

# MECANIQUE – CONCEPTION

Durée : 4 Heures

## Etudes sur une unité d'injection



*Figure 1: Vue partielle de la machine d'injection plastique étudiée*

Le sujet comporte 8 pages de texte, 7 documents et 1 document réponse R1.

### Liste des documents :

Page de garde : vue de la machine d'injection plastique étudiée

Document 1 : Eléments de la presse d'injection

Document 2 : Données numériques

Document 3: Structure de l'unité d'injection

Document 4 : Courbes des moteurs

Document 5 : Eléments à roulements

Document 6 : Formulaire de MMC

Document 7 : Extrémité de la vis

Document réponse R1 : Manchon d'entraînement, calque format A3 à remettre avec la copie.

Le sujet comprend parties, notées respectivement sur 5, 8 et 7 points

# Etudes sur une unité d'injection

## Présentation

Le support de l'étude est une **machine d'injection plastique** à deux unités, cf. Document 1.

Elle est construite autour d'un bâti comprenant le système de fermeture et de maintien du moule, le système d'éjection des pièces, les organes de refroidissement et de génération de puissance hydraulique ainsi que la commande numérique. Le bâti est caractérisé par la force maximale de fermeture du moule, 500 kN pour le modèle étudié, l'encombrement et la masse maximale de ce moule.

A ce bâti modulaire est associé une ou deux **unités d'injection mono-vis**, choisis parmi trois modèles se différenciant essentiellement par le volume maximal de matière pouvant être injecté par cycle.

## Unité d'injection

Les principaux éléments de l'unité d'injection sont :

- la **trémie d'alimentation** en granulé,
- le **cylindre de plastification** constitué d'un **fourreau** chauffé par des colliers et d'une **vis** de malaxage. Cet ensemble se termine par une buse plaquée contre le moule pendant l'injection,
- d'un **support mobile** permettant le positionnement de l'unité par rapport au moule,
- d'un **moteur d'entraînement** de la vis assurant le mouvement de malaxage,
- de **vérins d'injection** contrôlant la position axiale de la vis par rapport à son fourreau.

## Cycle de production

La buse d'injection étant en appui sur le moule qui est fermé, le fourreau étant à la température adéquate, les principales phases d'un cycle de production sont les suivantes :

- 1) **dosage et plastification des composés** : par rapport au fourreau, solidaire du bâti pendant la production, la vis recule en tournant de façon à plastifier le polymère tout en remplissant la cavité de la vis située coté moule. Le dosage de la matière est directement lié à la longueur de recule de la vis,
- 2) ouverture du moule et extraction de la pièce du moule,
- 3) fermeture du moule,
- 4) **injection** du matériau dans le moule, obtenue par translation de la vis dans son fourreau,
- 5) **maintien** d'une pression d'injection, pendant le début de refroidissement, pour assurer un débit de remplissage lors du retrait de la matière

6) **refroidissement** du moule et, simultanément, reprise de la phase 1).

Les principaux paramètres d'injection qui intéressent l'étude sont :

- lors de la phase de dosage : la **contre-pression** et la **vitesse circumférentielle** de la vis,
- lors de la phase d'injection : la **pression d'injection**.

La contre-pression et la pression d'injection correspondent à la pression dans la cavité de la vis.

Des valeurs numériques sont fournies Document 2.

## Structure

La Figure 5, Document 3, représente un schéma de structure de l'unité d'injection. Il définit les ensembles suivants :

*(0) bâti machine*

*(1) support mobile :*

Son déplacement, par rapport au bâti, est contrôlé par les vérins *V1* et *V2*.

Il permet la mise en place de la buse d'injection sur l'orifice d'injection du moule et, pendant la phase d'injection il assure le **maintien d'un effort minimal d'appui** entre la buse et le moule.

Il permet aussi de dégager l'unité d'injection du moule afin de réaliser la purge de l'unité de plastification et la maintenance du système.

*(2) ponton d'injection :*

Ses fonctions principales sont :

- de transmettre les efforts et les déplacements, dus aux vérins *V3* et *V4*, à la **vis (3)**, afin de contrôler l'injection et le dosage du polymère,
- de servir de support au moteur hydraulique *M*.

*(3) vis :*

Les mouvements de la vis par rapport au **fourreau** du cylindre de plastification sont les suivants :

- pendant le dosage : rotation, imposée par le moteur hydraulique *M* et recul. La rotation est couplée au réchauffement induit par les colliers chauffants, ceci permet d'assurer la plastification, l'homogénéisation du polymère et son dosage dans la cavité,
- pendant l'injection : translation axiale de la vis.

Le fourreau du cylindre de plastification est **solidaire du support mobile**.

## Partie 1 : Entraînement de la vis

Dans cette partie, nous nous intéressons à la liaison de la vis avec le ponton d'injection et au moteur d'entraînement.

### 1) Choix du moteur hydraulique

La vis est entraînée par un moteur hydraulique volumétrique orbital. Les diagrammes caractéristiques des moteurs de la gamme envisagée sont représentés Document 4.

- Question 1. Déterminez la puissance hydraulique minimale nécessaire pendant la phase de plastification.
- Question 2. Choisissez, parmi les 4 moteurs qui vous sont proposés, celui qui correspond le mieux aux données du cahier des charges à votre disposition. Indiquer clairement la démarche qui conduit à votre choix.
- Question 3. Pour le point de fonctionnement moyen, quelles sont les caractéristiques hydrauliques (pression et débit) d'alimentation du moteur choisi ?
- Question 4. Déterminez, à partir des valeurs de débit et de pression lues, la puissance consommée par le moteur et son rendement total.

### 2) Liaisons avec l'arbre intermédiaire

La vis est un composant interchangeable démontable rapidement et simplement.

Elle est reliée au moteur hydraulique par un arbre intermédiaire lui-même en liaison avec le ponton d'injection.

Un graphe de liaison de l'unité d'injection est proposé Figure 6, Document 3.

- Question 5. Quel est le degré d'hyperstatisme du modèle associé à ce graphe ?
- Question 6. Définissez le torseur des actions transmissibles, entre la vis (3) et l'arbre intermédiaire ( $A_i$ ), juste nécessaires pour assurer les fonctions principales de l'unité d'injection. Cette liaison correspond-t-elle à une liaison normalisée ?
- Question 7. Avec ce nouveau modèle de liaison entre (3) et ( $A_i$ ), quel est le degré d'hyperstatisme du modèle ?

### 3) Choix d'une butée

Pendant la phase de dosage et d'injection, les efforts axiaux entre l'arbre intermédiaire et le ponton sont transmis par une butée à roulement.

Ces efforts sont définis par la pression dans la cavité de la vis, maximale et moyenne, cf. Document 2.

Question 8. Quels sont les critères dimensionnants pour cette butée ? Ces critères sont en relation avec les modes de sollicitation qui s'exercent.

Question 9. Sachant que la phase de dosage représente, en moyenne, 5% du temps de cycle, estimez le nombre de tours correspondant à la durée de vie de la butée.

Question 10. Quelles sont les capacités de charge minimales, dynamique et statique, permettant d'assurer la durée de vie prévue avec une fiabilité de 99%, pour des éléments roulant de type bille et de type rouleau (voir Document 5).

## Partie 2 : Dimensionnement de la vis

Dans cette partie, on s'intéresse à la vis de malaxage. Durant la phase de dosage-plastification, la vis est soumise à une sollicitation combinée de compression-torsion. Cette sollicitation provient des frottements importants qu'exerce la pâte au contact avec la vis.

On cherche à avoir une idée de la nature des champs de contraintes qui existent dans la vis au cours du fonctionnement. Pour cela, la vis est modélisée par une barre cylindrique de révolution de diamètre  $2R$  et de longueur  $L$ . Les extrémités sont des surfaces planes circulaires de centres  $O$  et  $A$ , on les note respectivement  $\Sigma_O$  et  $\Sigma_A$ . Une section courante de centre  $C$  sera notée  $\Sigma_C$ . La surface latérale est notée  $\Sigma$ . En tout point de la vis on définit la base vectorielle locale  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$  orthonormée, associée au système des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

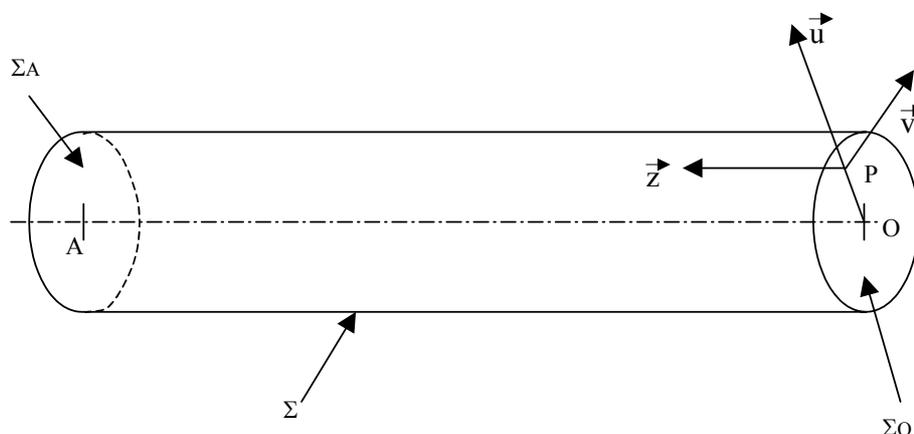


Figure 2 : Définition des éléments géométriques

L'action de la pâte est modélisée par la distribution surfacique d'effort de contact  $\vec{F}(P,t)$  telle que :

- $\forall P \in \Sigma_A, \vec{F}(P,t) = \vec{0}$
- $\forall P \in \Sigma, \vec{F}(P,t) = k \vec{z} + \tau \vec{v}$

$k$  est un scalaire négatif, indépendant de  $P$  et de  $t$ , qui traduit la compression exercée par la pâte sur la vis,

$\tau$  est un scalaire, indépendant de  $P$  et de  $t$ , qui traduit la torsion exercée par la pâte sur la vis. Le rapport entre  $k$  et  $\tau$  dépend de l'angle d'inclinaison du filet de la vis.

Pour l'instant, on ne précise pas la densité  $\vec{F}(P,t)$  imposée pour  $\forall P \in \Sigma_0$ .

En tout point  $M$  de la vis, le tenseur des contraintes recherchées aura, sur  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ , une matrice représentative de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & 0 & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Travail demandé (un formulaire est fourni en Document 6) :

- Question 11. On isole la partie de la vis située entre la section  $\Sigma_0$  et la section  $\Sigma_c$  de cote  $z$ . On demande de donner les éléments de réduction en  $C$  du torseur d'effort  $\mathbf{T}(z)$ , soit  $\vec{F}(z)$  et  $\vec{M}_c(z)$ , qui représente l'action de la partie de la vis comprise entre  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_c$  sur la partie isolée. En déduire les éléments de réduction en  $O$  du torseur d'effort  $\mathbf{T}_0$ , équivalent à la densité surfacique  $\vec{F}(P,t)$  qui n'a pas été précisée sur  $\Sigma_0$ .
- Question 12. Dans la section  $\Sigma_c$ , on définit la distribution de contraintes  $\sigma_{\theta z}(r,z)$  par :  $\sigma_{\theta z}(r,z) = a(z) r$ . Déterminer  $a(z)$  pour que ce champ soit équivalent à  $\vec{M}_c(z)$ .
- Question 13. Dans la section  $\Sigma_c$ , on définit la distribution de contraintes  $\sigma_{zz}(r,z)$  par :  $\sigma_{zz}(r,z) = b z + c$ . Déterminer les constantes  $b$  et  $c$  pour que ce champ soit équivalent à  $\vec{F}(z)$ .
- Question 14. Pour la représentation postulée plus haut à propos du tenseur des contraintes, et pour un problème axisymétrique, on demande d'écrire les relations d'équilibre local (on prendra en compte les résultats établis aux deux questions précédentes). On donnera les deux équations différentielles portant réciproquement sur  $\sigma_{r\theta}$ , équation (1), et  $\sigma_{rz}$ , équation (2). On supposera que la densité d'effort volumique à distance  $\vec{f}(M,t)$  est nulle.

- Question 15. On intégrera (1) et on donnera la distribution  $\sigma_{r\theta}(r, z)$ . La constante d'intégration se calcule grâce à une condition à la limite que l'on donnera pour  $r = R$ .
- Question 16. On intégrera (2) et on déduira la distribution  $\sigma_{rz}(r)$ . La constante d'intégration se calcule en imposant que  $\sigma_{rz}(r)$  reste finie lorsque  $r = 0$ .
- Question 17. Les question précédentes ont permis de déterminer les contraintes, dans l'ordre  $\sigma_{\theta z}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{rz}$ . On vérifiera que les contraintes trouvées satisfont les équations de BELTRAMI et que l'on a bien la solution en contraintes du problème abordé.
- Question 18. On calculera le couple moteur  $\bar{M}_m$  nécessaire à l'opération de malaxage et l'effort  $\bar{F}$  qui s'oppose à la poussée due à la compression axiale exercée sur la vis.
- Question 19. On demande de calculer les composantes de la matrice représentative du tenseur des déformations sur la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ .
- Question 20. En considérant  $\sigma_{\theta z}(r, z)$  lorsque  $r = R$ , on demande de déterminer l'angle de torsion  $\alpha$  qui existe entre les deux extrémités de la vis. Pour cela, on rappelle que l'on est en hypothèse de petites perturbations.
- Question 21. Soit  $\sigma_e$  la limite élastique de l'acier qui constitue la vis, grâce au critère d'élasticité de VON MISES, on calculera la valeur  $R_{\min}$  du rayon  $R$  pour que les points de la section  $\Sigma_o$  reste dans le domaine élastique.

### Partie 3 : Dessin de construction

Dans cette partie, vous devrez concevoir un avant projet du dispositif d'entraînement de la vis par le moteur hydraulique et la liaison de l'arbre intermédiaire avec le coulisseau. Vous vous assurerez que :

- les efforts axiaux d'injection, provenant des vérins, sont transmis à l'aide d'une butée,
- en sens inverse, les efforts de traction peuvent atteindre 2000 N,
- la liaison entre la vis et l'arbre intermédiaire doit être montable et démontable en quelques minutes avec des outils standards,
- une roue libre est présente entre l'arbre intermédiaire et le ponton,
- La face avant du système de fixation entre l'arbre intermédiaire et la vis doit être située dans la zone de 120 mm.

Le Document 7 représente l'extrémité de la vis.

Les éléments roulants sont, de préférence, à choisir parmi ceux proposés Document 5, ceci en tenant compte des réponses aux questions de la partie 1.

Question 22. Réalisez un schéma annoté définissant l'architecture de votre solution et les choix technologiques réalisés.

Question 23. Réalisez le dessin d'avant projet sur le document réponse R1. Vous complétez le document des vues, des éléments de cotation et des définitions des matériaux constitutifs qui vous sembleront nécessaires. Indiquez clairement les références des éléments roulants utilisés.

# DOCUMENT 1 : ELEMENTS DE LA PRESSE D'INJECTION

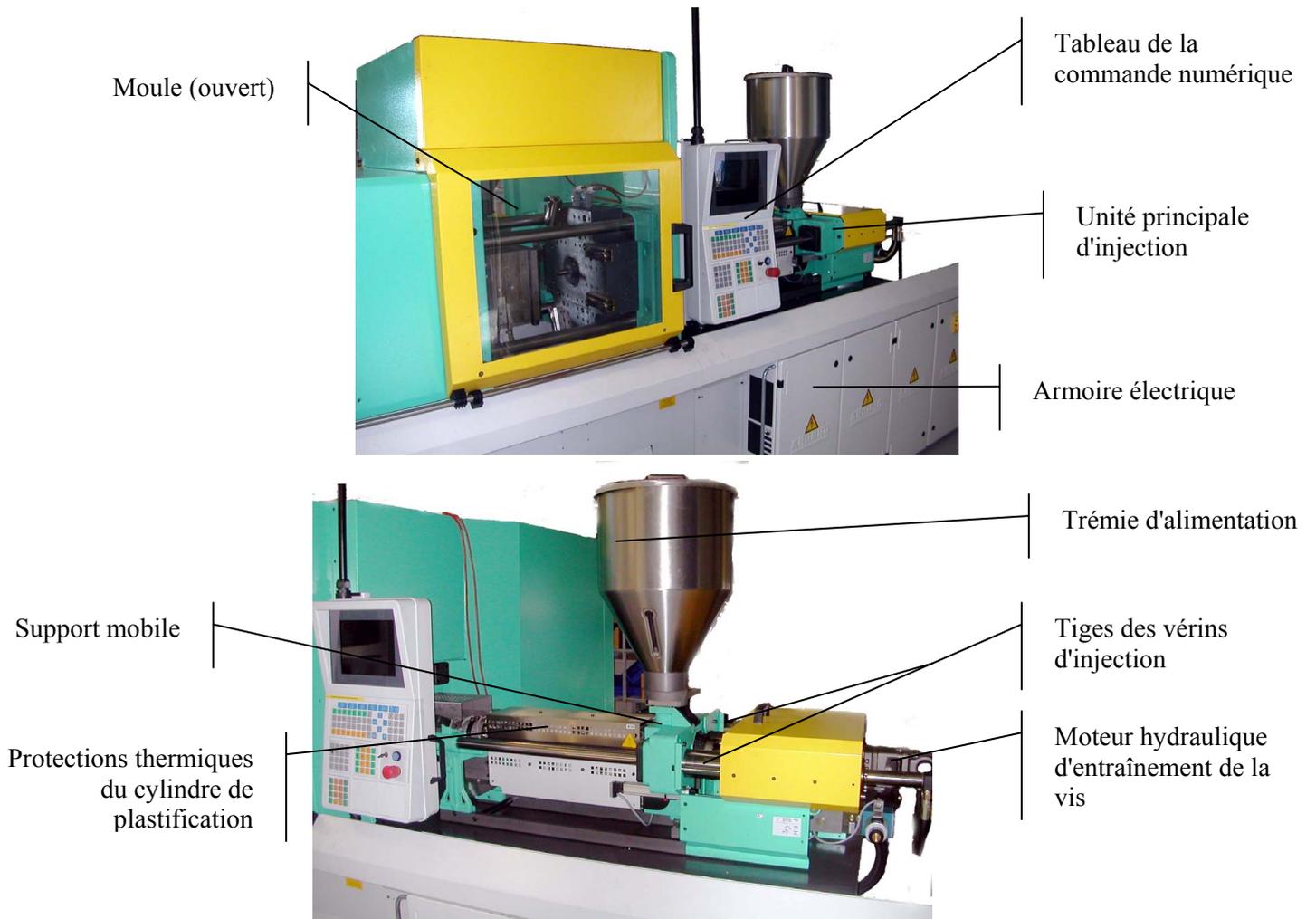


Figure 3 : Machine d'injection plastique - unité principale

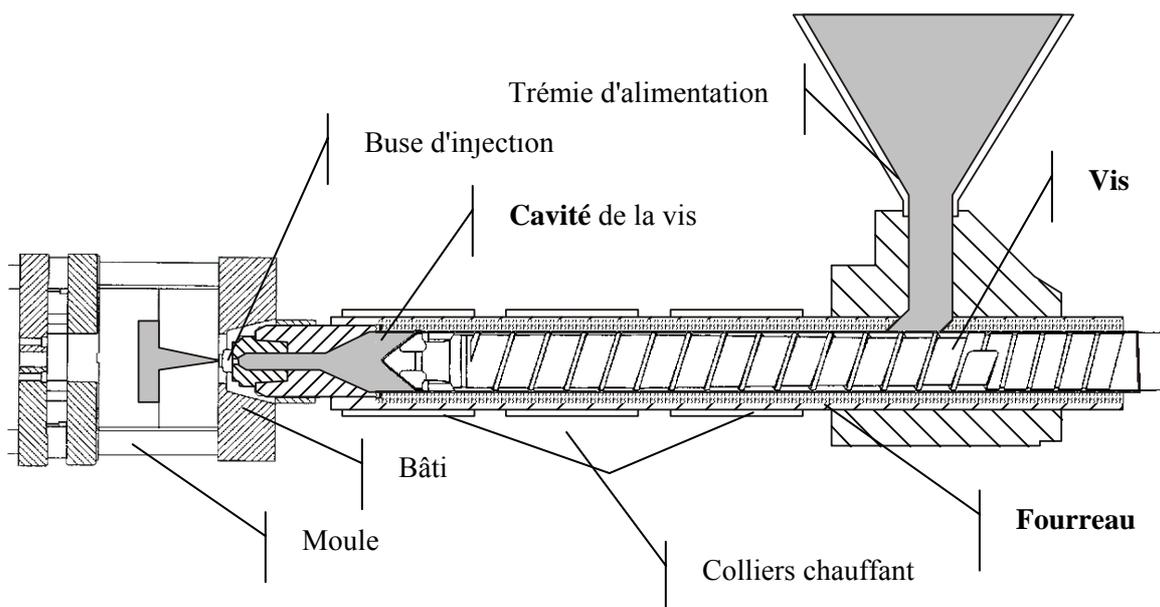


Figure 4 : Schéma de principe du cylindre de plastification

## DOCUMENT 2 : DONNEES NUMERIQUES

### Caractéristique de la vis

Diamètre de la vis : 30mm

### Efforts en phase de dosage

Vitesse circonférentielle de la vis :	valeur maximale	50 m/mn
	valeur moyenne	15 m/mn

Couple d'entraînement de la vis :	valeur maximale	250 Nm
	valeur moyenne	180 Nm

Contre-pression :	valeur maximale	350 bars
	valeur moyenne	150 bars

### Efforts en phase d'injection

Pression d'injection :	valeur maximale	2210 bars
	Valeur moyenne	1200 bars

### Durée de vie

Durée moyenne d'un cycle :	30 secondes
Durée de vie de la machine :	40 000 heures

# DOCUMENT 3: STRUCTURE DE L'UNITE D'INJECTION

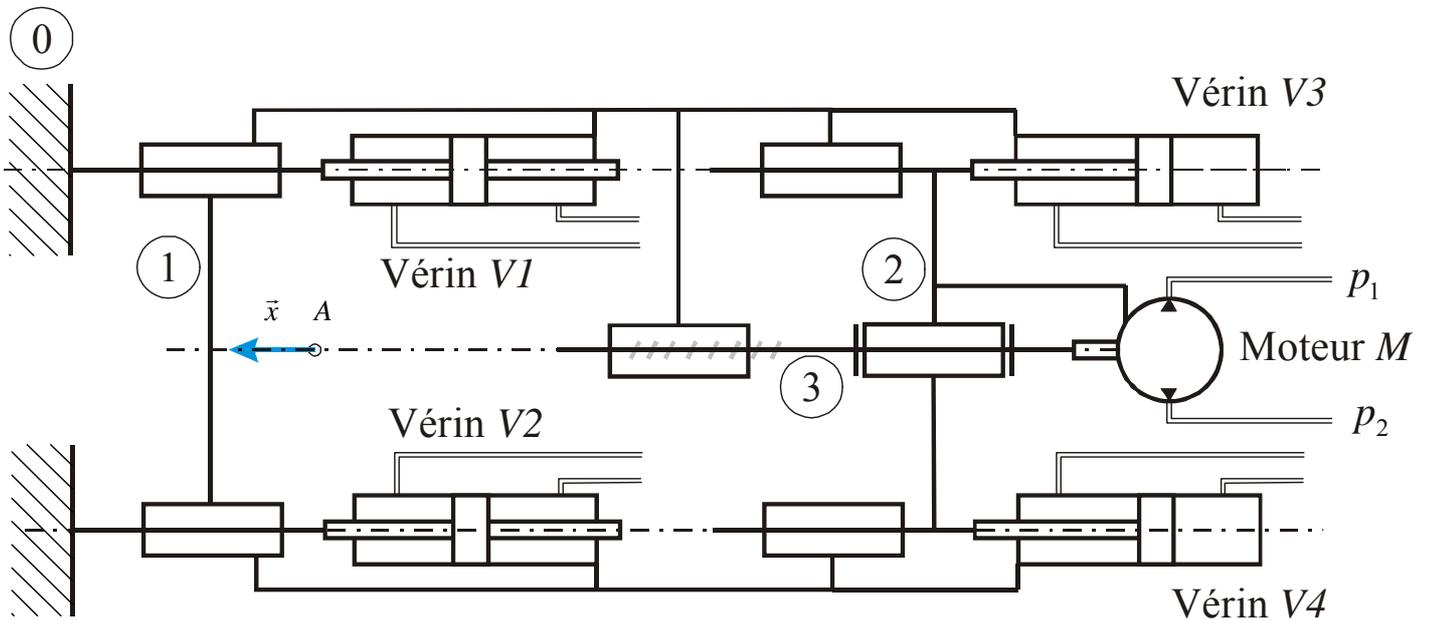


Figure 5 : Schéma d'architecture de l'unité d'injection

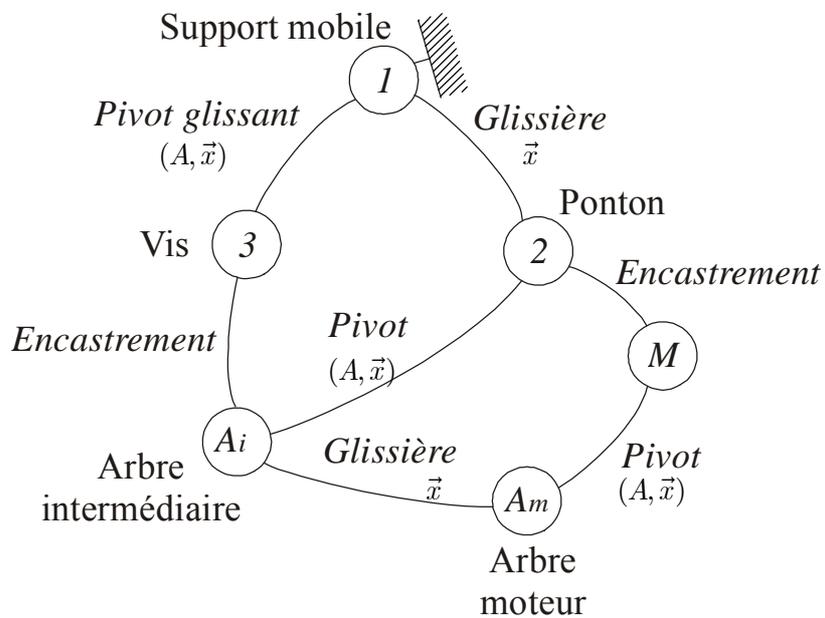
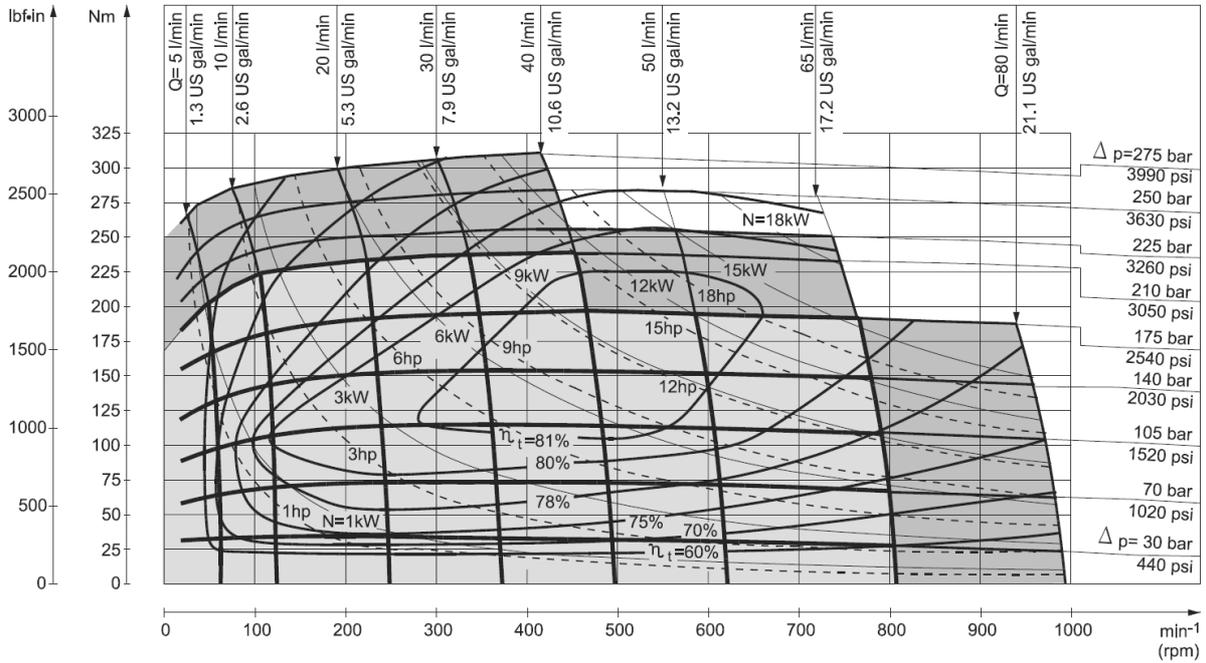


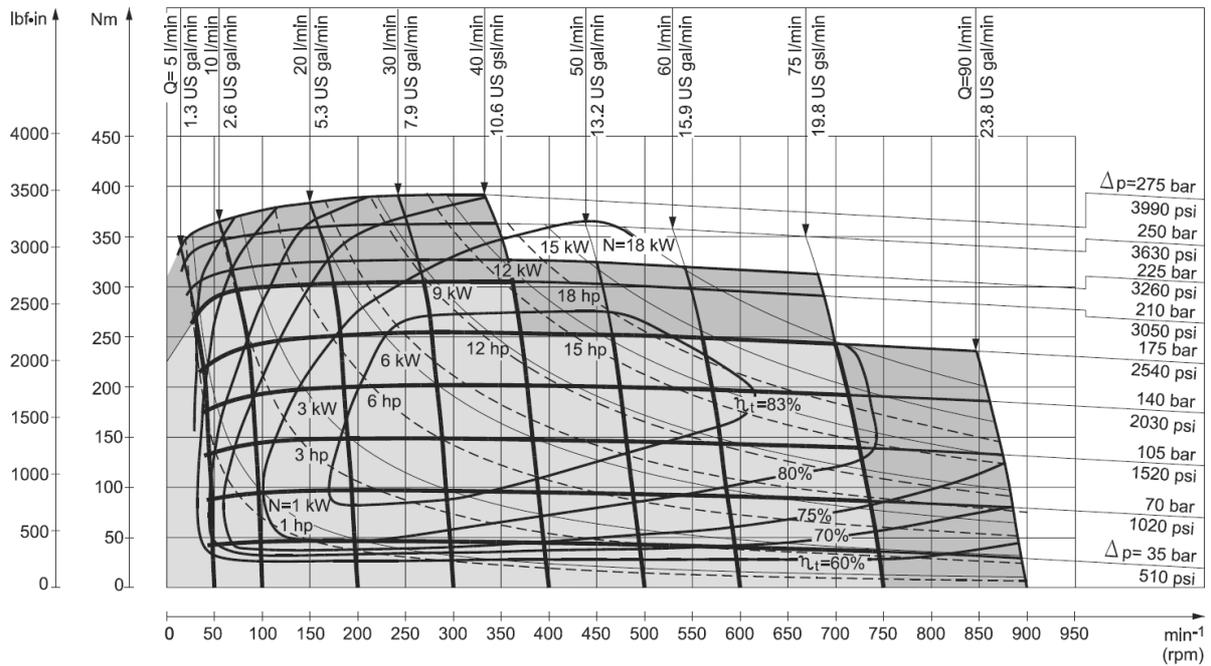
Figure 6 : Un graphe de liaison de l'unité d'injection

# DOCUMENT 4 : COURBES DES MOTEURS

## OMS 80

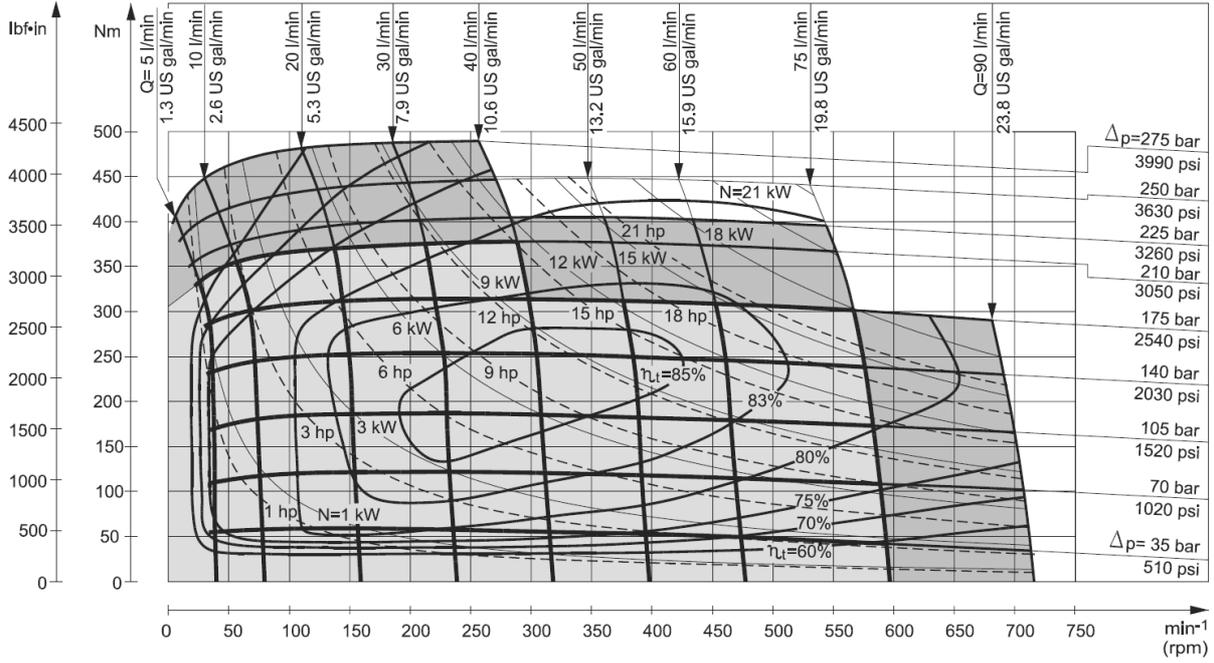


## OMS 100

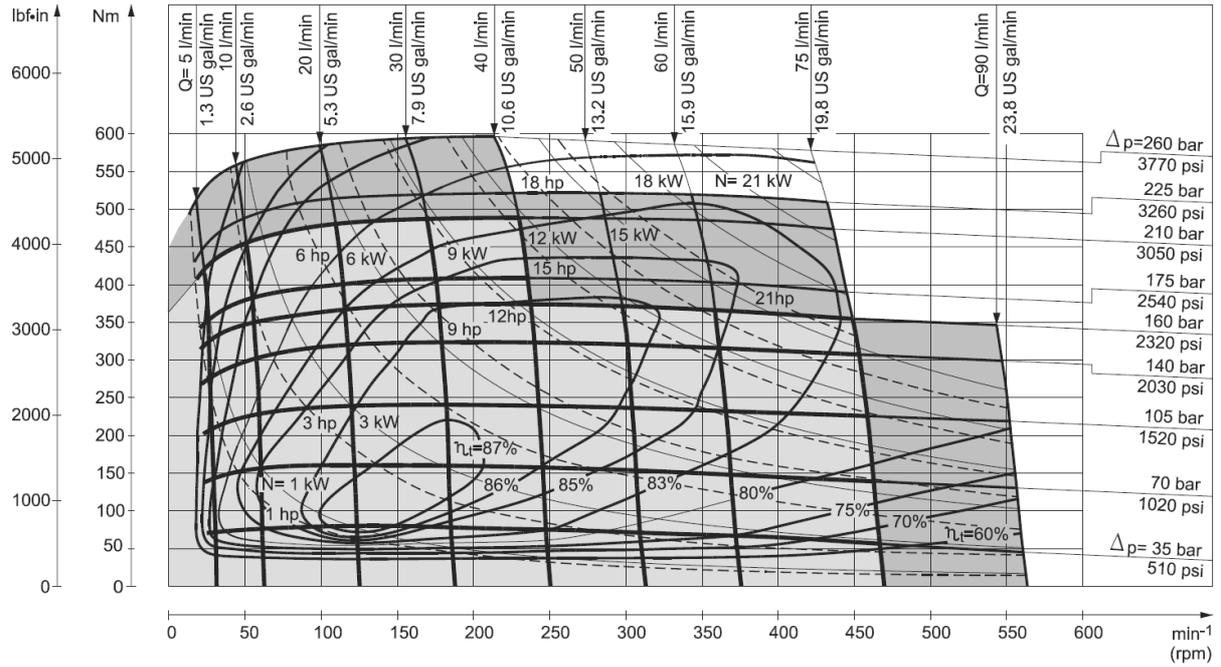


Les zones gris - foncées correspondent à un fonctionnement intermittent : 6 secondes maximum par minute.

### OMS 125



### OMS 160



# DOCUMENT 5 : ELEMENTS A ROULEMENTS

Extraits du catalogue constructeur SKF.

Valeurs de principe pour le coefficient de sécurité statique  $s_0 = C_0/P_0$

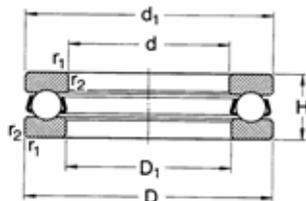
Mode de fonctionnement	Roulements en rotation						Roulements à l'arrêt	
	Exigences de silence de fonctionnement				Elevées		Roulement à billes	Roulement à rouleaux
	faibles		normales		Roulement à billes	Roulement à rouleaux		
	Roulement à billes	Roulement à rouleaux	Roulement à billes	Roulement à rouleaux	Roulement à billes	Roulement à rouleaux	Roulement à billes	Roulement à rouleaux
Régulier sans vibration	0,5	1	1	1,5	2	3	0,4	0,8
Normal	0,5	1	1	1,5	2	3,5	0,5	1
Chocs prononcés 1)	≥1,5	≥2,5	≥1,5	≥3	≥2	≥4	≥1	≥2

Pour les butées à rotule sur rouleaux il est recommandé d'utiliser  $s_0 \geq 4$

1) lorsque l'intensité de la charge n'est pas connue, utiliser des valeurs de  $s_0$  au moins aussi élevées que celles indiquées ci-dessus. Si l'intensité des chocs est connue de façon précise, des valeurs de  $s_0$  plus faibles peuvent être appliquées.

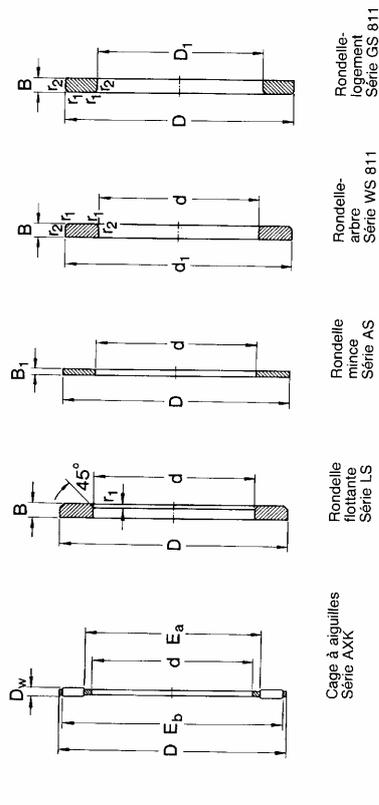
Butées simple effet

Butées à billes :



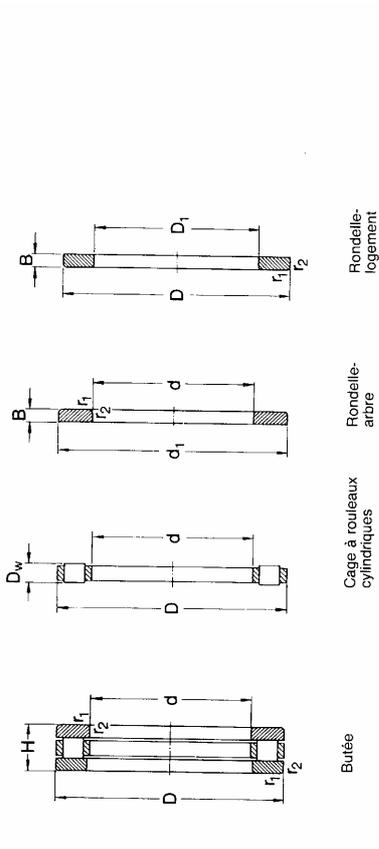
Dimensions d'encombrement			Charges de base stat.		Limite de fatigue $P_u$	Facteur de charge axiale A	Vitesses de base		Masse	Désignation
d	D	H	C	$C_0$			Lubrification graisse	huile		
mm			N		N	-	tr/min	kg	-	
35	52	12	17 400	37 500	1 530	7,3	4 300	5 600	0,080	51107
	62	18	35 100	67 000	2 700	23	3 000	4 000	0,22	51207
	68	24	49 400	88 000	3 550	40	2 400	3 400	0,38	51307
	80	32	87 100	156 000	6 200	130	1 800	2 600	0,76	51407
40	60	13	23 400	50 000	2 040	13	3 800	5 000	0,12	51108
	68	19	46 800	98 000	4 000	49	2 800	3 800	0,28	51208
	78	26	61 800	112 000	4 500	65	2 000	3 000	0,53	51308
	90	36	112 000	204 000	8 300	220	1 700	2 400	1,10	51408
45	65	14	24 200	57 000	2 280	16	3 400	4 500	0,14	51109
	73	20	39 000	80 000	3 200	33	2 600	3 600	0,30	51209
	85	28	76 100	140 000	5 600	100	1 900	2 800	0,66	51309
	100	39	130 000	240 000	9 800	300	1 600	2 200	1,40	51409
50	70	14	25 500	63 000	2 550	20	3 200	4 300	0,16	51110
	78	22	49 400	106 000	4 300	58	2 400	3 400	0,37	51210
	95	31	88 400	173 000	6 950	160	1 800	2 600	0,94	51310
	110	43	159 000	310 000	12 500	500	1 500	2 000	2,00	51410
55	78	16	30 700	78 000	3 100	31	2 800	3 800	0,23	51111
	90	25	61 800	134 000	5 400	93	1 900	2 800	0,59	51211
	105	35	104 000	208 000	8 300	220	1 600	2 200	1,30	51311
	120	48	178 000	360 000	14 300	670	1 300	1 800	2,55	51411
60	85	17	36 400	93 000	3 800	44	2 600	3 600	0,20	51112
	95	26	62 400	140 000	5 600	100	1 900	2 800	0,65	51212
	110	35	101 000	208 000	8 300	220	1 600	2 200	1,35	51312
	130	51	199 000	400 000	16 000	830	1 100	1 600	3,10	51412
65	90	18	37 100	98 000	4 000	49	2 400	3 400	0,33	51113
	100	27	63 700	150 000	6 000	120	1 800	2 600	0,78	51213
	115	36	106 000	220 000	8 800	250	1 500	2 000	1,50	51313
	140	56	216 000	450 000	18 000	1 100	1 000	1 500	4,00	51413
70	95	18	37 700	104 000	4 150	56	2 400	3 400	0,35	51114
	105	27	65 000	160 000	6 400	130	1 800	2 600	0,79	51214
	125	40	135 000	300 000	11 800	470	1 400	1 900	2,00	51314
	150	60	234 000	500 000	19 300	1 300	950	1 400	5,00	51414

Butées à aiguilles :



Dimensions d'encastrement		Charges de base stat.		Limite de fatigue		Vitesse de base		Masse		Designation	
d	D	C <sub>0</sub>	C	P <sub>u</sub>	N	tr/min	graisse	huile	Cage à aiguilles	Cage à aiguilles	
5	15	2	6	14	4 500	9 500	5 000	6 700	0,8		AXK 0515
6	19	2	7	18	6 300	16 000	4 500	6 000	1		AXK 0619
8	21	2	9	20	7 200	20 000	4 300	5 600	2		AXK 0821
10	24	2	12	23	8 500	26 000	3 600	4 800	3		AXK 1024
12	26	2	14	20	9 150	30 000	3 400	4 500	3		AXK 1226
15	28	2	17	27	10 400	37 500	3 200	4 300	4		AXK 1528
17	30	2	19	29	11 000	40 500	3 200	4 300	4		AXK 1730
20	35	2	22	34	12 000	47 500	2 800	3 800	5		AXK 2035
25	42	2	29	41	13 400	60 000	2 200	3 200	7		AXK 2542
30	47	2	34	46	15 000	72 000	2 000	3 000	8		AXK 3047
35	52	2	39	51	16 600	83 000	1 900	2 800	10		AXK 3552
40	60	3	45	58	25 000	114 000	1 700	2 400	16		AXK 4060
45	65	3	50	63	27 000	127 000	1 600	2 200	18		AXK 4565
50	70	3	55	68	28 500	143 000	1 600	2 200	20		AXK 5070
55	78	3	60	76	34 500	186 000	1 400	1 900	28		AXK 5578
60	85	3	65	83	37 500	232 000	1 300	1 800	33		AXK 6085
65	90	3	70	88	39 000	255 000	1 200	1 700	35		AXK 6590
70	95	4	74	93	49 000	255 000	1 200	1 700	60		AXK 7095
75	100	4	79	98	50 000	265 000	1 100	1 600	61		AXK 75100
80	105	4	84	103	51 000	280 000	1 000	1 500	63		AXK 80105
85	110	4	89	108	52 000	290 000	1 000	1 500	67		AXK 85110

Butées à rouleaux :



Dimensions d'encastrement		Charges de base stat.		Limite de fatigue		Facteur de charge axiale		Vitesse de base		Masse		Designation	
d	D	C <sub>0</sub>	C	P <sub>u</sub>	N	A	A	graisse	huile	kg	Butée	Butée	
15	28	9	11 200	2 450	2 450	0,058	0,058	3 200	4 300	0,024			81102
17	30	9	12 200	2 850	2 850	0,079	0,079	3 200	4 300	0,027			81103
20	35	10	18 600	4 650	4 650	0,18	0,18	2 800	3 800	0,037			81104
25	42	11	25 000	6 800	6 800	0,39	0,39	2 200	3 200	0,053			81105
30	47	11	27 000	7 650	7 650	0,49	0,49	2 000	3 000	0,057			81106
35	52	16	50 000	13 400	13 400	1,4	1,4	1 700	2 400	0,12			81206
35	52	12	29 000	9 150	9 150	0,69	0,69	1 900	2 800	0,073			81107
40	60	13	42 500	13 700	13 700	1,5	1,5	1 700	2 400	0,11			81108
45	65	14	40 500	13 200	13 200	1,4	1,4	1 600	2 200	0,13			81208
45	65	14	86 500	270 000	28 000	5,8	5,8	1 300	1 800	0,30			81209
50	70	14	47 500	16 600	16 600	2,2	2,2	1 600	2 200	0,14			81110
55	78	16	69 500	285 000	31 000	7,2	7,2	1 200	1 700	0,36			81210
55	78	16	122 000	390 000	40 000	12	12	950	1 400	0,57			81211
60	85	17	80 000	300 000	30 500	7,2	7,2	1 300	1 800	0,27			81112
65	90	18	140 000	490 000	50 000	19	19	900	1 300	0,72			81212
65	90	18	83 000	320 000	32 500	8,2	8,2	1 200	1 700	0,31			81113
70	95	18	86 500	345 000	34 500	9,5	9,5	1 200	1 700	0,33			81114
75	100	19	146 000	530 000	55 000	22	22	900	1 300	0,77			81214
75	100	19	75 000	290 000	28 000	6,7	6,7	1 100	1 600	0,38			81115
80	105	19	160 000	610 000	63 000	30	30	850	1 200	0,90			81216



## DOCUMENT 6 : FORMULAIRE DE MMC

Equations d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$$

Equations de BELTRAMI

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\bar{\nabla}(\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}])] + \frac{1}{1-\nu} (\text{div } \vec{f}) \mathbf{1} + \nabla \vec{f} + \nabla^T \vec{f} = \mathbf{0}$$

Sur la base tensorielle associée à la base locale, les composantes de la matrice symétrique qui représente  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  sont :

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{rr} = \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial z \partial z} - \frac{1}{r^2} (2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$$

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial z \partial z} + \frac{1}{r^2} (2 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$$

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{zz} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z \partial z}$$

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{r\theta} = (\Delta \boldsymbol{\sigma})_{\theta r} = \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial z \partial z} + \frac{2}{r^2} (\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\sigma_{r\theta})$$

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{rz} = (\Delta \boldsymbol{\sigma})_{zr} = \frac{\partial^2 \sigma_{rz}}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rz}}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{rz}}{\partial z \partial z} - \frac{1}{r^2} (2 \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz})$$

$$(\Delta \boldsymbol{\sigma})_{\theta z} = (\Delta \boldsymbol{\sigma})_{z\theta} = \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}}{\partial r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}}{\partial \theta \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}}{\partial z \partial z} + \frac{1}{r^2} (2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta z})$$

Sur la base locale, les composantes de  $\bar{\nabla}(\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}])$  s'écrivent :

$$\left( \bar{\nabla}(\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}]) \right)_r = \frac{\partial}{\partial r} (\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}])$$

$$\left( \bar{\nabla}(\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}]) \right)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}])$$

$$\left( \bar{\nabla}(\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}]) \right)_z = \frac{\partial}{\partial z} (\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}])$$

Si  $\vec{u}$  est un champ vectoriel, la matrice qui représente  $\nabla \vec{u}$ , sur la base tensorielle associée à la base locale est :

$$\nabla \vec{u} \xrightarrow{\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}} \begin{bmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{r}(u_{r,\theta} - u_\theta) & u_{r,z} \\ u_{\theta,r} & \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} - u_r) & u_{\theta,z} \\ u_{z,r} & \frac{1}{r}u_{z,\theta} & u_{z,z} \end{bmatrix}$$

Equations de NAVIER dans le cas d'un champ de déplacements  $\vec{u}$  irrotationnel:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} (\text{div } \vec{u}) + f_r = 0$$

$$\frac{1}{r}(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{div } \vec{u}) + f_\theta = 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \vec{u}) + f_z = 0$$

# DOCUMENT 7 : EXTREMEITE DE LA VIS

