## Intégration numérique dans le temps

Il s'agit d'intégrer directement l'équation dynamique de l'équilibre, ou le système linéaire différentiel,

$$\left|M\right|\ddot{\vec{\mathbf{u}}} + \left|A\right|\dot{\vec{\mathbf{u}}} + \left|K\right|\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{eq}}$$

en remplacant vitesse et accélaration par des différences de déplacements à des temps différents.

On désigne ici par $\Delta$t le pas de temps et au temps n $\Delta$t l'équation est écrite,

$$\left|M\right|\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \left|A\right|\dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \left|K\right|\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{eqn}}$$

Dans la suite M est supposée définie positive ($M^{-1}$ a un sens).

Il y a de très nombreuses méthodes d'intégration; leur choix n'est pas toujours simple et dépend du problème à résoudre. Globalement on distingue cependant 2 grandes catégories : les méthodes explicites ou implicites.

Dans les méthodes explicites le déplacement au temps n+1 est déterminé à partir des équilibres aux temps précédents.

Dans les méthodes implicites les déplacements au temps n+1 s'obtiennent à partir du champ des vitesses et des accélérations à ce moment là (n+1).
Si l'information en n+1 est obtenue uniquement à partir de l'information en n alors la méthode est dite à **un** pas, sinon elle est dite **multipas**.

**Méthodes explicites**

Une des plus populaires est la méthode des différences finies centrées. Elle a pour point de départ les relations simples :

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}} = \frac{1}{2\Delta t}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} - \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}-1}\right) \text{ et } \ddot{\vec{\mathbf{u}}} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} - 2\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} + \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}-1}\right)$$

ce qui conduit par remplacement dans l'équilibre à :

$$\left|\frac{1}{\Delta t^2}|M| + \frac{1}{2\Delta t}|A|\right| \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} = \vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{eq}} - |K|\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} + \frac{1}{\Delta t^2}|M|\left(2\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} - \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}-1}\right) + \frac{1}{2\Delta t}|A|\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}-1}$$

Cette méthode est conditionnellement stable ce qui signifie que pour avoir des résultats corrects, il faut : $\Delta t \leq 2/\omega_n$

Quelques remarques sur la méthode :

1) La résolution de l'équation n'est raisonable qu'à la condition de travailler avec des matrices de masse et d'amortissement diagonales.

Trouver une matrice d'amortissement diagonale n'est pas facile. Il existe une formulation de la méthode qui permet d'intégrer avec une matrice A non diagonale.

2) Dans le second membre il n'y a que des produits matriciels simples; par conséquent l'assemblage de la structure (c'est-à-dire la construction de K) n'est pas nécessaire.

3) $\omega_n$ est la plus grande pulsation propre de la structure.

4) Au premier pas la vitesse et le déplacement en t = 0 sont nécessaires pour démarrer avec les relations :

$$\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_0 = |M|^{-1}\left(\vec{\mathbf{f}}_{\mathbf{eq}0} - |K|\vec{\mathbf{u}}_0 - |A|\dot{\vec{\mathbf{u}}}_0\right) \qquad \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_0 - \Delta t\dot{\vec{\mathbf{u}}}_0 + \vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{u}}_{-1}$$

5) Cette méthode s'applique assez facilement aux problèmes non linéaires.

**Méthodes implicites**

A la différence des méthodes explicites les méthodes implicites sont inconditionellement stables. La plus connue est celle des trapèzes qui est définie à partir des approximations de Taylor suivantes :

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1}\right) \text{ et } \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1} = \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \frac{\Delta t}{2}\left(\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1}\right)$$

D'où l'on tire

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1} = \frac{2}{\Delta t}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} - \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}\right) - \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} \quad \text{et} \quad \ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1} = \frac{4}{\Delta t^2}\left(\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} - \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}}\right) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} - \ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}}$$

En les intégrant dans l'équation d'équilibre on obtient une équation de la forme :

$$\left|\tilde{K}\right|\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} = \tilde{\vec{\mathbf{f}}}_{\mathbf{n}+1} \quad \text{avec,} \quad \left|\tilde{K}\right| = \frac{4}{\Delta t^2}|M| + \frac{2}{\Delta t}|A| + |K|$$

et

$$\tilde{\vec{\mathbf{f}}}_{\mathbf{n}+1} = \tilde{\vec{\mathbf{f}}}_{\mathbf{eq(n+1)}} + |M|\left(\frac{4}{\Delta t^2}\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} + \frac{4}{\Delta t}\dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}}\right) + |A|\left(\frac{2}{\Delta t}\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} + \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}}\right)$$

Dans une méthode implicite la matrice raideur équivalente $\left|\tilde{K}\right|$ est quelconque et doit donc être triangularisée au premier pas.

Si M est définie >0 il n'y a pas de singularité de la raideur équivalente, donc on peut étudier des structures libres.

Il n'y a pas d'avantage particulier à avoir une matrice M diagonale.

Le pas $\Delta t$ doit être ajusté selon le second membre car il dépend de la fréquence maximum contenue dans l'excitation. Si cette fréquence est notée $\omega_c$ (fréquence de coupure) on sait que les modes de structures dont les fréquences sont $>3\ \omega_c$ sont quasistatiques. Ceux qui ont des fréquences inférieures participent à la réponse dynamique; en pratique on adopte le plus souvent un pas de $0.3/\omega_c$ pour avoir une bonne précision mais il n'est pas interdit de faire des essais pour optimiser la valeur de ce pas.

## Méthodes mixtes

Les méthodes précédentes n'assurent pas une réponse exempte de 'bruit numérique lié aux hautes fréquences. Les méthodes mixtes au contraire assurent un amortissement numérique (ou encore une viscosité artificielle).
Parmi les plus connues de ces méthodes il y a celles dites de Newmark qui se fondent sur les développements suivants :

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}+1} = \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{n}} + \Delta t \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \frac{\Delta t^2}{2}\left((1-2\beta)\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + 2\beta\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1}\right) \quad \text{et}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1} = \dot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \Delta t\left((1-\gamma)\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}} + \gamma\ddot{\vec{\mathbf{u}}}_{\mathbf{n}+1}\right)$$

$\beta$ et $\gamma$ sont des paramètres qui déterminent la stabilité et la précision.
La stabilité est inconditionnelle si $2\beta \geq \gamma \geq ½$. Elle est conditionnelle si $\gamma \geq ½$ $\beta \leq ½$ et $\Delta t \leq [\xi(\gamma - ½) + (\gamma/2 - \beta + \xi^2 (\gamma - ½)^2)^{1/2}]/(\gamma/2 - \beta)\omega_{max}$.
La méthode est instable pour $\gamma < ½$.
Une étude plus complète de tous ces schémas est en dehors du cadre de ce cours.

## Conclusion

Le choix d'une méthode (modale, intégration directe) est très lié au type de problème à résoudre. La méthode modale est évidemment la plus intéressante si elle peut s'appliquer. Les limites de son utilisation sont fortement dépendantes du type d'excitation ; une excitation qui exige la sélection d'un assez grand nombre de modes est pénalisante : c'est la cas dans les problèmes de propagation d'ondes. A l'inverse les problèmes plus classiques de dynamique des structures sont bien traités par la méthode modale car ce sont les modes basses fréquences qui pilotent la solution.
Les méthodes implicites n'offrent pas d'avantages décisifs par rapport aux méthodes explicites en particulier pour tous les problèmes de propagation où le pas doit rester petit de toute façon.
Le maillage en dynamique doit aussi être adapté aux problèmes : en analyse dynamique il est conseillé d'avoir des maillages fins et réguliers. Des éléments d'ordre élevé sont utilisables car les contraintes dynamiques varient lentement en fonction du temps. Pour des problèmes de propagation les éléments simples sont les mieux adaptés. Une matrice masse diagonale est indispensable pour les méthodes explicites.