



Vibration des Systèmes Continus

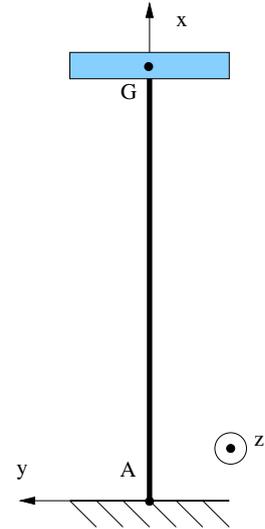
Sans document - Durée conseillée : une heure

Exercice 1 Vibrations de flexion d'une tige

On s'intéresse aux mouvements de vibration de flexion d'une tige flexible AG encastrée en A et supportant une pièce rigide en G . On souhaite obtenir une approximation de la fréquence fondamentale de la structure par la méthode du quotient de Rayleigh.

On ne s'intéresse qu'aux mouvements dans le plan (x, y) . La tige a une longueur L et elle est modélisée par une poutre de Bernoulli. Les sections de la tige ont une surface S et une inertie quadratique autour de z notée I . Le module de Young du matériau de la tige est E et ρ est sa masse volumique.

Dans ce mouvement de vibration, on note $v(x, t)$ le déplacement transversal (direction y) d'une section de la tige située à l'abscisse x (l'origine des abscisses étant prise en A). Les effets de pesanteur sont négligés.



- Première modélisation de la pièce rigide** : dans un premier temps, la pièce rigide supportée par la tige est assimilée à une masse ponctuelle M située en G .
 - Donner l'expression de l'énergie cinétique du système pendant le mouvement.
 - Donner l'expression de l'énergie potentielle du système pendant le mouvement.
 - Donner l'expression du quotient de Rayleigh d'une forme spatiale test pour une telle modélisation. Rappeler l'origine des termes de ce quotient. Préciser les hypothèses sur la forme test. Expliquer comment ce quotient peut donner une approximation de la pulsation fondamentale.
 - On prend comme forme test la fonction x^2 . Construire l'approximation de la fréquence fondamentale.
 - On considère que le système est majoritairement entraîné dans son mouvement par la masse ponctuelle en A . Construire une nouvelle approximation de la fréquence fondamentale, en utilisant une forme test correspondant à la forme que prend la tige sous l'action d'un effort ponctuel latéral en G .
- Deuxième modélisation de la pièce rigide** : compte tenu des dimensions de la pièce rigide on souhaite aussi prendre en compte son inertie en rotation autour de l'axe z . Cette pièce est donc modélisée comme une masse ponctuelle M en G et une inertie ponctuelle J en G . J est une inertie massique autour de l'axe (G, z) . La rotation de la pièce rigide est considérée comme étant celle de la section de la tige située en G .
 - Rappeler le lien entre rotation des sections d'une poutre et déplacement transversal.
 - Donner l'expression de l'énergie cinétique du système pendant le mouvement.
 - En déduire l'expression du quotient de Rayleigh.
 - Donner une approximation de la fréquence fondamentale en utilisant la forme test définie dans la question (1e).
 - Sans faire de calcul, expliquer quelle forme test peut être utilisée si on considère que le système est principalement entraîné par l'inertie en rotation de la pièce rigide.
 - Même question lorsqu'on considère que le système est majoritairement entraîné par la masse répartie de la tige.