Bases de la MMC

Sans doncuments ni calculatrice - Durée : 1h

Exercice 1 *Cinématique des Milieux Continus*

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_3\vec{e}_3)$ le référentiel cartésien orthonormé d'étude. On s'intéresse au mouvement d'un milieu donné par le champ eulérien des vitesses $\vec{V}(t, M)$, où M est le point courant de coordonnées (X_1, X_2, X_3) :

$$\vec{V}(t, M) = aX_1^2 X_2 \vec{e}_2$$

où a est une constante positive donnée.

1. Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$.
2. Donner une représentation Lagrangienne de ce mouvement. On appelera (X_{10}, X_{20}, X_{30}) les coordonnées du point M_0 correspondant au point M dans la configuration de référence.
3. Calculer l'opérateur gradient $\underline{\underline{F}}$ et l'opérateur des déformations de Green-Lagrande $\underline{\underline{E}}$.

Exercice 2 *Elasticité*

On considère un tube cylindrique creux d'axe (O,$\vec{e}_z$), de longueur L, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e. Dans un repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on se donne le champ de déplacement $\vec{u}(r, \theta, z) = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta + u_z\vec{e}_z$ pour les points de coordonnées (r, θ, z) avec :

$$u_r = -\alpha((1+\nu)\frac{R_i^2}{r} + (1-2\nu)r) \quad ; \quad u_\theta = 0 \quad ; \quad u_z = -\alpha(1-2\nu)z + d \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{p}{E}\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

où E est le module d'Young du matériau, ν le coefficient de Poisson, p un scalaire donné et d une constante indéterminée.

1. Exprimer le tenseur linéarisé des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$ associé dans le référentiel cylindrique.
2. En déduire l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, en fonction de R_i, R_e et p.
3. En déduire la valeur du vecteur contrainte sur le bord du tube, en fonction de R_i, R_e et p.

Exercice 3 *Compatibilité des déformations*

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, on condidère le champ de déformation linéarisé pour les points de coordonnées (x_1, x_2, x_3) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \alpha x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha x_1^2 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}$$

1. Calculer le champ de déplacement associé à ce champ de déformation si il existe.

Formulaire

$$\underline{\underline{\text{grad}}}\,\underline{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Schéma d'intégration du champ de déformation

$\varepsilon_{11} =$	....
$\varepsilon_{22} =$	....
$\varepsilon_{33} =$	....
$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} =$	....
$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} =$	....
$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} =$	....

1. Calcul de $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$

$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} =$	....
$\omega_{12,2} = \varepsilon_{21,2} - \varepsilon_{22,1} =$	....
$\omega_{12,3} = \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1} =$	....

$\omega_{23,1} = \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2} =$	....
$\omega_{23,2} = \varepsilon_{22,3} - \varepsilon_{32,2} =$	....
$\omega_{23,3} = \varepsilon_{32,3} - \varepsilon_{33,2} =$	....

$\omega_{31,1} = \varepsilon_{13,1} - \varepsilon_{11,3} =$	....
$\omega_{31,2} = \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3} =$	....
$\omega_{31,3} = \varepsilon_{33,1} - \varepsilon_{13,3} =$	....

2. Calcul de ω_{ij}

$\omega_{12} =$	$-r+$ ....
$\omega_{23} =$	$-p+$ ....
$\omega_{31} =$	$-q+$ ....

3. Calcul de $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$

$u_{1,1} = \varepsilon_{11} =$	....
$u_{1,2} = \varepsilon_{12} + \omega_{12} =$	$-r+$ ....
$u_{1,3} = \varepsilon_{13} - \omega_{31} =$	$+q+$ ....

$u_{2,1} = \varepsilon_{21} - \omega_{12} =$	$+r+$ ....
$u_{2,2} = \varepsilon_{22} =$	....
$u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23} =$	$-p+$ ....

$u_{3,1} = \varepsilon_{31} + \omega_{31} =$	$-q+$ ....
$u_{3,2} = \varepsilon_{32} - \omega_{23} =$	$+p+$ ....
$u_{3,3} = \varepsilon_{33} =$	....

4. Calcul de u_i

$u_1 =$	$\lambda_1 - rx_2 + qx_3 +$ ....
$u_2 =$	$\lambda_2 - px_3 + rx_1 +$ ....
$u_3 =$	$\lambda_3 - qx_1 + px_2 +$ ....

Eléments de Corrections : Exercice 1

1. Tenseur des taux de déformation :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & aX_1X_2 & 0 \\ aX_1X_2 & aX_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}$$

2. Expression langragienne :

$$\begin{cases} X_1(t,M_0) &= X_{10} \\ X_2(t,M_0) &= X_{20}e^{aX_{10}^2 t} \\ X_3(t,M_0) &= X_{30} \end{cases}$$

3. Gradient :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2atX_{10}X_{20}e^{aX_{10}^2 t} & e^{aX_{10}^2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}$$

Green Lagrange :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4a^2t^2X_{10}^2X_{20}^2e^{2aX_{10}^2 t} & 2atX_{10}X_{20}e^{2aX_{10}^2 t} & 0 \\ 2atX_{10}X_{20}e^{2aX_{10}^2 t} & e^{2aX_{10}^2 t}-1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)}$$

Eléments de Corrections : Exercice 2

1. Déformations :

$$\varepsilon_{rr} = -\alpha(-(1+\nu)\frac{R_i^2}{r^2} + (1-2\nu)) \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\alpha((1+\nu)\frac{R_i^2}{r} + (1-2\nu)) \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = -\alpha(1-2\nu)$$

2. Contraintes

$$\sigma_{rr} = -\frac{R_e^2}{R_e^2-R_i^2}(1-\frac{R_i^2}{r^2})p \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{R_e^2}{R_e^2-R_i^2}(1+\frac{R_i^2}{r^2})p \quad ; \quad \sigma_{zz} = -\frac{R_e^2}{R_e^2-R_i^2}p$$

3. Vecteur contrainte :

Surface intérieure $(r = R_i) : \vec{T} = 0$; Surface extérieure $(r = R_e) : \vec{T} = -p\vec{e}_r$

Extrémités : $\vec{T} = -\frac{R_e^2}{R_e^2-R_i^2}p(\pm\vec{e}_z)$

Eléments de Corrections : Exercice 3

1. L'intégration du champs de déformation donne :

$$\omega_{12} = 2ax_1x_2 - r \qquad ; \qquad \omega_{23} = -p$$

Par contre ω_{31} n'est pas calculable. Il n'y a donc pas de champ de déplacement associé à ce champ de déformation.