont menés pour l'élément II ; l'utilisation de la variable auxiliaire s permet l'intégration avec les mêmes bornes 0, 1.

$$\int_{L/2}^L ES \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} dx = \int_0^1 ES \frac{-u_2+u_3}{L/2} \frac{-u_2^*+u_3^*}{L/2} \frac{L}{2} ds = \frac{2ES}{L} (-u_2+u_3)(-u_2^*+u_3^*)$$

$$\langle u_2 \quad u_3 \rangle \frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}$$

$$\int_{L/2}^L \rho S \Omega^2 x u^* dx = \int_0^1 \rho S \Omega^2 ((1-s)x_2 + sx_3) ((1-s)u_2^* + su_3^*) \frac{L}{2} ds$$

$$= \rho S L^2 \left\langle \frac{4}{24} \quad \frac{5}{24} \right\rangle \begin{pmatrix} u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}$$

La contribution de chaque élément est ajoutée : cette opération s'appelle l'assemblage; il donne la matrice raideur totale et le vecteur des forces nodales équivalentes à la force centrifuge qui sont respectivement :

4

Entre l'élément I et II ce qui change est la relation entre x et s puisque l'élément II a pour points nodaux $x_2 = L/2$ et $x_3 = L$, donc

$$x = (1-s)L/2 + sL = (1+s)L/2$$

Mais on s'aperçoit que $dx/ds = L/2$ ce qui établit l'identité des matrices raideurs des éléments parce qu'ils ont la même longueur.

$$\langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle \frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\rho S \Omega^2 L^2}{24} \langle 1 \quad 6 \quad 5 \rangle \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice raideur est symétrique et singulière ; ceci est normal : la symétrie est liée au fait que le travail virtuel s'exprime aussi bien par $\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^*$ que par $\boldsymbol{\varepsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma}$. La singularité est due au fait que les conditions limites n'ont pas été encore appliquées : la structure étant libre dans l'espace des déplacements $u = \text{constante}$ arbitraire (ou de translation) doivent être possibles.

Les CL sont : $u_1 = 0 \quad \bullet \quad u_1^* = 0$.

L'équilibre global est alors donné par :

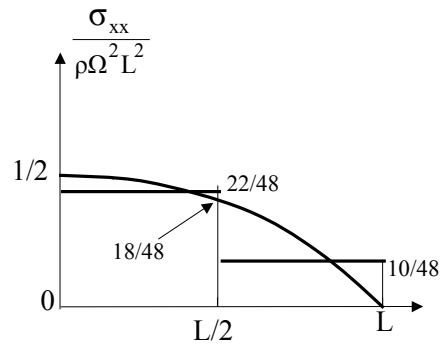
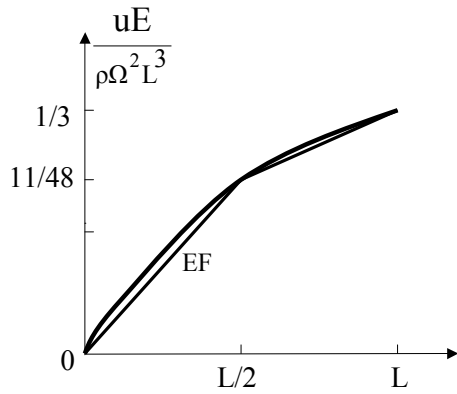
$$\langle u_2 \quad u_3 \rangle \frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} - \frac{\rho S \Omega^2 L^2}{24} \langle 6 \quad 5 \rangle \begin{pmatrix} u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} = 0$$

La solution trouvée doit être valable quel que soit le champ virtuel ; en transposant on obtient le système suivant :

$$\frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \frac{\rho S \Omega^2 L^2}{24} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

La solution de ce système est : $u_2 = \frac{11}{48} \frac{\rho \Omega^2 L^3}{E}$ $u_3 = \frac{16}{48} \frac{\rho \Omega^2 L^3}{E}$

La solution théorique et celle par EF sont comparées sur les 2 figures ci dessous.



6

Plusieurs remarques qui sont susceptibles de généralisation :

- les déplacements sont continus d'un élément à un autre ; les valeurs aux nœuds sont plus précises qu'ailleurs dans l'élément
- les contraintes elles ne sont pas continues. Il y a dans chaque élément un point pour lesquelles elles sont plus précises (ici la valeur exacte).
- globalement les résultats sont évidemment meilleurs en déplacements qu'en contraintes.

Nous pouvons montrer sur cet exemple comment on peut améliorer la précision sans refaire tout le maillage.

Dans un élément on ajoute une variable Δu qui représente l'écart entre la valeur obtenue par l'approximation linéaire et la valeur vraie. On lui associe la fonction $4s(1-s)$ qui est nulle aux nœuds 1 et 2 et vaut 1 en $s = \frac{1}{2}$ milieu de l'élément. On ne change rien d'autre en particulier la relation entre x et s .

$$u = (1-s)u_1 + su_2 + 4s(1-s)\Delta u$$

Par dérivation

$$du/dx = 2(-u_1 + u_2)/L + 8(1-2s)/L$$

7

Comme précédemment puisque la relation entre x et s n'a pas changé

$$du/dx = (du/ds)(ds/dx) = (du/ds)(2/L)$$

Le travail virtuel des contraintes s'écrit

$$\int_0^1 4ES \left(\frac{-u_1 + u_2}{L} + \frac{4(1-2s)\Delta u}{L} \right) \left(\frac{-u_1^* + u_2^*}{L} + \frac{4(1-2s)\Delta u^*}{L} \right) \frac{L}{2} ds$$

ou

$$\frac{2ES}{L} \left((-u_1 + u_2)(-u_1^* + u_2^*) + \frac{32}{3} (\Delta u \Delta u^*) \right)$$

qui donne la matrice raideur correspondante (voir diapo).

Le travail virtuel de l'effort centrifuge prend la forme pour l'élément 1 :

$$\int_0^{L/2} \rho S \Omega^2 x u^* dx = \int_0^1 \rho S \Omega^2 \frac{sL}{2} (\dots (4s(1-s)\Delta u^*)) \frac{L}{2} ds = \rho S \Omega^2 \frac{L^2}{12} \Delta u^*$$

et pour l'élément 2,

$$\int_{L/2}^L \rho S \Omega^2 x u^* dx = \int_0^1 \rho S \Omega^2 \frac{(s+1)L}{2} (\dots (4s(1-s)\Delta u^*)) \frac{L}{2} ds = \rho S \Omega^2 \frac{L^2}{4} \Delta u^*$$

La matrice raideur de l'élément devient

$$\frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 32/3 \end{vmatrix}$$

La force appliquée aux nœuds intermédiaires est calculée à partir du travail virtuel de l'effort centrifuge; on trouve

$$\text{Element 1 : } \rho S \Omega^2 L^2 / 12 \quad \text{Element 2 : } \rho S \Omega^2 L^2 / 4$$

Comme les termes de raideur correspondants dans les matrices raideur élémentaires sont non couplés avec les autres le calcul des Δu est immédiat car les équations en Δu sont indépendantes des autres :

$$\Delta u^I = \rho \Omega^2 L^3 / 128 E \quad \Delta u^{II} = 3 \rho \Omega^2 L^3 / 128 E$$

8

Les Δu trouvés aux nœuds intermédiaires sont les écarts *exacts* entre la solution théorique et la solution linéaire :

$$\begin{aligned} u_{th}(L/4) &= (47/384) \rho \Omega^2 L^3 / E = (44/384 + 3/384) \rho \Omega^2 L^3 / E \\ &= 1/2 u_{2EF \text{ linéaire}} + \Delta u^I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{th}(3L/4) &= (117/384) \rho \Omega^2 L^3 / E = (108/384 + 9/384) \rho \Omega^2 L^3 / E \\ &= (u_{2EF} + u_{3EF}) / 2_{\text{ linéaire}} + \Delta u^{II} \end{aligned}$$

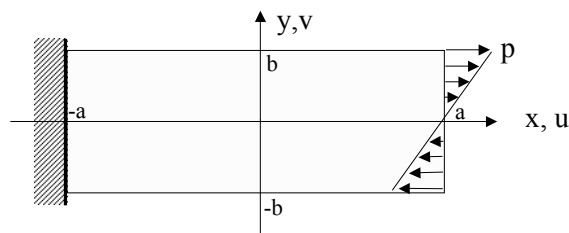
La qualité de la solution est évidemment très sensiblement accrue puisqu'aux niveau des déplacements l'approximation linéaire est remplacée par une approximation quadratique avec pour chaque élément 3 points qui coïncident avec la courbe théorique (les 2 extrémités et le point milieu).

Avec cette approximation quadratique des déplacements, les contraintes sont linéaires dans chaque élément.

Remarque : la qualité de la solution a été obtenue *sans avoir à remailler* et en partant des résultats précédents. Cette technique peut être généralisée (hélas pas totalement). Elle est connue sous l'appellation d'éléments « hiérarchiques » et constitue la base de fonctionnement des « p codes ».

Exemple à DEUX variables : Plaque en traction-compression

On considère une plaque rectangulaire de dimensions $2a \times 2b$, encadrée sur un côté et soumise à un effort de traction-compression sur l'autre. (voir figure)



9

Les déplacements u et v étant des fonctions de r et de s les déformations s'obtiennent par les dérivations partielles ci dessous :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \quad 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}$$

On doit remarquer que x et y sont des fonctions de r et de s , donc ce sont les dérivées du type $\frac{\partial x}{\partial r}$ qui sont faciles à calculer ; par exemple pour l'élément I,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial r} x_{n_i} = \frac{-(1-s)}{4} x_1 + \frac{(1-s)}{4} x_4 + \frac{(1+s)}{4} x_5 + \frac{-(1+s)}{4} x_2$$

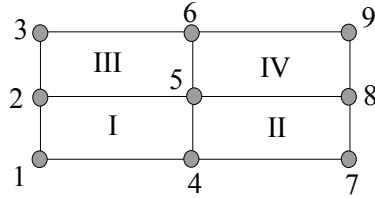
n_i représente le numéro du nœud de l'élément en correspondance avec le nœud de l'élément

de référence dans l'espace r,s . Le premier nœud peut être n'importe lequel à la condition de tourner dans le sens direct des référentiels. Les séquences 1,2,5,7 ou 2,5,7,1 ou 5,7,1,2.. pour décrire les relations x (resp y) = $x/y(r,s)$ $u/v = u/v(r,s)$ sont toutes valables.

En conséquence les matrices et/ou les déterminants associés,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \square \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{vmatrix} = \square^{-1} \quad \text{sont connus dès lors que r et s sont donnés.}$$

L'épaisseur est constante (= h). La plaque est modélisée par 4 EF identiques.
 Il y a 2 déplacements/nœud, u selon Ox et v selon Oy, car la plaque est supposée ne se déformer que dans son plan moyen. Le problème est donc plan.



Matrice raideur d'un élément

La matrice raideur d'un élément est une matrice 8x8. Ses détails de construction sont donnés en annexe (commentaires).

L'approximation nodale des déplacements est identique pour u et v.
 Pour l'élément I on écrit par exemple,

$$u/v = N_1(r,s)u_1/v_1 + N_2(r,s)u_4/v_4 + N_3(r,s)u_5/v_5 + N_4(r,s)u_2/v_2$$

10

En effet puisque les quantités $\partial x/\partial r$ sont connues numériquement pour r et s donnés alors les quantités $\partial r/\partial x$ qui sont leurs inverses sont eux aussi connus puisqu'il suffit de pratiquer l'inversion d'une matrice 2x2 dans le cas de notre exemple et d'une matrice 3x3 dans le cas général volumique.

Dans ces conditions le calcul du travail virtuel des contraintes dans un élément fini s'effectue de façon numérique en utilisant le procédé d'intégration de « Gauss ». Reprenant la formulation du travail virtuel par unité de volume donnée dans le diapositive 18 et en l'intégrant dans l'élément il vient :

$$\bar{u}_{n_i} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (|\partial N|^2 |C| |\partial N|) \det J dr ds \bar{u}_{n_i}^*$$

det J représente la correspondance entre dx dy et dr ds.

Dans l'exemple traité, pour l'élément IV, nous avons la séquence nodale 5, 8, 9, 6 :
 nœud 5 = (0, 0), nœud 8 = (a, 0), nœud 9 = (a, b), nœud 6 = (0, b)

D'où,

$$x = 0xN_1 + a.xN_2 + a.xN_3 + 0xN_4 = a(r+1)/2$$

$$y = 0xN_1 + 0xN_2 + bxN_3 + bxN_4 = b(s+1)/2$$

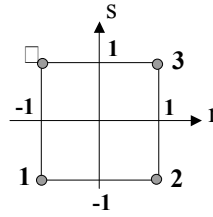
$$dx dy = ab/4 dr ds \quad (\det J = ab/4)$$

$$N_{i,r} = r_i (1+ss_i)/4 \quad N_{i,s} = s_i(1+rr_i)/4$$

Ici, contrairement à ce que nous avons écrit plus haut, mais *exceptionnellement* la simplicité des relations entre x, y et r, s permet un calcul explicite des dérivées partielles $\partial r/\partial x$,

avec,

$$N_i = \frac{(1+r_i)(1+ss_i)}{4}$$



r et s sont les coordonnées locales qui varient dans les intervalles (-1, +1), r_i et s_i les coordonnées des sommets du carré correspondant $r_1 = -1$, $s_1 = -1$.

On démontre dans une autre leçon que la liaison entre les x et y et les r et s satisfait la même relation que u et v c'est-à-dire que,

$$x/y = N_1(r,s)x_1/y_1 + N_2(r,s)x_4/y_4 + N_3(r,s)x_5/y_5 + N_4(r,s)x_2/y_2$$

partir de ces approximations nodales on formule les déformations, puis les contraintes (vraies et/ou virtuelles) en faisant une hypothèse de matériau élastique, isotrope et enfin le travail virtuel dans l'élément qui, comme dans l'exemple précédent, mais évidemment de façon plus complexe, va s'exprimer en fonction des déplacements nodaux vrais et virtuels. On écrit successivement :

11

La matrice $|\partial N|$ a pour expression,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -(1-s)/a & 0 & (1-s)/a & 0 & (1+s)/a & 0 & -(1+s)/a & 0 \\ 0 & -(1-r)/b & 0 & -(1+r)/b & 0 & (1+r)/b & 0 & (1-r)/b \\ -(1-r)/b & -(1-s)/a & -(1+r)/b & (1-s)/a & (1+r)/2b & (1+s)/a & (1-r)/2b & -(1+s)/a \end{vmatrix}$$

et le vecteur des déplacements nodaux,

$$\vec{u} = \langle u_5 \quad v_5 \quad u_8 \quad v_8 \quad u_9 \quad v_9 \quad u_6 \quad v_6 \rangle$$

La matrice raideur correspondante est une matrice 8x8 qui s'écrit pour un matériau isotrope, de module E, de coefficient de Poisson ν :

$$\frac{Eh}{3ab\alpha\beta} \begin{vmatrix} 4(b^2 + \alpha a^2) & 3\beta ab & -2(2b^2 - \alpha a^2) & -\lambda ab & -2(b^2 + \alpha a^2) & -3\beta ab & 2(b^2 - 2\alpha a^2) & \lambda ab \\ 3\beta ab & 4(a^2 + \alpha b^2) & \lambda ab & 2(a^2 - 2\alpha b^2) & -3\beta ab & -2(a^2 + \alpha b^2) & -\lambda ab & -2(a^2 - \alpha b^2) \\ -2(2b^2 - \alpha a^2) & \lambda ab & 4(b^2 + \alpha a^2) & 3\beta ab & 2(b^2 - 2\alpha a^2) & -\lambda ab & -2(b^2 + \alpha a^2) & 3\beta ab \\ -\lambda ab & 2(a^2 - 2\alpha b^2) & 3\beta ab & 4(a^2 + \alpha b^2) & -\lambda ab & -2(2a^2 + \alpha b^2) & 3\beta ab & 2(a^2 - \alpha b^2) \\ -2(b^2 + \alpha a^2) & -3\beta ab & 2(b^2 - 2\alpha a^2) & -\lambda ab & 4(b^2 + \alpha a^2) & 3\beta ab & -2(2b^2 - \alpha a^2) & -\lambda ab \\ -3\beta ab & -2(a^2 + \alpha b^2) & -\lambda ab & -2(2a^2 + \alpha b^2) & 3\beta ab & 4(a^2 + \alpha b^2) & \lambda ab & 2(a^2 - 2\alpha b^2) \\ 2(b^2 - 2\alpha a^2) & -\lambda ab & -2(b^2 + \alpha a^2) & 3\beta ab & -2(2b^2 - \alpha a^2) & \lambda ab & 4(b^2 + \alpha a^2) & -3\beta ab \\ \lambda ab & -2(a^2 - \alpha b^2) & 3\beta ab & 2(a^2 - \alpha b^2) & -\lambda ab & 2(a^2 - 2\alpha b^2) & -3\beta ab & 4(a^2 + \alpha b^2) \end{vmatrix}$$

$$\alpha = (1-\nu)/2, \beta = (1+\nu)/2, \lambda = 3/2(1-3\nu)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n_i} \\ \mathbf{v}_{n_i} \end{pmatrix} = |\mathbf{N}| \bar{\mathbf{u}}^{(e=1)}$$

d'où l'on déduit pour l'exemple considéré,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^e \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^e \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,x} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,x}) \mathbf{u}_{n_i}^e \\ \sum_{i=1}^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,y} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,y}) \mathbf{v}_{n_i}^e \\ \sum_{i=1}^4 (\mathbf{N}_{i,r} r_{,y} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,y}) \mathbf{u}_{n_i}^e + (\mathbf{N}_{i,r} r_{,x} + \mathbf{N}_{i,s} s_{,x}) \mathbf{v}_{n_i}^e \end{pmatrix} = |\partial \mathbf{N}| \bar{\mathbf{u}}^e$$

Le travail virtuel par unité de volume pour l'élément e s'écrit, avec C matrice des coefficients élastiques du matériau pour l'élément considéré,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^e \mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e*} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e*} \mathbf{T} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e*} = \bar{\mathbf{u}}^{e*} \mathbf{T} |\mathbf{C}| |\partial \mathbf{N}| \bar{\mathbf{u}}^{e*}$$

Les éléments tant intérieurs que les fonctions de forme et la matrice ne comportent pas l'indice e

12

Les efforts extérieurs distribués sont transformés en efforts nodaux en exprimant le travail virtuel : les 2 éléments concernés sont les éléments III et IV. Par exemple, pour l'élément IV, sur la frontière 8-9 on a,

$$x = \mathbf{N}_8(1,s)x_8 + \mathbf{N}_9(1,s)x_9 = a$$

$$y = \mathbf{N}_8(1,s)y_8 + \mathbf{N}_9(1,s)y_9 = (1+s)b/2$$

$$u^* = \mathbf{N}_8(1,s)u_8^* + \mathbf{N}_9(1,s)u_9^*$$

$$F_y = py/b \text{ ou } ps/b$$

$$F_{x,ext}^* = \int_8^9 F_x u^* dy = \int_{-1}^1 F_x(s) u^* ds = \int_{-1}^1 \frac{p(1+s)}{2} \left(\frac{1-s}{2} u_8^* + \frac{1+s}{2} u_9^* \right) \frac{b ds}{2} = \frac{pb}{6} u_8^* + \frac{pb}{3} u_9^*$$

Les efforts nodaux équivalents pour le triangle IV sont donc : pb/6 et pb/3.

auquel correspond

$$|K^I| = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |\partial N|^T |C| |\partial N| \det |J| dr ds$$

Le vecteur des déplacements nodaux comportant 8 composantes, la matrice raideur de l'élément est une matrice 8x8 (voir commentaires).

Tous les éléments étant identiques en dimensions les raideurs sont les mêmes; Seuls changent les d.d.l. aux nœuds.

Assemblage des forces nodales et la solution

Comme on l'a vu l'assemblage consiste à regrouper toutes les matrices raideur en une seule par addition des K^I . Il y a 9 nœuds et 2d.d.l. / nœud ce qui donne une matrice totale 18x18.

L'application des conditions limites permet une réduction à une 12x12 puisque les déplacements vrais et virtuels $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_1^*, v_1^*$ sont nuls.

13

Numériquement avec $a = 2, b = 0.5, E = 1.10^6, \nu = 0.3$ on trouve les valeurs suivantes de la matrice élémentaire :

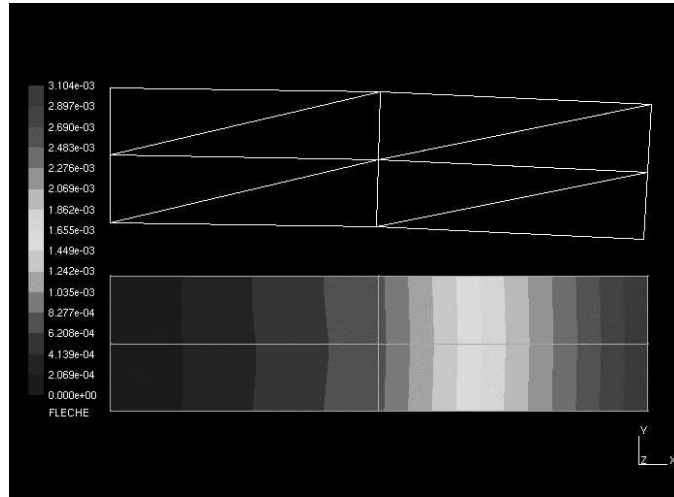
$$10^5 \begin{vmatrix} 6.044 & 1.786 & 1.648 & -0.1374 & -3.022 & -1.786 & -4.670 & 0.1374 \\ & 14.97 & 0.1374 & 7.005 & -1.786 & -7.486 & -0.1374 & -14.49 \\ & & 6.044 & -1.786 & -4.670 & -0.1374 & -3.022 & 1.786 \\ & & & 14.97 & 0.1374 & -14.49 & 1.786 & -7.486 \\ & & & & 6.044 & 1.786 & 1.648 & -0.1374 \\ & \text{sym} & & & & 14.97 & 0.1374 & 7.005 \\ & & & & & & 6.044 & -1.786 \\ & & & & & & & 14.97 \end{vmatrix}$$

Les résultats des 2 modélisations correspondant d'une part au maillage simpliste du calcul littéral et d'autre part à un maillage ayant convergé sont données sur les 2 diapos ci-dessous.

La convergence est obtenue lorsque les résultats du modèle 2D approchent convenablement ceux d'une poutre soumise à un moment de flexion équivalent.

Les efforts aux nœuds sont calculés à partir du travail virtuel de l'effort distribué en utilisant l'expression du déplacement dans les EF impliqués, ici les éléments III et IV. (voir commentaires) :

Les résultats de cette modélisation comportant 4 éléments sont donnés ci dessous :



14

La convergence est atteinte avec le maillage suivant :

