Bases de la MMC

Exercice 1 *Cinématique des Milieux Continus*

Soit $(O, \vec{X}_1, \vec{X}_3 \vec{X}_3)$ le référentiel cartésien orthonormé d'étude. On s'intéresse au mouvement d'un milieu donné par le champ eulérien des vitesses $\vec{V}(t, M)$, où M est le point courant de coordonnées (X_1, X_2, X_3) :

$$\vec{V}(t, M) = aX_1^2 X_2 \vec{X}_2 + bX_1^2 X_3 \vec{X}_3$$

où a et b sont des constantes positives données.

1. Calculer le tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$.
2. Donner une représentation Lagrangienne de ce mouvement. On appelera (X_{10}, X_{20}, X_{30}) les coordonnées du point M^0 correspondant au point M dans la configuration de référence.
3. Calculer l'opérateur gradient $\underline{\underline{F}}$ et l'opérateur des déformations de Green-Lagrande $\underline{\underline{E}}$.

Eléments de Corrections : Exercice 1

1. Tenseur des taux de déformation :

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & aX_1X_2 & bX_1X_3 \\ aX_1X_2 & aX_1^2 & 0 \\ bX_1X_3 & 0 & bX_1^2 \end{pmatrix}$$

2. Expression langragienne :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_1(t, M_0) & = & X_{10} \\ X_2(t, M_0) & = & X_{20} e^{aX_{10}^2 t} \\ X_3(t, M_0) & = & X_{30} e^{bX_{10}^2 t} \end{array} \right.$$

3. Gradient :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2atX_{10}X_{20}e^{aX_{10}^2 t} & e^{aX_{10}^2 t} & 0 \\ 2btX_{10}X_{30}e^{bX_{10}^2 t} & 0 & e^{bX_{10}^2 t} \end{pmatrix}$$

Green Lagrange :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2atX_{10}X_{20}e^{aX_{10}^2 t} & 2btX_{10}X_{30}e^{bX_{10}^2 t} \\ 2atX_{10}X_{20}e^{aX_{10}^2 t} & (4a^2t^2X_{10}^2X_{20}^2 - 1)e^{2aX_{10}^2 t} - 1 & 4abt^2X_{10}^2X_{20}X_{30}e^{(a+b)X_{10}^2 t} \\ 2btX_{10}X_{30}e^{bX_{10}^2 t} & 4abt^2X_{10}^2X_{20}X_{30}e^{(a+b)X_{10}^2 t} & (4b^2t^2X_{10}^2X_{30}^2 - 1)e^{2bX_{10}^2 t} - 1 \end{pmatrix}$$