Méthode de Rayleigh-Ritz

L. Champaney

Notes de cours de Dynamique des Structures

1 Méthode

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à chercher une approximation des modes de vibration dans un espace de dimension N engendré par N fonctions ϕ_i choisies. C'est-à-dire qu'on cherche des solutions de la forme :

$$W(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i(x,y,z) = \{q\}^T\{\phi\} \qquad \text{avec} \quad \{q\} = \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \{\phi\} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{array} \right\}$$

Les fonctions ϕ_i étant connues, le quotient de Rayleigh d'une telle forme dépend uniquement des paramètres q_i et peut être mis sous la forme :

$$R(W) = R(q_1, \dots, q_N) = \frac{\{q\}^T \mathbf{K} \{q\}}{\{q\}^T \mathbf{M} \{q\}}$$

où $\mathbf{K}$ est appelée matrice de raideur et $\mathbf{M}$ matrice de masse.

La minimisation du quotient de Rayleigh par rapport aux paramètres q_i donne le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial q_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial R}{\partial q_N} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{noté} \quad \frac{\partial R}{\partial \{q\}} = 0$$

qui correspond après développement à :

$$\frac{\mathbf{K}\{q\}\{q\}^T\mathbf{M}\{q\} - \{q\}^T\mathbf{K}\{q\}\mathbf{M}\{q\}}{\left(\{q\}^T\mathbf{M}\{q\}\right)^2} = 0$$

En notant :

$$\omega^2 = \frac{\{q\}^T\mathbf{K}\{q\}}{\{q\}^T\mathbf{M}\{q\}},$$

la minimisation donne :

$$\frac{\mathbf{K}\{q\} - \omega^2\mathbf{M}\{q\}}{\{q\}^T\mathbf{M}\{q\}} = 0$$

Les quantités ω_i qui assurent le minimum du quotient de Rayleigh sont donc les termes qui annulent le déterminant :

$$|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0$$

On peut montrer que ω_i est une approximation par l'excès de la $i$ème fréquence propre du système.

Les vecteurs $\{q^i\}$, associés aux ω_i, qui sont solutions du problème aux valeurs propres :

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\{q\} = 0$$

donnent les composantes dans la base des fonctions ϕ_i d'approximations des N premiers modes propres du système.

De manière générale, on peut faire les remarque suivant sur la qualité d'une approximation par la méthode de Rayleigh-Ritz :
- la qualité de l'approximation du $i$éme mode décroit avec i,
- la qualité de l'approximation des pulsations est meilleure que celle de l'approximation des modes,
- la qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base N.

2 Exemple : vibrations longitudinales

On s'intéresse aux vibrations longitudinales d'une barre encastrée à droite et appuyée à gauche sur un ressort de raideur k. La barre est de longueur L et de section S. E est le module d'Young du matériau.

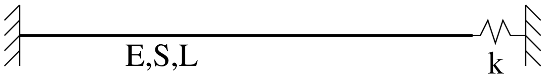

FIGURE 1 – Barre encastrée et appuyée sur un ressort

2.1 Solution exacte

Lorsque la raideur du ressort est telle que $k = ES/L$, il existe une solution exacte qui donne pour les deux premières pulsations propres :

$$\omega_1 = 2.029\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \qquad ; \qquad \omega_1 = 4.913\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Dans la suite on considère que la raideur k a la valeur ES/L et les solutions approchées seront comparée à cette solution exacte.

2.2 Solution approchée par la méthode du quotient de Rayleigh

Le quotient de Rayleigh pour toute forme $U(x)$ qui vérifie la condition d'encastrement $U(0) = 0$ s'écrit :

$$R(U) = \frac{\displaystyle\int_0^L ES\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx + kU(L)^2}{\displaystyle\int_0^L \rho S U(x)^2 dx}$$

Si on prend comme forme d'approximation, la fonction $U_1(x) = \sin\frac{\Pi x}{2L}$, qui correspond au premier mode de la poutre libre à droite, on obtient comme approximation du premier mode :

$$\omega_1' = 2.11\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

ce qui correspond à une bonne approximation du premier mode.

2.3 Méthode de Rayleigh-Ritz

On applique la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension 2 en prenant comme deux fonctions d'approximation :

$$U_1(x) = \sin \frac{\Pi x}{2L} \qquad ; \qquad U_2(x) = \sin \frac{3\Pi x}{2L}$$

qui correspondent aux deux premiers modes propres de la poutre libre à droite.

C'est à dire qu'on cherche des approximations des deux premiers modes propres sous la forme :

$$U_{app}(x) = q_1 U_1(x) + q_2 U_2(x)$$

La suite consiste à trouver les meilleurs couples $\{q_1; q_2\}$ au sens du minimum du quotient de Rayleigh. Avec les fonctions choisies, le quotient de Rayleigh prend la forme :

$$R(U_{app}) = R(q_1, q_2) = \frac{\frac{\Pi^2 ES}{8L}(q_1^2 + 9q_2^2) + k(q_1^2 - q_2^2)}{\frac{\rho SL}{2}(q_1^2 + q_2^2)}$$

Si on cherche q_1 et q_2 de manière à minimiser le quotient de Rayleigh, on écrit :

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0$$

Ces deux équations conduisent au problème aux valeurs propres suivant :

$$\left[\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \left([\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\{q\} = 0 \right)$$

avec

$$k_{11} = \int_0^L ES(\frac{\partial U_1}{\partial x})(\frac{\partial U_1}{\partial x})dx + kU_1(L)U_1(L)$$

$$k_{22} = \int_0^L ES(\frac{\partial U_2}{\partial x})(\frac{\partial U_2}{\partial x})dx + kU_2(L)U_2(L)$$

$$k_{12} = \int_0^L ES(\frac{\partial U_1}{\partial x})(\frac{\partial U_2}{\partial x})dx + kU_1(L)U_2(L)$$

qui correspondent au numérateur du quotient de Rayleigh et

$$m_{11} = \int_0^L \rho S U_1(x) U_1(x) dx$$

$$m_{22} = \int_0^L \rho S U_2(x) U_2(x) dx$$

$$m_{12} = \int_0^L \rho S U_1(x) U_2(x) dx$$

qui correspondent au dénominateur.

Ici, compte tenu de la forme du quotient de Rayleigh, on a :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\Pi^2}{8}\frac{ES}{L} + k & -k \\ -k & \frac{9\Pi^2}{8}\frac{ES}{L} + k \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{M} = \rho S L \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Les deux fonctions U_1 et U_2 sont formes propres du problème sans ressort. Elles sont donc orthogonales par rapport à un opérateur de masse qui est le même qui celui du problème avec ressort. Elles sont aussi orthogonales par rapport à un opérateur de raideur qui coïncide avec celui qui nous intéresse lorsque k est nul. Il est donc naturel que la matrice de masse obtenue soit diagonale et que le coté non-diagonal de la matrice de raideur soit uniquement du au terme k.

Les deux valeurs de ω^2 qui annulent le déterminant de $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]$ donnent une approximation des deux premières pulsations propres du système :

$$\omega_1'' = 2.066\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}} \qquad ; \qquad \omega_2'' = 4.940\sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$$

Il est intéressant de remarquer que l'ajout de la fonction U_2 permet d'améliorer la qualité de l'approximation de ω_1 par rapport à la méthode du quotient de Rayleigh (qui est en fait la méthode de Rayleigh-Ritz en dimension un). Cela permet aussi de fournir une approximation de la deuxième pulsation propre du système.