Utilisation du Théorème de l'Energie Complémentaire

On considère le problème de traction pure suivant. Le domaine étudié Ω est un parallélépipède rectangle. les normales à ses faces sont alignées avec les vecteurs de la base orthonormée directe ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$). La surface latérale, notée S_{lat}, est le regroupement des deux faces normales à $\underline{e}_2$ et des deux normales à $\underline{e}_3$. Elle est libre d'effort. La face S_+, de normale sortante $\underline{e}_1$ est soumise à un déplacement normal donné u_d et libre d'efforts tangentiels. La face S_-, de normale sortante $-\underline{e}_1$ est soumise à un déplacement normal nul et libre d'effort tangentiel. Le matériau est élastique linéaire de paramètres E et ν. On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et les effets dynamiques sont négligés. On appelle L la longueur dans la direction $\underline{e}_1$ et S la surface des sections perpendiculaires.

1. Poser le problème d'élasticité. A-t'il une solution unique ?
2. Définir les espaces d'admissibilité cinématique et statique.
3. On fait l'hypothèse d'un état de contraite uniaxial uniforme dans la direction $\underline{e}_1$. Proposer une forme de champs de contrainte statiquement admissible de ce type.
4. Construire l'énergie complémentaire de tels champs.
5. Par application du théorème de l'énergie complémentaire, construire le meilleur de ces champs.
6. En déduire le champ de déplacement en tout point $\underline{u}(M)$ associé. Est-il cinématiquement admissible. Conclure sur la qualité de la solution obtenue.

Eléments de correction

1. Problème

$$\underline{u}.\underline{e}_1 = u_d,\ \forall M \in S_+ \quad ; \quad \underline{u}.\underline{e}_1 = 0,\ \forall M \in S_-$$

$$\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega$$

$$\underline{\underline{\sigma}}\pm\underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}}\pm\underline{e}_3 = 0,\ \forall M \in S_{lat} \quad ; \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0,\ \forall M \in S_+ \quad ; \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0,\ \forall M \in S_-$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{1}}, \quad \forall M \in \Omega \qquad ; \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{u} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}^T\,\underline{u})$$

Ce problème à une solution unique en contrainte et en déformation. La solution en déplacement est définie à un mouvement de solide rigide près défini par trois paramètres : translations dans les directions $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ et rotation autour de $\underline{e}_1$.

2. Espaces d'amissibilité :

$$\mathcal{U}_{ad} = \big\{\underline{u},\ \text{reg.}/\underline{u}.\underline{e}_1 = u_d,\ \forall M \in S_+,\\ \underline{u}.\underline{e}_1 = 0,\ \forall M \in S_-\big\}$$

$$\Sigma_{ad} = \Big\{ \underline{\underline{\sigma}}, \text{ sym.}/ \ \underline{\mathrm{div}}\, \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad \forall M \in \Omega,$$
$$\underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_2 = \underline{\underline{\sigma}} \pm \underline{e}_3 = 0, \ \forall M \in S_{lat},$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \ \forall M \in S_+,$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \ \forall M \in S_- \Big\}$$

3. Le champ de contrainte suivant est statiquement admissible et correspond à un état local de traction dans la direction $\underline{e}_1$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} \qquad \text{avec } \sigma \text{ scalaire constant inconnu}$$

4. Energie complémentaire d'un tel champ :

$$E_c \sigma = \frac{1}{2} ELS\sigma^2 - u_d S \sigma$$

5. La minimisation de l'énergie complémentaire donne :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{u_d L}{E}$$

6. Le champ de déformation associé est :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{u_d}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu u_d}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu u_d}{L} \end{pmatrix}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$

et par intégration :

$$\underline{u}(M) = \frac{u_d}{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où λ_1, λ_1, λ_1, p, q, et r sont les paramètres du mouvement de solide rigide. La satisfaction des conditions aux limites en déplacement en $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ impose : $\lambda_1 = p = q = 0$ soit :

$$\underline{u}(M) = \frac{u_d}{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le couple $(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}})$ obtenu est donc admissible et vérifie la relation de comportement. Il s'agit donc de la solution exacte du problème.