

6 CHAPITRE 6 - APPLICATION 1 - MECANIQUE DES SOLIDES ELASTIQUES

6.1 Formulation d'un problème d'élasticité

On considère un domaine Ω occupé par un matériau solide dont le comportement élastique linéaire. Le domaine est soumis :

- à une densité de forces volumiques connue \vec{f}_v sur l'ensemble du domaine,
- à une densité surfacique de forces \vec{T}_d connue sur une partie $\partial\Omega_T$ du contour $\partial\Omega$,

Lorsque les effets d'inertie sont négligés, la résolution du problème d'élasticité consiste à chercher, en tout point M du domaine,

- le champ de déplacement $\vec{u}(M)$ par rapport à la configuration non chargée, sachant ces déplacements sont imposés à une valeur \vec{u}_d sur la partie complémentaire du bord $\partial\Omega_u$,
- le champ de contraintes $\sigma(M)$ généré par ce chargement.

On se place dans l'hypothèse où l'amplitude des déplacements est faible. La déformation est donc représentée par le tenseur des déformations linéarisés $\varepsilon(\vec{u})$.

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u}) \quad (320)$$

On considère que, par le biais de couplages faibles, une partie ε_d de cette déformation est donnée, par exemple une dilatation thermique.

6.1.1 Formulation locale

Les équations à résoudre ce problème et ainsi déterminer complètement \vec{u} et σ sont :

- les équations d'équilibre :
 - Equilibre en résultante en volume :

$$\overline{\text{div}} \sigma + \vec{f}_v = 0, \quad \forall M \in \Omega \quad (321)$$

- Equilibre en moment en volume : σ est symétrique
- Equilibre au bord :

$$\sigma \vec{n} = \vec{T}_d, \quad \forall M \in \partial\Omega_T \quad (322)$$

qui traduisent l'admissibilité statique du champ des contraintes. On dit que σ est *Stati-quement Admissible (SA)*.

- les équations de la cinématique :
 - Déplacements imposés sur une partie du bord :

$$\vec{u} = \vec{u}_d, \quad \forall M \in \partial\Omega_u \quad (323)$$

- Utilisation de la déformation linéarisée :

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u}) \quad \forall M \in \Omega \quad (324)$$

qui traduisent l'admissibilité cinématique du champ des déplacements. On dit que \vec{u} est *Cinématiquement Admissible (CA)*.

– la relation de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K}(\varepsilon - \varepsilon_d), \quad \forall M \in \Omega \quad (325)$$

où \mathbf{K} est l'opérateur de Hooke traduisant la comportement élastique et linéaire de ce matériau.

6.1.2 Formulation condensée

Le problème à résoudre peut donc se résumer à : trouver en tout point du domaine un champ de déplacements \vec{u} cinématiquement admissible et un champ de contraintes σ statiquement admissible qui soient reliés par la relation de comportement.

6.1.3 Opérateur de Hooke

L'opérateur de Hooke caractérise le comportement élastique et linéaire du matériau. En élasticité isotrope, il correspond à :

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon \quad (326)$$

Il permet de décrire l'énergie de déformation locale en terme de déformations :

$$E_d(\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathbf{K}\varepsilon : \varepsilon$$

Les propriétés de cet opérateur sont les suivantes :

– Linéarité :

$$\mathbf{K}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \mathbf{K}\varepsilon_1 + \mathbf{K}\varepsilon_2 \quad ; \quad \mathbf{K}(\alpha\varepsilon) = \alpha\mathbf{K}\varepsilon \quad (327)$$

– Symétrie :

$$\mathbf{K}\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \mathbf{K}\varepsilon_2 : \varepsilon_1 \quad (328)$$

– Positivité :

$$\mathbf{K}\varepsilon : \varepsilon \geq 0 \quad (329)$$

– Définition :

$$\mathbf{K}\varepsilon : \varepsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 0 \quad (330)$$

L'opérateur est donc un *Opérateur Linéaire, Symétrique, Défini et Positif*. L'opérateur inverse \mathbf{K}^{-1} correspond en isotrope à :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(\text{tr } \sigma)\mathbb{I}$$

Il permet de définir l'énergie de déformation en termes de contraintes :

$$E_d(\sigma) = \frac{1}{2}\mathbf{K}^{-1}\sigma : \sigma \quad (331)$$

Il présente des mêmes propriétés que l'opérateur de Hooke.

6.1.4 Difficultés de résolution du problème d'élasticité

Le problème posé ci-dessus consiste donc à trouver neuf valeurs scalaires en chaque point du domaine : trois composantes du champ de déplacement et six composantes du tenseur symétrique des contraintes. Le nombre de points dans le domaine étant infini, il s'agit d'un problème de *dimension infinie*.

Dans quelques rares cas où la géométrie du domaine Ω est simple et où le chargement est décrit analytiquement, il est possible de déterminer une solution analytique. Dans la plupart des cas, le solution est non analytique et on en cherchera une approximation.

6.2 Résolution d'un problème d'élasticité

Même lorsque qu'une solution analytique existe, il n'est en général par possible de la déterminer facilement. On procède par un algorithme de type essai/erreur dans lequel on commence par faire une hypothèse sur la forme de la solution. En suivant ce procédé, il existe deux approches : dans la première, on commence par faire une hypothèse sur la forme du déplacement et dans la seconde sur le champ des contraintes.

6.2.1 Approche en déplacement

Approche directe

1. Poser le problème
2. Choix d'une forme de champ de déplacement \vec{u} cinématiquement admissible par observation des propriétés du problème,
3. Calcul du champ de déformation ε ,
4. Calcul du champ des contraintes σ , après expression de la part de la déformation donnée ε_d ,
5. Vérification de l'admissibilité statique de σ . Si ce champ n'est pas admissible on retourne à l'étape 2.

Exemple : sphère sous pression On considère une sphère pleine de rayon R soumise uniquement à une pression p sur sa surface extérieure. Elle est constituée d'un matériau élastique caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ .

1. Le problème est : trouver (\vec{u}, σ) tels que
 - Admissibilité Statique :
 - $\overrightarrow{\text{div}} \sigma = 0, \forall M \in \Omega$
 - $\sigma \vec{e}_r = -p \vec{e}_r, \forall M \in (r = R)$
 - Admissibilité Cinématique :
 - Pas de conditions aux limites
 - $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u})$
 - Comportement :
 - $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbb{I}$

2. Choix d'une forme de champ de déplacement : compte-tenu de la symétrie sphérique du problème on se place dans un système de coordonnées sphériques et on fait l'hypothèse que le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{u}(r, \theta, \phi) = u_r(r)\vec{e}_r$$

3. Calcul du champ de déformation : $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u})$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\theta\phi} = 0$$

4. Calcul du champ de contraintes : $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbb{I}$

$$\sigma_{rr} = (2\mu + \lambda)\frac{du_r}{dr} + 2\lambda\frac{u_r}{r} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \lambda\frac{du_r}{dr} + 2(\lambda + \mu)\frac{u_r}{r} \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0$$

5. Admissibilité statique de σ :

– Equilibre en volume : $\overrightarrow{\text{div}} \sigma = 0$

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma = \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \right) \vec{e}_r = (2\mu + \lambda) \left[\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - 2\frac{u_r}{r^2} \right] \vec{e}_r = \vec{0}$$

soit

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - 2\frac{u_r}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] = 0 \Rightarrow u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

le point $r = 0$ appartenant au domaine, il faut nécessairement $C_2 = 0$ donc

$$u_r(r) = C_1 r.$$

– Conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(r = R) = -p = (3\lambda + 2\mu)C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}$$

La solution est donc :

$$\boxed{\vec{u} = -\frac{pr}{3\lambda + 2\mu} \vec{e}_r \quad ; \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -p \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0}$$

Equation de Navier Afin de trouver directement un champ de déplacement tel que le champ de contrainte associé sera en équilibre, on peut combiner toutes les équations en volume du problème en une seule de la manière suivante.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (332)$$

Cette relation valable quelque soit le milieu peut être transposée en terme de déformation si on utilise la loi de comportement (isotrope) du solide :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr } \varepsilon \mathbb{I} \quad (333)$$

On peut de même exprimer le tenseur de déformation à l'aide du gradient du déplacement :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u}) \quad (334)$$

En écriture indicielle, l'équation d'équilibre peut donc se réécrire :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 2\mu\epsilon_{ij,j} + \lambda(\epsilon_{kk}\delta_{ij})_{,j} + f_i = 2\mu\epsilon_{ij,j} + \lambda\epsilon_{kk,j}\delta_{ij} + f_i = \rho\gamma_i \quad (335)$$

$$2\mu\epsilon_{ij,j} + \lambda\epsilon_{kk,j}\delta_{ij} + f_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda u_{k,kj}\delta_{ij} + f_i = \rho\gamma_i \quad (336)$$

$$\mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} + \lambda u_{k,ki} + f_i = \rho\gamma_i \quad (337)$$

soit :

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \vec{f}_v = \rho\vec{\gamma} \quad (338)$$

En développant $\overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = \Delta\vec{u} + \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u}$, cette relation peut également s'exprimer selon :

$$(2\mu + \lambda)\Delta\vec{u} + (\mu + \lambda)\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} + \vec{f}_v = \rho\vec{\gamma} \quad (339)$$

ou encore

$$(2\mu + \lambda)\overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - \mu\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{u} + \vec{f}_v = \rho\vec{\gamma} \quad (340)$$

Ces trois équations sont appelées équations de Navier. Elles sont totalement équivalentes. Le choix de l'utilisation de l'une plutôt que de l'autre repose uniquement sur des considérations de simplicité des expressions, notamment dans les cas où des termes peuvent être nuls.

Si l'on se place dans une situation anisotherme, il faut prendre la loi de comportement complète :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + (\lambda \text{tr } \varepsilon - K\alpha_v\Delta T)\mathbb{I} \quad (341)$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{div}}\sigma + \vec{f}_v = \rho\vec{\gamma} \quad (342)$$

En écriture indicielle, l'équation d'équilibre peut donc se réécrire :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 2\mu\epsilon_{ij,j} + \lambda(\epsilon_{kk}\delta_{ij})_{,j} - (K\alpha_v\Delta T\delta_{ij})_{,j} + f_i = \rho\gamma_i \quad (343)$$

Le terme supplémentaire : $-(K\alpha_v\Delta T\delta_{ij})_{,j}$ donne

$$-(K\alpha_v\Delta T)_{,i} = -K\alpha_v(T - T_0)_{,i} = -K\alpha_v T_{,i},$$

ce qui correspond à $-K\alpha_v\overline{\text{grad}}T$.

L'équation de Navier anisotherme prend donc la forme :

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - K\alpha_v\overline{\text{grad}}T + \vec{f}_v = \rho\vec{\gamma} \quad (344)$$

Exemple de résolution - équation de Navier Dimensionnement d'une conduite sous pression : Pression interne $P \gg P_a$ Pression externe.

- surfaces : conditions limites SA (pressions externes et internes sur les 2 surfaces du pb), pas de condition limite CA.

- champ de déplacement CA : choix d'un champ simplifié radial : $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r$, compte tenu des symétries géométrique et de chargement.

=> le champ CA doit satisfaire l'équation de Navier. avec $\overrightarrow{rot} \vec{u} = \vec{0}$, soit $\Delta \vec{u} = \vec{0}$.

- Laplacien cylindrique :

$$\Delta \vec{u} = \left(\frac{1}{r} (r u_{r,r})_{,r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) \cdot \vec{e}_r = \vec{0} \quad (345)$$

- On développe :

$$\frac{1}{r} u_{r,r} + u_{r,rr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad (346)$$

$$\left(\frac{1}{r} u_r \right)_{,r} + u_{r,rr} = 0 \quad (347)$$

$$\left(\frac{1}{r} u_r + u_{r,r} \right)_{,r} = 0 \quad (348)$$

-Intégration 1 :

$$\frac{1}{r} u_r + u_{r,r} = C_1 \quad (349)$$

- multiplication par r :

$$u_r + r u_{r,r} = r C_1 \quad \text{puis} \quad (r u_r)_{,r} = r C_1 \quad (350)$$

-Intégration 2 :

$$r u_r = \frac{C_1}{2} r^2 + C_2 \quad (351)$$

- On obtient un champ de déplacement de la forme :

$$\vec{u}(r) = \left(a r + \frac{b}{r} \right) \vec{e}_r \quad (352)$$

- CL en déplacement CA ? => non

- Son gradient donne :

$$\overline{\text{grad}} \vec{u} = \begin{pmatrix} u_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{b}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & a + \frac{b}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon \quad (353)$$

- Loi de comportement => calcul du tenseur des contraintes

- 2 CL en contraintes (pressions) => 2 inconnues

6.2.2 Approche en contraintes

Approche directe

1. Poser le problème
2. Choix d'une forme de champ de contraintes σ statiquement admissible par observation des propriétés du problème,
3. Calcul du champ de déformation ε après ajout de la part de la déformation donnée
4. Calcul du champ de déplacement \vec{u} par intégration de ε . Si la compatibilité des déformations n'est pas vérifiée, retour à l'étape 2.
5. Vérification des l'admissibilité cinématique de \vec{u} . Si ce champ n'est pas admissible on retourne à l'étape 2.

Exemple : traction pure On considère le problème de traction pure suivant. Le domaine étudié Ω est parallélépipède rectangle. les normales à ses faces sont alignées avec les vecteurs de la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La surface latérale, notée S_{lat} , est le regroupement des deux faces normales à \vec{e}_2 et des deux normales à \vec{e}_3 . Elle est libre d'effort. La face S_+ , de normale sortante \vec{e}_1 est soumise à une densité surfacique de charge $f\vec{e}_1$. La face S_- , de normale sortante $-\vec{e}_1$ est soumise à une densité surfacique de charge $-f\vec{e}_1$. f est un paramètre de charge donné. Le matériau est élastique linéaire de paramètres λ et ν . On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et les effets dynamiques sont négligés.

1. Problème

$$\operatorname{div} \sigma = 0, \quad \forall M \in \Omega$$

$$\sigma \pm \vec{e}_2 = \sigma \pm \vec{e}_3 = 0, \quad \forall M \in S_{lat} \quad ; \quad \sigma \vec{e}_1 = f\vec{e}_1, \quad \forall M \in S_+ \quad ; \quad \sigma(-\vec{e}_1) = -f\vec{e}_1, \quad \forall M \in S_-$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \sigma \mathbb{I}, \quad \forall M \in \Omega \quad ; \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\overline{\operatorname{grad}} \vec{u} + \overline{\operatorname{grad}}^T \vec{u})$$

2. Choix d'une forme de champ de contraintes : compte tenu des conditions aux limites on suppose

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où σ est un scalaire à définir. Ce champ est tel que :

- $\operatorname{div} \sigma = 0$
- $\sigma \vec{e}_1 = f\vec{e}_1$ uniquement si $\sigma = f$
- toutes les autre conditions d'admissibilité statique

3. Calcul du champ de déformation :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{f}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}f & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}f \end{pmatrix}$$

4. Calcul du champ de déplacement (voir formulaire d'intégration :

$$\vec{u}(M) = \frac{f}{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q,$ et r sont les paramètres du mouvement de solide rigide.

5. Il n'y a pas de conditions aux limites

Equation de Beltrami Pour garantir la compatibilité du champ de déformation dès les choix de forme du tenseur des contraintes, on peut chercher à traduire les conditions de compatibilité sur les composantes des contraintes. La recherche d'une forme différentielle sur les termes du tenseur des contraintes passe par l'expression des équations de compatibilité. On rappelle que le champ de déformation d'un milieu continu doit vérifier :

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} = \epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{jl,ik} \quad (354)$$

ce qui signifie six équations non-colinéaires. On conserve les six équations en posant $k = l$, soit :

$$\epsilon_{ij,kk} + \epsilon_{kk,ij} = \epsilon_{ik,jk} + \epsilon_{jk,ik} \quad (355)$$

On utilise ensuite la loi de comportement duale :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbb{I} \quad (356)$$

Cela donne en indiciel :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (357)$$

On identifie les expressions dans l'équation de compatibilité :

$$\epsilon_{ij,kk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,kk} \delta_{ij} \quad (358)$$

$$\epsilon_{kk,ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk,ij} - \frac{3\nu}{E} \sigma_{kk,ij} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk,ij} \quad (359)$$

$$\epsilon_{ik,jk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,jk} \delta_{ik} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} \quad (360)$$

$$\epsilon_{jk,ik} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ik} \delta_{jk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} \quad (361)$$

L'équation

$$\epsilon_{ij,kk} + \epsilon_{kk,ij} = \epsilon_{ik,jk} + \epsilon_{jk,ik} \quad (362)$$

donne donc :

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,kk} \delta_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk,ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} \quad (363)$$

$$(1+\nu) \sigma_{ij,kk} - \nu \sigma_{ll,kk} \delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} = (1+\nu) (\sigma_{ik,jk} + \sigma_{jk,ik}) \quad (364)$$

On transforme ensuite cette expression de manière à y introduire les forces volumiques \vec{f} à travers l'équation d'équilibre statique ($\text{div } \sigma + \vec{f}_v = \vec{0}$). On reconnaît ainsi :

$$\sigma_{ik,jk} = (\sigma_{ik,k})_{,j} = -f_{i,j} \quad \text{et} \quad \sigma_{jk,ik} = (\sigma_{jk,k})_{,i} = -f_{j,i} \quad (365)$$

soit :

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,kk} - \nu\sigma_{ll,kk}\delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} + (1 + \nu)(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad (366)$$

Cette première équation différentielle en contrainte est généralement transformée de manière à remplacer le terme $\sigma_{ll,kk}$.

Prenons le cas particulier $i = j$, on procède à une sommation sur cet indice (attention : $\delta_{ii} = 3!$) :

$$(1 + \nu)\sigma_{ii,kk} - 3\nu\sigma_{ll,kk} + \sigma_{kk,ii} + 2(1 + \nu)f_{i,i} = 0 \quad (367)$$

$\sigma_{ii,kk}$ a alors le même sens que $\sigma_{ll,kk}$ et $\sigma_{kk,ii}$. On obtient finalement

$$\sigma_{ll,kk} = -\frac{(1 + \nu)}{1 - \nu} f_{i,i} \quad (368)$$

relation qu'on introduit dans la forme générale (simplifiée de $(1 + \nu)$) :

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{\nu}{1 - \nu} f_{k,k}\delta_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk,ij} + (f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad (369)$$

On obtient six équations, nommées les équations de Beltrami. Ces équations s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\Delta\sigma + \frac{\nu}{1 - \nu} \text{div } \vec{f}_v \mathbb{I} + \frac{1}{1 + \nu} \overrightarrow{\text{grad grad}}(\text{tr } \sigma) + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}_v + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}_v = \mathbb{O} \quad (370)$$

Elles présentent l'intérêt de se simplifier dans un certain nombre de configurations. En particulier, dans le cas où les forces volumiques sont uniformes (ce qui est généralement le cas), on obtient :

$$\Delta\sigma + \frac{1}{1 + \nu} \overrightarrow{\text{grad grad}}(\text{tr } \sigma) = \mathbb{O} \quad \text{ou encore} \quad \sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk,ij} = 0 \quad (371)$$

6.2.3 Solutions particulières

On considère un repère orthonormé et une base cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Etat de contrainte sphérique

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (372)$$

Ce tenseur est naturellement invariant par changement de repère (exemple du milieu fluide). A la "pression" correspond un état de contrainte sphérique ou "hydrostatique".

Remarque La trace de ce tenseur vaut 3σ . Chaque terme vaut donc la contrainte hydrostatique σ_H . Le déviateur est donc nul pour ce type de chargement.

Etat de contrainte uniaxial

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (373)$$

Exemple d'une traction/compression suivant l'axe \vec{e}_1 .

Etat de contrainte plan ou antiplan

$$\sigma_{\text{plan}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} ; \quad \sigma_{\text{antiplan}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (374)$$

Exemple1 : "contrainte plane" film mince en bitraction

Exemple2 : "contrainte antiplan" - "traction/torsion" d'axe \vec{e}_1 .

Etat de contrainte de cisaillement pur

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (375)$$

6.3 Existence et Unicité de la solution

On n'aborde ici que quelques notions simples liées à l'existence et à l'unicité des problèmes d'élasticité. Afin d'étudier les propriétés d'unicité de la solution du problème d'élasticité on commence par faire une formulation globale du problème.

6.3.1 Espaces d'admissibilité

Soient \vec{u} et \vec{v} deux champ de déplacement cinématiquement admissibles. Le champ $\vec{u}^* = \vec{u} - \vec{v}$ est dit *cinématiquement admissible à zéro*. En effet, il appartient à l'espace :

$$\vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 = \{ \vec{u}^*, \text{ régulier} / \vec{u}^* = 0, \forall M \in \partial\Omega_u \}$$

L'espace \mathcal{U}^0 des champs cinématiquement admissibles à zéro est un *espace vectoriel*. Cela sera particulièrement important lors de la recherche de solutions approchées d'un problème.

Remarque Si \vec{u} est solution du problème d'élasticité alors tout champ cinématiquement admissible est du type $\vec{u} + \vec{u}^*$ où \vec{u}^* est cinématiquement admissible à zéro.

6.3.2 Formulation globale de l'équilibre

On considère un champ de contraintes σ statiquement admissible. Puisque \mathcal{U}^0 est un espace vectoriel, l'équation d'équilibre global

$$\overrightarrow{div} \sigma + \vec{f}_v = 0$$

peut s'écrire :

$$(\overrightarrow{div} \sigma + \vec{f}_v) \cdot \vec{u}^* = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (376)$$

En intégrant sur le domaine :

$$\int_{\Omega} (\overrightarrow{div} \sigma + \vec{f}_v) \cdot \vec{u}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (377)$$

En utilisant l'intégration par partie :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j d\Sigma \quad (378)$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma : \overline{\text{grad}}(\vec{u}^*) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma \vec{n} \cdot \vec{u}^* d\Sigma = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (379)$$

et en remarquant que grâce à la symétrie de l'opérateur des contraintes :

$$\sigma_{ij} u_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ij} u_{j,i}) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (380)$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{u}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma \vec{n} \cdot \vec{u}^* d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (381)$$

Et sachant que \vec{u}^* est cinématiquement admissible et que σ est statiquement admissible :

$$\boxed{\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{u}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot \vec{u}^* d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0} \quad (382)$$

Cette équation d'équilibre global, traduit le fait que le travail des efforts intérieurs dans les déformations d'un champs de déplacement admissible à zéro est égal au travail des efforts extérieurs dans ce champs de déplacement.

6.3.3 Formulation variationnelle en Déplacement

Si \vec{u} est solution du problème d'élasticité. Le champ de contrainte associé $\mathbf{K}_{\varepsilon}(\vec{u})$ est statiquement admissible donc :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}_{\varepsilon}(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot \vec{u}^* d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (383)$$

sachant que \vec{u}^* est cinématiquement admissible à zéro il est tel que $\vec{u}^* = \vec{u} - \vec{v}$ où \vec{v} est cinématiquement admissible. On obtient donc la *formulation variationnelle en déplacement* :

\vec{u} solution en déplacement du problème d'élasticité est tel que pour tout champ \vec{v} cinématiquement admissible :

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u} - \vec{v})d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{u} - \vec{v})d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{u} - \vec{v})d\Omega = 0} \quad (384)$$

Par ailleurs, si une partie des déformations sont imposées par des couplages et regroupées dans les champs de déformations donné ε_d , c'est-à-dire que la relation de comportement s'écrit :

$$\sigma = \mathbf{K}(\varepsilon(\vec{u}) - \varepsilon_d) \quad (385)$$

alors la formulation variationnelle en déplacement devient :

$$\boxed{\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u} - \vec{v})d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{u} - \vec{v})d\Sigma - \int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon_d : \varepsilon(\vec{u} - \vec{v})d\Omega - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{u} - \vec{v})d\Omega = 0} \quad (386)$$

6.3.4 Unicité de la solution

On considère deux champs de déplacement solutions \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . En écrivant la formulation variationnelle pour \vec{u}_1 et en prenant \vec{u}_2 comme fonction test, on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{u}_1) : \varepsilon(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)d\Omega = 0 \quad (387)$$

De même, En écrivant la formulation variationnelle pour \vec{u}_2 et en prenant \vec{u}_1 comme fonction test :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{u}_2) : \varepsilon(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)d\Omega = 0 \quad (388)$$

En écrivant la somme des deux équations, on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) : \varepsilon(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)d\Omega = 0 \quad (389)$$

soit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}[\varepsilon(\vec{u}_2) - \varepsilon(\vec{u}_1)] : [\varepsilon(\vec{u}_2) - \varepsilon(\vec{u}_1)]d\Omega = 0 \quad (390)$$

D'après les propriétés de l'opérateur de Hooke, qui est défini positif, cela conduit nécessairement à :

$$\varepsilon(\vec{u}_2) = \varepsilon(\vec{u}_1) \quad (391)$$

Il y a donc unicité en déformation et donc en contraintes, par application de la relation de comportement.

$$\sigma_2 = \sigma_1 \quad (392)$$

Remarque On retrouve ce même résultat si on prend aussi en compte des déformations données ε_d .

Unicité en déplacement Deux champs de déplacements présentant le même champ de déformation diffèrent d'un mouvement de solide rigide. Il n'y a donc en général pas unicité en déplacement. Cependant, si les conditions d'admissibilité cinématique (conditions de déplacement imposé) bloquent tout mouvement de solide rigide, alors il y a unicité de la solution en déplacement.

Problème bien posé L'unicité de la solution a été démontrée car *le problème est bien posé*. Cela signifie que en tout point du bord $\partial\Omega$ on impose soit des déplacements, soit des efforts. Il n'existe pas de points où ni l'un ni l'autre n'est imposé. En effet si on imagine qu'une partie du bord $\partial\Omega_i$ n'est soumise ni à des déplacements imposés ni à des efforts, alors la condition globale d'équilibre devient :

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\vec{u}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot \vec{u}^* d\Sigma - \int_{\partial\Omega_i} \sigma \vec{n} \cdot \vec{u}^* d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{u}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (393)$$

donc la formulation variationnelle ne peut contenir uniquement du déplacement et devient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K} \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u} - \vec{v}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{u} - \vec{v}) d\Sigma - \int_{\partial\Omega_i} \sigma \vec{n} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{u} - \vec{v}) d\Omega = 0 \quad (394)$$

Alors, dans la démonstration de l'unicité, l'équation 390 devient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K} [\varepsilon(\vec{u}_2) - \varepsilon(\vec{u}_1)] : [\varepsilon(\vec{u}_2) - \varepsilon(\vec{u}_1)] d\Omega - \int_{\partial\Omega_i} (\sigma_2 - \sigma_1) \vec{n} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) d\Sigma = 0 \quad (395)$$

et ne peut donner de résultat quant à l'unicité en déformation ni donc en contrainte. On pourrait aussi montrer que l'existence de la solution n'est pas garantie dans cette situation.

Par extension, un problème est bien posé si en tout point du bord et dans chacune des trois directions de l'espace, on impose soit un déplacement soit un effort et pas les deux ni ni l'un ni l'autre.

6.3.5 Existence de la solution

On s'intéresse au cas d'un solide soumis à des efforts donnés \vec{T}_d sur tout le bord du domaine, c'est-à-dire que $\partial\Omega = \partial\Omega_T$. Un mouvement virtuel rigidifiant est un champ de vecteurs de la forme :

$$\vec{u}^*(M) = \vec{U}^* + \vec{\Omega}^* \wedge \overrightarrow{OM} \quad (396)$$

où \vec{U}^* est un vecteur de translation et $\vec{\Omega}^*$ un vecteur rotation. Si on imagine un mouvement de translation uniquement, la formulation globale de l'équilibre donne :

$$- \int_{\partial\Omega} \vec{T}_d \cdot \vec{U}^* d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{U}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{U}^* \quad (397)$$

soit :

$$\left(\int_{\partial\Omega} \vec{T}_d d\Sigma + \int_{\Omega} \vec{f}_v d\Omega \right) \cdot \vec{U}^* = 0, \quad \forall \vec{U}^* \quad (398)$$

Cette condition n'est possible que si la résultante des efforts extérieurs appliqués sur le domaine est nulle :

$$\vec{R}_{\text{ext} \rightarrow \Omega} = \int_{\partial\Omega} \vec{T}_d d\Sigma + \int_{\Omega} \vec{f}_v d\Omega = \vec{0} \quad (399)$$

Si on imagine un mouvement de rotation uniquement, la formulation globale de l'équilibre donne :

$$-\int_{\partial\Omega} \vec{T}_d \cdot (\vec{\Omega}^* \wedge \vec{OM}) d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{\Omega}^* \wedge \vec{OM}) d\Omega = 0, \quad \forall \vec{\Omega}^* \quad (400)$$

soit en permutant les produits vectoriels :

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{OM} \wedge \vec{T}_d) \cdot \vec{\Omega}^* d\Sigma + \int_{\Omega} (\vec{OM} \wedge \vec{f}_v) \cdot \vec{\Omega}^* d\Omega = 0, \quad \forall \vec{\Omega}^* \quad (401)$$

soit :

$$\left(\int_{\partial\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{T}_d d\Sigma + \int_{\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{f}_v d\Omega \right) \cdot \vec{\Omega}^* = 0, \quad \forall \vec{\Omega}^* \quad (402)$$

Cette condition n'est possible que si le moment des efforts extérieurs appliqués sur le domaine est nul :

$$\vec{M}_{O, \text{ext} \rightarrow \Omega} = \int_{\partial\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{T}_d d\Sigma + \int_{\Omega} \vec{OM} \wedge \vec{f}_v d\Omega = \vec{0} \quad (403)$$

Par extension à des situations où seuls quelques mouvements de solides rigides peuvent exister, la solution du problème l'élasticité ne peut exister que si il y a équilibre global des efforts exercés sur le domaine étudié.

6.4 Modélisation

6.4.1 Principe de Saint-Venant

Il s'agit d'une approximation

=> Lorsqu'on applique une sollicitation, l'état du solide, loin des zones d'application, ne dépend que du torseur des efforts appliqués et non de la description exacte de la charge.

=> Ce principe permet de traiter les cas où l'on représente les efforts par des forces ponctuelles que la MMC ne saurait pas traiter.

Exemple d'une poutre console chargée en différents points

Il est logique de considérer que loin de l'extrémité de la poutre, les efforts et déformations seront les mêmes dans les deux cas.

Exemple d'une poutre console chargée en 2 points - force opposée

=> on peut considérer que loin de l'extrémité, il n'y a pas de déformation, il est clair que l'état du solide à proximité des points d'application des efforts est mal représenté.

Illustration : traction pure La figure 1 présente les résultats d'une simulation numérique d'un chargement de traction pure sur un barreau avec un chargement réparti non uniforme sur l'extrémité. On remarque que la répartition des contraintes axiales devient rapidement uniforme dans la section à mesure qu'on s'éloigne de la zone d'application des efforts.

Pour une seconde répartition d'effort (figure 2) dont le torseur résultant est le même que celui de la première, on retrouve les mêmes résultats sachant que l'état de contrainte loin du bord est le même que pour le premier chargement.

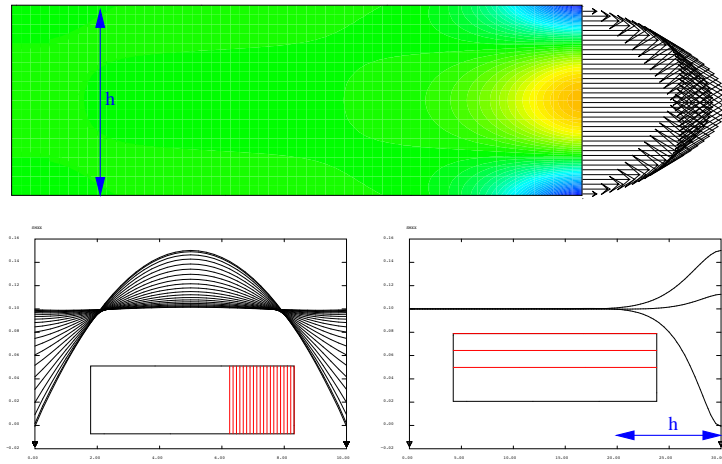


FIGURE 1 – Traction pure : premier chargement

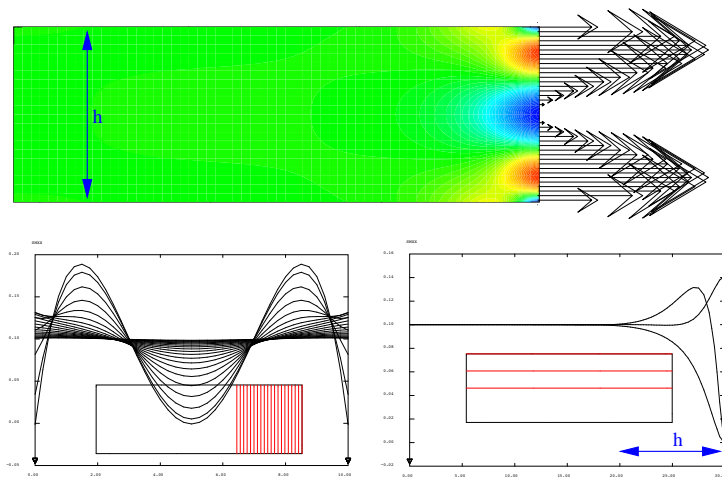


FIGURE 2 – Traction pure : second chargement

L'état de contrainte interne ne dépend donc que du torseur résultant des efforts appliqués. Le champ des contraintes ne dépend de cette répartition qu'en proximité du bord (à une distance inférieure à l'épaisseur du barreau).

Illustration : flexion pure La figure 3 présente les résultats d'une simulation numérique d'un chargement de flexion pure sur un barreau avec un chargement réparti non linéairement réparti sur l'extrémité. On remarque que la répartition des contraintes axiales devient rapidement linéaire dans la section à mesure qu'on s'éloigne de la zone d'application des efforts.

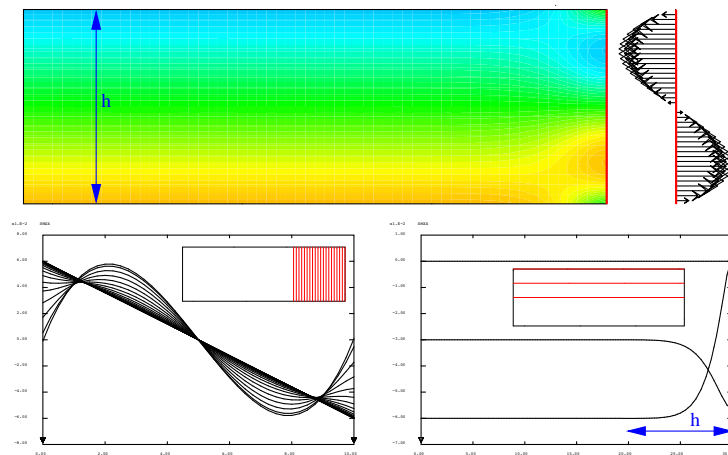


FIGURE 3 – Flexion pure : premier chargement

Pour une seconde répartition d'effort (figure 4) dont le torseur résultant est le même que celui de la première, on retrouve les mêmes résultats sachant que l'état de contrainte loin du bord est le même que pour le premier chargement.

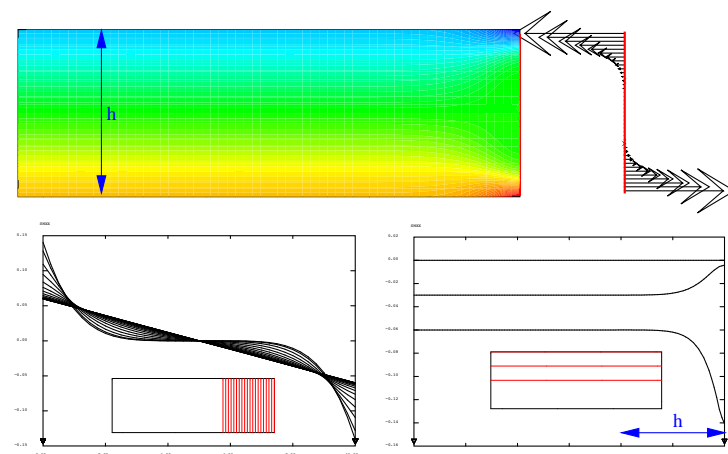


FIGURE 4 – Flexion pure : second chargement

6.4.2 Théorème de superposition

Le théorème de superposition découle de la linéarité des relations de comportement utilisées pour les solides élastiques.

Si \vec{u}_1 est la solution d'un problème P_1 et \vec{u}_2 la solution d'un problème P_2 , alors $k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$ est la solution d'un problème $k_1P_1 + k_2P_2$.

Si à un état de contrainte σ_1 correspond un état de déformation ε_1 (donné par la loi de comportement duale) et si à un état de contrainte σ_2 correspond un état de déformation ε_2 alors à l'état de contrainte $k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2$ correspond un état de déformation $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2$.

Ce théorème permet de résoudre des cas de chargement compliqués par l'addition des solutions élémentaires.

6.5 Résolution approchée

6.5.1 Principe

Le principe de la résolution approchée est de chercher d'approximation du déplacement dans un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des solutions cinématiquement admissible. Ce sous espace est engendré par une base de fonctions choisies :

$$(\vec{\phi}_1, \dots, \vec{\phi}_N) \quad (404)$$

de telle manière qu'on cherche une solution approchée dans cette base :

$$\vec{u}_{\text{app}} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{\phi}_i \quad (405)$$

En utilisant la propriété qui dit que pour qu'une condition soit vraie pour tous les vecteurs d'un espace vectoriel, il faut et il suffit qu'elle soit vraie pour tous les vecteurs de base, la formulation variationnelle devient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{u}_{\text{app}}) : \varepsilon(\vec{\phi}_i) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{\phi}_i) d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{\phi}_i) d\Omega = 0, \forall i = 1 \dots N \quad (406)$$

soit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon\left(\sum_{j=1}^N q_j \vec{\phi}_j\right) : \varepsilon(\vec{\phi}_i) d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{\phi}_i) d\Sigma - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{\phi}_i) d\Omega = 0, \forall i = 1 \dots N \quad (407)$$

soit :

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \mathbf{K}\varepsilon(\vec{\phi}_j) : \varepsilon(\vec{\phi}_i) d\Omega \right] q_j = \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{\phi}_i) d\Sigma + \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{\phi}_i) d\Omega, \forall i = 1 \dots N \quad (408)$$

L'ensemble de ces N équations correspond au système linéaire de taille $N \times N$:

$$[K]\{q\} = \{f\} \quad (409)$$

où $[K]$ est la matrice de raideur qui est symétrique, définie et positive (donc inversible) et dont les termes sont :

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\phi}_i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\vec{\phi}_j) d\Omega \quad (410)$$

et $\{f\}$ le vecteur des forces généralisées dont les composantes sont

$$f_i = \int_{\partial\Omega_T} \vec{T}_d \cdot (\vec{\phi}_i) d\Sigma + \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot (\vec{\phi}_i) d\Omega \quad (411)$$

La résolution du système 409 conduit à l'obtention des scalaires q_i et donc à l'expression de la solution approchée dans la base d'approximation.

6.5.2 Exemple : barrage poids

On étudie l'équilibre, sous l'action de l'eau, d'un barrage poids supposé élastique représenté sur la figure 5.

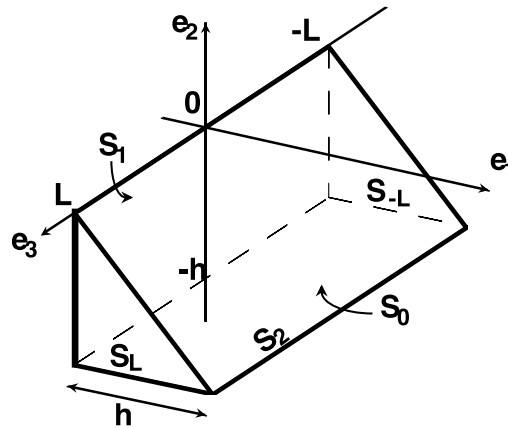


FIGURE 5 – Barrage poids

Ce barrage est supposé encasté sur sa face S_0 , libre d'effort sur la face S_2 et soumis à une répartition d'effort \vec{F} sur sa face S_1 . Le déplacement normal est imposé nul sur les faces S_L et S_{-L} , qui sont libres d'effort tangentiel. On prend $\vec{F} = -p \frac{x_2}{h} \vec{e}_1$ où p est donné.

On fait l'hypothèse que les conditions aux limites en déplacement sur la face S_0 consiste à imposer que toutes les composantes de déplacement sont nulles sur cette face.

Questions

1. Poser le problème et écrire les conditions au limites. A-t-il une solution unique ?
2. Ecrire la formulation variationnelle en déplacement du problème.
3. On cherche une solution en déplacement de la forme

$$\vec{U} = q_1 \vec{\phi}_1 + q_2 \vec{\phi}_2 \quad \text{avec} \quad \vec{\phi}_1 = \left(\frac{x_2}{h} + 1\right) \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\phi}_2 = \left(\frac{x_2}{h} + 1\right) \vec{e}_2 \quad (412)$$

Vérifier que \vec{U} est cinématiquement admissible.

4. Calculer les scalaires q_1 et q_2 et déterminer ainsi la solution approchée. Est la solution exacte ?

Eléments de correction

1. Les conditions d'admissibilité cinématiques sont :

$$\vec{u}(M) = \vec{0}, \forall M \in S_0 \quad ; \quad \vec{u}(M) \cdot \vec{e}_3 = 0, \forall M \in S_L \cup S_{-L}$$

Les condition d'admissibilité statique sont :

$$\sigma(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{0}, \forall M \in S_2 \quad ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \forall M \in S_L \cup S_{-L}$$

$$\sigma_{11} = p \frac{x_2}{h}, \forall M \in S_1 \quad ; \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \forall M \in S_1$$

La relation de comportement est :

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda(\text{tr } \varepsilon) \mathbb{I}$$

Le problème est bien posé donc il a une solution unique.

2. La formulation variationnelle est déplacement est : \vec{u} , solution du problème est cinématiquement admissible et tel que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{K} \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{u}^*) d\Omega + \int_{S_1} p \frac{x_2}{h} (\vec{u}^* \cdot \vec{e}_1) d\Sigma + \int_{\Omega} \rho g (\vec{u}^* \cdot \vec{e}_2) d\Omega = 0$$

3. Quelques soient les paramètres scalaires q_1 et q_2 , la solution approchée est cinématiquement admissible.
4. Expression de la matrice de raideur :

$$k_{11} = \mu L \quad ; \quad k_{22} = (\lambda + 2\mu)L \quad ; \quad k_{12} = k_{21} = 0$$

Expression du vecteur des forces généralisées :

$$f_1 = p \frac{Lh}{3} \quad ; \quad f_2 = -\rho g \frac{Lh^2}{3}$$

La solution du système est donc :

$$q_1 = \frac{ph}{3\mu} \quad ; \quad q_2 = -\frac{\rho gh^2}{3(\lambda + 2\mu)}$$

Ce qui correspond à la solution approchée cinématiquement admissible :

$$\vec{u}_{app} = \left(\frac{x_2}{h} + 1\right) \left(\frac{ph}{3\mu} \vec{e}_1 - \frac{\rho gh^2}{3(\lambda + 2\mu)} \vec{e}_2\right)$$

5. On regarde si le champ de contrainte est statiquement admissible. Par exemple, on constate que $\sigma_{11} = q_2 \lambda / h$ est constant dans le domaine. Donc cette composante ne satisfait pas aux conditions sur la face S_1 . Le champ de contrainte n'est pas statiquement admissible donc la solution approchée n'est pas la solution exacte.

6.6 Dimensionnement - Critères de plasticité

Les composantes du tenseur des contraintes ont la dimension d'une pression ($1\text{Pa}=1\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$). La force exercée par le milieu sur un élément de surface vaut :

$$d\vec{f} = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot ds = \sigma \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (413)$$

6.6.1 Contrainte "normale" et contrainte "tangentielle"

Renvoie à des notions vues en RDM.

Définition 1 : on appelle contrainte normale la projection du vecteur contrainte sur la normale \vec{n} à la surface, soit :

$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} = {}^t\vec{n} \cdot \sigma \cdot \vec{n} \quad (414)$$

Définition 2 : on appelle contrainte tangentielle (ou "cission" en cristallographie) la projection du vecteur contrainte sur la surface de normale \vec{n} , soit :

$$\tau_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{t} \quad (415)$$

avec \vec{t} un vecteur appartenant à la surface tel qu'on puisse décomposer le vecteur-contrainte selon :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t} \quad (416)$$

Considérons le tenseur σ_{ij} : Les termes de la diagonale σ_{ii} sont appelées les contraintes normales associées aux 3 axes du repère. Ils correspondent également aux contraintes principales quand le tenseur est diagonal. Les termes hors diagonale : σ_{12} , σ_{13} et σ_{23} sont les contraintes tangentielles associées à chacune des faces d'un cube défini par le repère. On les appelle également les contraintes de cisaillement. Elles sont nulles quand le tenseur est diagonal.

6.6.2 Cercle de Mohr des contraintes

L'idée est de fournir une représentation graphique des contraintes tangentielles et normales en un point M pour toutes les orientations possibles. avec $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau_n \cdot \vec{t}$, on trace le diagramme (σ_n, σ_t) .

Prenons l'exemple d'un problème où le tenseur des contraintes est diagonal et vaut :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (417)$$

- Le vecteur contrainte associé à la facette de normale \vec{e}_1 vaut : $\vec{T}(M, \vec{e}_1) = \sigma_{11} \cdot \vec{e}_1$. La contrainte normale vaut σ_{11} , la contrainte tangentielle est nulle. cela correspond au point A sur le dessin. Le vecteur contrainte associé à la facette de normale \vec{e}_2 vaut : $\vec{T}(M, \vec{e}_2) =$

$\sigma_{22} \cdot \vec{e}_2$. La contrainte normale vaut σ_{22} , la contrainte tangentielle est nulle. cela correspond au point B sur le dessin. Le vecteur contrainte associé à la facette de normale \vec{e}_3 vaut : $\vec{T}(M, \vec{e}_3) = \sigma_{33} \cdot \vec{e}_3$. La contrainte normale vaut σ_{33} , la contrainte tangentielle est nulle. cela correspond au point C sur le dessin

- Considérons une normale \vec{n} appartenant au plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) paramétrée par l'angle θ : $\vec{n} = \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2$. le vecteur tangent associé vaut : $\vec{t} = -\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2$.

- Le vecteur contrainte vaut : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_{11} \cdot \cos\theta \vec{e}_1 + \sigma_{22} \cdot \sin\theta \vec{e}_2$.

- On calcule les contraintes normale et tangentielle associées : $\sigma_n = \sigma_{11} \cdot \cos^2\theta + \sigma_{22} \cdot \sin^2\theta$;

$\tau_n = -\frac{1}{2}\sigma_{11} \cdot \sin 2\theta + \frac{1}{2}\sigma_{22} \cdot \sin 2\theta = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\theta$.

- On remplace ensuite : $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ et $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

- $\sigma_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cdot \cos 2\theta$ proche de :

- $\tau_n = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\theta$

- On observe que : $(\sigma_n - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2})^2 + \tau_n^2 = (\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2})^2$

Le lieu du vecteur contrainte est donc un cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de diamètre la distance AB . Il s'agit d'un des cercles de Mohr.

Généralisation :

- quand la normale \vec{n} appartient au plan (\vec{e}_1, \vec{e}_3) , le lieu du vecteur contrainte est un cercle de centre le milieu de $[AC]$ et de diamètre la distance AC .
- quand la normale \vec{n} appartient au plan (\vec{e}_2, \vec{e}_3) , le lieu du vecteur contrainte est un cercle de centre le milieu de $[BC]$ et de diamètre la distance BC .
- quand la normale \vec{n} est quelconque, le lieu du vecteur contrainte appartient à l'espace délimité par les trois cercles ainsi formés.

Cette représentation permet (entre autre) une identification "visuelle" du niveau de contrainte de cisaillement maximale (sommet du plus grand des cercles= rayon), donnée souvent utile pour le dimensionnement des structures. Une méthode de dimensionnement consiste ainsi à calculer d'abord les contraintes principales (σ_i) par diagonalisation, puis la contrainte tangentielle maximale, valant le rayon du plus grand cercle :

$$\tau_{max} = \max\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right) \quad (418)$$

6.6.3 Critères de limite élastique

La théorie de l'élasticité conduit naturellement à des résultats qui ne sont valables que si le comportement est élastique, c'est à dire quand la "contrainte" (terme abusif puisque multiaxial) ne dépasse pas le seuil de limite d'élasticité.

- dans le cas unidimensionnel (traction-compression), il s'agit de vérifier simplement que $|\sigma| < \sigma_e$, avec σ_e la limite élastique en traction (compression)
- dans le cas tridimensionnel (état multiaxial des contraintes), on doit définir une fonction de charge $f(\sigma)$, pour passer du tenseur à un scalaire, et vérifier le critère de limite d'élasticité qui s'écrit : $f(\sigma) < \sigma_e$

Il n'existe pas de critère universel pour tous les matériaux. certains sont adaptés aux matériaux fragiles, d'autres aux métaux, d'autres aux polymères.

Attention aux conditions limites : il faut respecter la même décomposition au niveau des conditions limites et leur nature : on ne peut additionner des conditions en contraintes et des conditions en déplacement !

Critère de Rankine Virgil

Matériaux fragiles (béton, verre, fonte...) => suppose que le seuil de limite d'élasticité est atteint lorsque l'une des valeurs propres est égale à la contrainte à la rupture : σ_R . Il s'écrit :

$$\max(\sigma_i) \leq \sigma_R \quad (419)$$

Notons que la valeur de σ_R est extrêmement variable même pour une même classe de matériau. Elle dépend en particulier des défauts initiaux (microfissures) présents. On lui préfère souvent une propriété appelée ténacité (ou facteur d'intensité des contraintes) de la matière K_c ($\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$) indépendante de la longueur de fissure. On montre :

$$\sigma_R = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}} \quad (420)$$

où a désigne une longueur caractéristique de microfissure.

Illustration expérimentale

- traction sur barreau de craie : la section perpendiculaire à l'axe voit la plus grande contrainte principale => rupture selon la section (exp).
- torsion sur barreau de craie : étape 1 : contraintes principales, puis vecteurs propres pour connaître le plan normal à la plus grande contrainte principale. On montre qu'il s'agit des plans à 45° de l'axe de l'éprouvette à la surface => rupture hélicoïdale (exp).

Critère de Tresca

La plasticité sur matériaux ductiles (cuivre, aluminium, or..) a lieu par glissement des plans cristallographiques les uns sur les autres. Ce glissement est activé quand la contrainte de cisaillement sur le plan atteint une valeur limite τ_e . La construction de Mohr nous permet de connaître la contrainte de cisaillement maximale comme étant le rayon du plus grand cercle de Mohr. On construit donc le critère de Tresca à partir de cette constatation. il donne :

$$\max\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right) \leq \tau_e \quad (421)$$

τ_e est la limite d'élasticité en cisaillement. Le lien avec avec la limite d'élasticité en traction est naturel puisque quand la contrainte de traction atteint σ_e , la contrainte de cisaillement maximale vaut $\tau_e = \sigma_e/2$. Le critère s'écrit donc également :

$$\max(\sigma_i - \sigma_j) \leq \sigma_e \quad (422)$$

On constate effectivement sur les matériaux ductiles que la déformation plastique débute généralement par un cisaillement irréversible à 45° de l'axe de traction.

Critère de Von Mises

Il s'agit d'un critère énergétique qui "gomme" les discontinuités observées avec le critère de Tresca (discontinuité cisaillement - bitraction). Il est construit à partir de l'expression de l'énergie élastique déviatorique (avec $s = 2\mu d$). Rmq : comme avec le critère de Tresca, la partie hydrostatique des contraintes n'intervient pas. On observe effectivement qu'un chargement hydrostatique, même de forte intensité, ne provoque pas de plasticité.

$$u_e^d = \frac{1}{2} \mathbf{d} : \mathbf{s} = \frac{1}{4\mu} \mathbf{s} : \mathbf{s} \quad (423)$$

En traction (d'intensité σ), l'énergie élastique déviatorique vaut :

$$u_e^d = \frac{1}{4\mu} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{4}{9} \sigma^2 + \frac{2}{9} \sigma^2 \right) = \frac{1}{4\mu} \frac{2}{3} \sigma^2 \quad (424)$$

La contrainte ne devant pas dépasser la limite d'élasticité σ_e , on obtient :

$$\frac{1}{4\mu} \mathbf{s} : \mathbf{s} \leq \frac{1}{4\mu} \frac{2}{3} \sigma_e^2 \quad (425)$$

soit :

$$\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \leq \sigma_e \quad \text{et en indiciel} \quad \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}} \leq \sigma_e \quad (426)$$