Exemples de réduction d'un système complexe à un système à un degré de liberté

L. Champaney

Notes de cours de Dynamique des Structures

Résumé

Les systèmes complexes (qu'ils soient discrets ou continus) sont susceptibles de vibrations multiples et de types variés. En pratique, néanmoins, c'est souvent la vibration de plus basse fréquence d'un type déterminé qui semble la plus inquiétante. On l'appelle fréquence fondamentale du système. La réduction du système réel à une simple combinaison masse-ressort permet d'obtenir très vite une approximation souvent suffisante de la fréquence considérée. Ce document donne la méthode générale pour la construction d'un modèle masse-ressort équivalent et l'illustre sur deux exemples.

Sommaire

1 Méthode

1.1 Modèle masse-ressort

La difficulté de cette approche est la définition du paramètre de déplacement qui représente le degré de liberté du système masse ressort équivalent. On choisi souvent le déplacement d'un point où ce concentre un grande partie de la masse du système ou bien d'un point susceptible de présenter un mouvement simple de grande amplitude pendant la vibration.

Par la suite, l'approximation de la fréquence fondamentale du système est obtenue de la manière suivante :

$$\omega_{approx} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

où k_{eq} est un raideur équivalente et m_{eq} une masse équivalente à définir en fonction du point choisi.

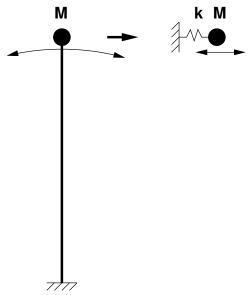


FIGURE 1 – Réduction d'un système complexe à un système masse ressort

1.2 Raideur équivalente

La raideur en un point d'un système est définie comme la force nécessaire pour produire un déplacement unité dans la direction de cette force : si u est le déplacement du point dans cette direction causé par la force F, la raideur est :

$$k_{eq} = \frac{F}{u}$$

La figure 2 illustre ce calcul.

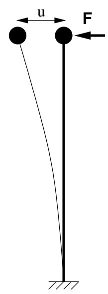


FIGURE 2 – Calcul d'une raideur équivalente

1.3 Masse équivalente

Lorsque la masse du système ce concentre presque totalement sur le point considérée et que la masse restante peut être négligée, la masse équivalente choisie est souvent la masse concentrée.

Pourtant, des parties du système en mouvement peuvent présenter une portion non négligeable de la masse totale du système : négliger leur masse peut conduire à des fréquences estimées trop élevées.

Une méthode conduisant à une meilleure approximation de la fréquence fondamentale consiste à calculer l'énergie cinétique additionnelle de ces parties en mouvement jusqu'alors négligées : il est pour cela nécessaire de faire des hypothèses sur le mouvement concernant le mouvement de ces élément répartis pour pouvoir lier ce mouvement à celui du seul degré de liberté. L'énergie cinétique ainsi calculée peut alors être écrite en fonction de la vitesse $\dot{u}$, sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{u}^2$$

1.4 Exemple simple

Si, par exemple, dans un simple système masse-ressort, on veut prendre en compte l'effet de la masse répartie sur le ressort lui même, on peut procéder de la sorte.

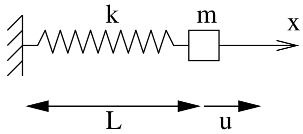


FIGURE 3 – Système masse-ressort

Si $\dot{u}$ est la vitesse de la masse concentrée m, il est naturel de supposer que la vitesse d'un élément ressort situé à une abscisse x (mesurée à partie de la partie fixe) est proportionnelle à x et égale à, si L est la longueur du ressort,

$$\frac{x}{L}\dot{u}$$

L'énergie cinétique du système est ainsi, si m_{res} est la masse totale du ressort,

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m_{res}}{L}\left(\frac{x}{L}\dot{u}\right)^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{u}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_{res}}{3}\dot{u}^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}^2$$

La masse équivalente est donc :

$$m_{eq} = \frac{m_{res}}{3} + m$$

et la fréquence approchée :

$$\omega_{approx} = \sqrt{\frac{k}{\frac{m_{res}}{3} + m}}$$

2 Premier exemple : Château d'eau

On cherche à estimer la fréquence fondamentale d'un château d'eau soumis au vent au sommet d'un colline. Ce bâtiment est constitué d'une tour en béton de $30m$ de hauteur et assimilable à un cylindre creux de $4m$ de diamètre externe et de $20cm$ d'épaisseur. Le module d'Young du béton est $E = 35GPa$ et sa masse volumique $\rho = 2500kg.m^{-3}$. Cette tour supporte une masse $M = 250t$ d'eau + réservoir. L'ensemble est soumis à un vent latéral (voir figure 4).

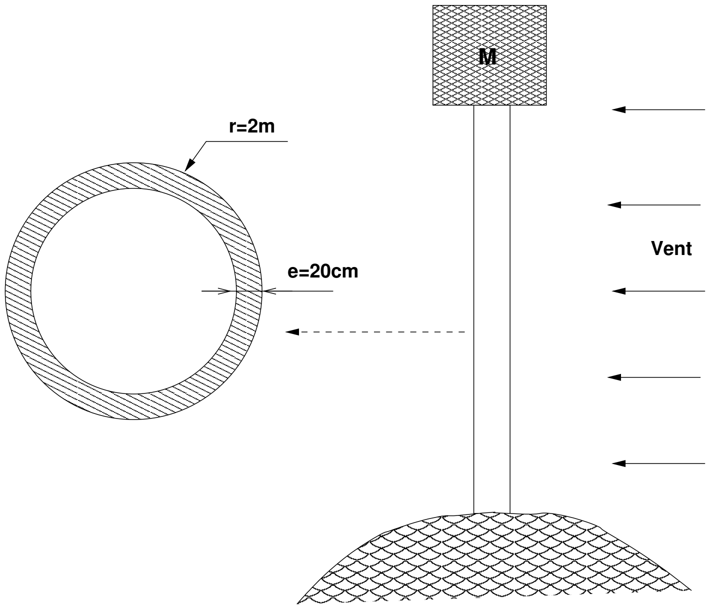


FIGURE 4 – Château d'eau soumis au vent

2.1 Modèle mécanique

Dans un premier temps, on considère que :
- la masse de la tour est négligeable devant la masse du réservoir d'un point de vue de l'inertie,
- la prise au vent du résevoir est majoritaire devant celle de la tour.
- les déplacements possibles du réservoir sont de faible amplitude et assimilables à une translation horizontale.

On adopte un modèle de type RdM de la tour pour faire l'équivalence avec un système à un degré de liberté. La masse considérée est la masse du réservoir et la raideur est le rapport entre le déplacement horizontal du haut de la poutre et l'effort qui créé ce déplacement (fig. 5).

2.1.1 Raideur de la tour

Pour calculer la raideur de la poutre, on considère le problème statique d'une poutre en béton, de hauteur $L = 30m$, de section circulaire creuse, soumise à un effort horizontal F à son sommet (fig. 5).

Dans cette poutre, le moment fléchissant est :

$$M_f(x) = F(L - x)$$

En utilisant la relation de comportement, la courbure est :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{F}{EI}(L - x)$$

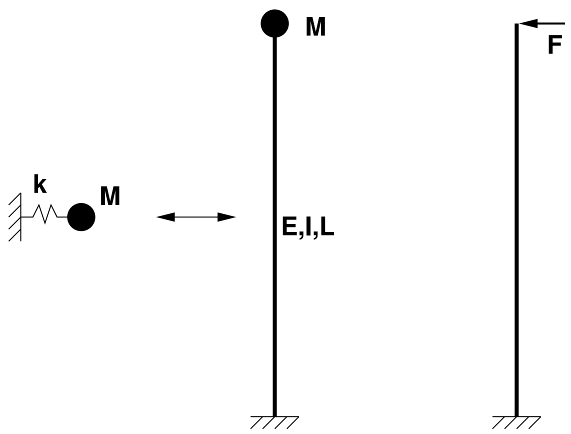


FIGURE 5 – Modèle poutre du château d'eau

Donc la rotation de chaque section s'exprime :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{F}{EI}(Lx - \frac{x^2}{2} + Cste)$$

où la constante doit être nulle pour que la condition de rotation nulle (encastrement) en $x = 0$ soit assurée. Donc le déplacement perpendiculaire à la ligne moyenne est :

$$v(x) = \frac{F}{EI}(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + Cste)$$

où la constante doit être nulle pour que la condition de déplacement nul (encastrement) en $x = 0$ soit assurée.

La flèche — déplacement en $(x = L)$ — est donc :

$$v(L) = \frac{FL^3}{EI}\left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v(L) = \frac{FL^3}{3EI}$$

La raideur équivalente de la tour est donc

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3}$$

2.1.2 Caractéristiques de la tour

La tour est une poutre de section en forme de disque de dimension (rayon extérieur $R = 2m$ et d'épaisseur $e = 20cm$). Le moment quadratique $I = I_z$ de la section est :

$$I = \int_S y^2 dS$$

Pour une section circulaire de rayon R, la valeur du moment quadratique est $\pi R^4/4$. Pour la poutre qui nous intéresse, ce moment est donc :

$$I = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi(R-e)^4}{4}$$

soit :

$$I = 4.32\, m^4$$

2.2 Fréquence fondamentale du système

On propose ici deux approximations de la fréquence fondamentale, sachant qu'une très bonne approximation par la méthode des éléments finis donne une fréquence de $1.206\,Hz$.

2.2.1 Première approximation

En première approximation, on peut considérer que l'énergie cinétique de la tour est négligeable devant celle du réservoir. La masse prise en compte dans le calcul de la fréquence est seulement la masse du réservoir.

$$m_{eq} = M$$

La pulsation fondamentale est alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3EI}{ML^3}} = 8.20 rad.s^{-1}$$

et la fréquence fondamentale approchée du château d'eau est :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1.30Hz$$

2.2.2 Deuxième approximation

Si on veut prendre en compte la masse de la tour, il faut imaginer le mouvement que prend la tour pendant le phénomène de vibration. On imagine que le mouvement est le même que celui de la tour sous l'action d'une force en bout. La vitesse latérale en tout point de la tour est donnée en fonction de la vitesse en bout (x=L) par (on suppose la forme du mode) :

$$\frac{\dot{v}(x)}{\dot{v}(L)} = \frac{v(x)}{v(L)} \quad \text{soit} \quad \dot{v}(x) = \dot{v}(L).(\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3}) = \dot{v}(L).\phi(x)$$

L'équivalence en énergie énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}m'_{eq}\dot{v}(L)^2 = \frac{1}{2}\int_0^L \dot{v}(x)^2\rho S dx + \frac{1}{2}M\dot{v}(L)^2 \frac{1}{2}\int_0^L \phi(x)^2\rho S dx \dot{v}(L)^2 + \frac{1}{2}M\dot{v}(L)^2 =$$

soit pour la masse équivalente :

$$m'_{eq} = \int_0^L \phi(x)^2\rho S dx + M$$

qui après calcul donne :

$$m'_{eq} = \frac{3}{8}\rho SL + M = \frac{3}{8}m_{tour} + M$$

où M_{tour} est la masse de la tour.

La pulsation fondamentale est alors :

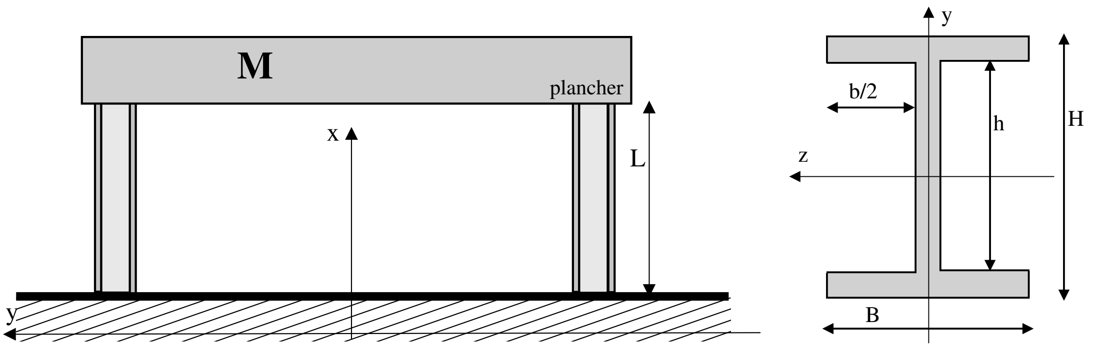
$$\omega' = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m'_{eq}}} = \sqrt{\frac{3EI}{(M + \frac{3}{8}m_{tour})L^3}} = 7.28 rad.s^{-1}$$

et la fréquence fondamentale du château d'eau est :

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = 1.16Hz$$

3 Deuxième exemple : Plancher

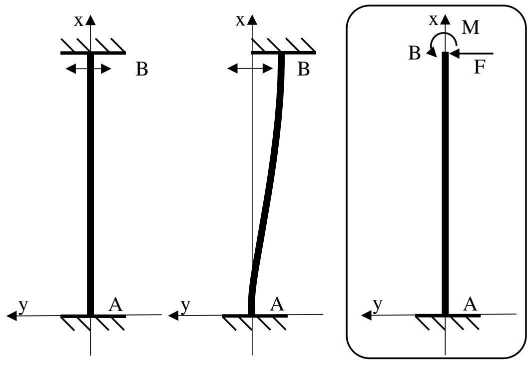
On cherche à estimer la fréquence fondamentale d'un plancher soutenu par deux colonnes métalliques de hauteur $L = 8m$. Pour cela, on réduit la structure à un système à un degré de liberté. Le plancher est supposé indéformable. Les colonnes sont encastrées à leur base dans le sol (indéformable) et en haut dans le plancher.



On suppose que le seul mouvement intéressant pour le problème de vibration est un mouvement de translation du plancher selon y. On cherche à calculer la raideur k d'une colonne pour un tel mouvement. Pour cela, on assimile la colonne à une poutre de Bernoulli. On appelle $E = 2E11MPa$ le module d'Young du matériau métallique et $I = I_z$ le moment d'inertie de la section d'un colonne. La masse du plancher est $M = 20t$.

3.1 Raideur d'une colonne

On suppose que le seul mouvement intéressant pour le problème de vibration est un mouvement de translation du plancher selon y. On cherche à calculer la raideur k d'une colonne pour un tel mouvement. Pour cela, on assimile la colonne à une poutre de Bernoulli. Pour calculer la raideur de la colonne, il faut exprimer la flèche en fonction d'un effort appliqué en haut de la colonne. Ce problème de statique de poutre est hyperstatique, c'est-à-dire que les effort dans la structure ne peuvent pas être calculés directement. Il dépendent des conditions sur le déplacement. Pour résoudre ce problème, appelons $M\vec{z}$ le moment dans la liaison entre la colonne et le plancher. Nous exprimerons le moment fléchissant en tout point en fonction de ce moment. Enfin nous le calculerons en considérant que la présence du plancher impose une rotation nulle en haut de la colonne (voir figure suivante).



Le moment fléchissant s'exprime en tout point d'abscisse x en fonction du moment inconnu M :

$$M_f(x) = M + F(L - x)$$

En utilisant la relation de comportement, la courbure est :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{EI}\left(M + F(L-x)\right)$$

Donc la rotation de chaque section s'exprime en fonction de l'inconnue M :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{EI}\left(Mx + F(Lx - \frac{x^2}{2} + Cste)\right)$$

où la constante doit être nulle pour que la condition de rotation nulle (encastrement) en $x = 0$ soit assurée. Par ailleurs, la rotation doit être nulle en $x = L$, ce qui permet de calculer l'inconnue M :

$$\frac{\partial v}{\partial x}_{|L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ML + F(L^2 - \frac{L^2}{2}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M = -\frac{FL}{2}$$

L'expression de la rotation en tout point devient :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{FL}{2}x + F(Lx - \frac{x^2}{2})\right)$$

et donc le déplacement perpendiculaire à la ligne moyenne est :

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{FL}{2}\frac{x^2}{2} + F(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + Cste\right)$$

où la constante doit être nulle pour que la condition de déplacement nul (encastrement) en $x = 0$ soit assurée.

La flèche — déplacement en $(x = L)$ — est donc :

$$v(L) = \frac{FL^3}{EI}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v(L) = \frac{FL^3}{12EI}$$

La raideur d'une colonne est donc

$$k = \frac{12EI}{L^3}$$

3.2 Caractéristiques des colonnes

Les colonnes sont des poutres métalliques de section en forme de I de dimensions ($H = 30cm$, $h = 26cm$, $B = 20cm$ et $b = 18cm$). Le moment quadratique $I = I_z$ de la section est :

$$I = \int_S y^2 dS$$

Pour une section rectangulaire de hauteur H et de largeur B, la valeur du moment quadratique est $BH^3/12$. Pour la poutre en *I* qui nous intéresse, ce moment est donc :

$$I = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

soit :

$$I = 1.86\,10^{-4}\,m^4$$

3.3 Fréquence fondamentale du système

Il y a deux colonnes, donc la raideur du système est le double de la raideur d'une colonne.

$$k_{eq} = 2k$$

On peut, en première approximation, considérer que la masse des colonnes est négligeable devant la masse du plancher. Par ailleurs, les vitesses maximales seront sans doute observées sur le plancher. La masse prise en compte dans le calcul de la fréquence fondamentale est donc seulement la masse du plancher.

$$m_{eq} = M$$

La pulsation fondamentale est :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{24EI}{ML^3}} = 14.76 rad.s^{-1}$$

La fréquence fondamentale du plancher sur les colonnes est donc :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2.4 Hz$$