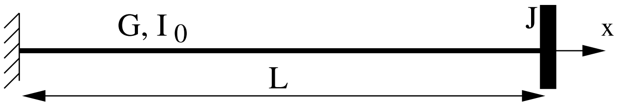
Méthode du quotient de Rayleigh

Exercice 1 *Vibrations de torsion d'un arbre muni d'un volant d'inertie.*

On s'intéresse aux mouvements de vibration de torsion d'un arbre supportant un volant d'inertie. L'arbre a une longueur L et sa section a un moment quadratique en torsion constant I_0. Le module de cisaillement du matériau de l'arbre est G et ρ est sa masse volumique. La section sitiée en $x = 0$ est encastrée. On considère que l'inertie massique J du volant est telle que $J = \rho I_0 L$.

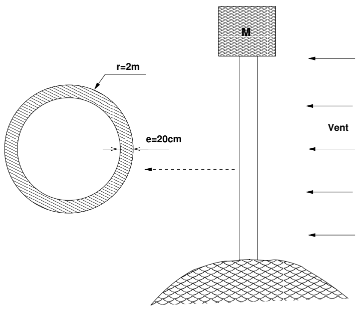


Dans ce mouvement de vibration, on note $\theta(x, t)$ l'angle de rotation autour de l'axe $\vec{x}$ d'une section de l'arbre située à l'abscisse x.

1. Donner l'expression du quotient de Rayleigh d'une forme admissible.
2. Construire une approximation simple de la première fréquence propre.
3. La forme exacte du premier mode est $\sin(\alpha x/L)$, où $\alpha = 0.86033$. Retrouver la valeur exacte de la première fréquence propre.

Exercice 2 *Vibration d'un chateau d'eau*

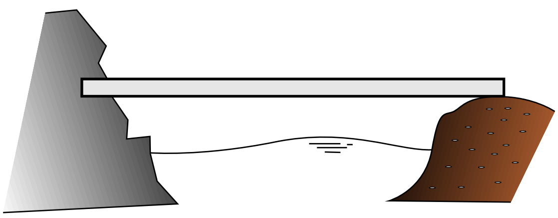
On cherche à estimer la fréquence fondamentale d'un château d'eau soumis au vent au sommet d'un colline. Ce bâtiment est constitué d'une tour en béton de $30m$ de hauteur et assimilable à un cylindre creux de $4m$ de diamètre externe et de $20cm$ d'épaisseur. Le module d'Young du béton est $E = 35GPa$ et sa masse volumique $\rho = 2500kg.m^{-3}$. Cette tour supporte une masse $M = 250t$ d'eau + réservoir. L'ensemble est soumis à un vent latéral.



1. Donner l'expression du quotient de Rayleigh d'une forme admissible.
2. Construire la plus simple approximation de la première fréquence propre.
3. Construire une approximation simple en utilisant des formes solutions de problèmes de poutre.

Exercice 3 *Vibration d'une passerelle*

Une passerelle est composé d'une simple dalle de béton de largeur $b = 2m$, de longueur $L = 20m$ de long et d'épaisseur $h = 50cm$. Elle est encastrée à gauche dans une zone rocheuse et appuyée à droite sur un sol mou. Ce sol est considéré comme élastique de raideur globale $k = 10^6 N/m$.



1. Lorsqu'on néglige l'effet du ressort, construire une approximations en utilisant les résultats de l'exercice précédent.
2. Prendre en compte le ressort en utilisant les mêmes formes d'approximation.

Méthode du quotient de Rayleigh
Eléments de correction

Eléments de correction 1 *Vibration d'un chateau d'eau*

On utilise un modèle poutre équivalent pour la tour du chateau d'eau. Ses caractéristiques sont $S = 2.3876m^2$ et $I = 4.3216m^4$. Le réservoir et l'eau qu'il contient sont modélisés par une masse ponctuelle au somment de la poutre. La première fréquence propre obtenue par élément fini est : $f_0^{ex} = 1.2057Hz$.

1. Quotient de Rayleigh

$$R(V) = \frac{\displaystyle\int_0^L EI(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2})^2 dx}{\displaystyle\int_0^L \rho S(V(x))^2 dx + M(V(L))^2}$$

2. L'approximation la plus simple qui statisfait aux conditions aux limites est

$$V^I(x) = x^2$$

on obtient alors :

$$R(V^I) = \frac{4EIL}{\rho S \frac{L^5}{5} + ML^4} \qquad \Rightarrow \qquad f_0^I = 1.4092Hz \geq f_0^{ex}$$

soit 17% d'écart avec la solution exacte.

3. Solution du problème poutre. La première forme considérée est la forme que prend la poutre sous l'action d'un effort tranchant F en bout. Cela correspond à faire l'hypothèse que la structure est principalement entrainée en mouvement par la masse du résevoir. La solution de ce problème est :

$$v(x) = \frac{F}{EI}(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

On prend donc comme forme :

$$V^{II}(x) = (\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

dont le quotient de Rayleigh donne :

$$R(V^{II}) = \frac{\frac{EIL^3}{3}}{\frac{11\rho SL^7}{420} + M(\frac{L^3}{3})^2} \qquad \Rightarrow \qquad f_0^{II} = 1.2070Hz \geq f_0^{ex}$$

soit seulement 0.1% d'écart avec la solution exacte, ce qui correspond à une très bonne approximation.

La deuxième forme considérée est la forme que prend la poutre sous l'action d'un effort tranchant p réparti sur toute sa longueur. Cela correspond à faire l'hypothèse que la structure est principalement entrainée par le poids propre du mat. La solution de ce problème est :

$$v(x) = \frac{p}{2EI}(\frac{L^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3})$$

On prend donc comme forme :

$$V^{III}(x) = (\frac{L^2x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{3})$$

dont le quotient de Rayleigh donne :

$$R(V^{III}) = \frac{\frac{EIL^5}{5}}{\frac{13\rho SL^9}{810} + M(\frac{L^4}{4})^2} \qquad \Rightarrow \qquad f_0^{III} = 1.238Hz \geq f_0^{ex}$$

soit 2.7% d'écart avec la solution exacte. La masse du réservoir étant plus grande que celle de la tour, cette forme modale est moins adaptée que la précédente.

Eléments de correction 2 *Vibration d'une passerelle*

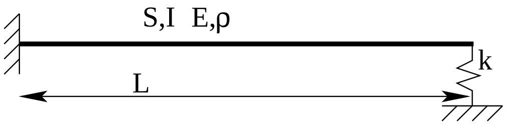
On utilise un modèle poutre équivalent pour la passerelle. La poutre est encastrée à gauche. Ses caractéristiques sont $S = 1m^2$ et $I = 2.083\,10^{-2}\,m^4$.

1. Dans la cas sans ressort, l'effet du sol est négligé et la poutre est libre à droite. Le quotient de Rayleigh est
$$R(V) = \frac{\displaystyle\int_0^L EI(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2})^2 dx}{\displaystyle\int_0^L \rho S (V(x))^2 dx}$$
La première fréquence propre exacte est : $f_0^{ex} = 0.755Hz$. Les résultats donnés par les trois formes utilisées dans l'exercice précédent sont :

Forme	Fréquence (Hz)	Ecart (%)
$V^I(x)$	0.961	24
$V^{II}(x)$	0.766	1.5
$V^{III}(x)$	0.758	0.4

Ici, la forme III est la plus adaptée car la structure est entrainée en mouvement par sa masse qui est répartie.

2. Dans le second cas, le sol est modélisé par un ressort à droite. La première fréquence propre calculée par éléments finis est $f_0^{EF} = 1.554Hz$.



Le quotient de Rayleigh est
$$R(V) = \frac{\displaystyle\int_0^L EI(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2})^2 dx + k(V(L))^2}{\displaystyle\int_0^L \rho S (V(x))^2 dx}$$
En calculant le quotient de Rayleigh avec la forme III du calcul précédent on obtient :
$$R(V^{III}) = \frac{\dfrac{EIL^5}{5} + k(\dfrac{L^4}{4})^2}{\dfrac{13\rho S L^9}{810}} \qquad \Rightarrow \qquad f_0^{III} = 1.596Hz \geq f_0^{EF}$$
soit 3.4% d'écart avec la solution exacte.