

Exemples de vibrations de plaque avec des défauts

L. CHAMPANEY et Ph. TROMPETTE

Objectifs :

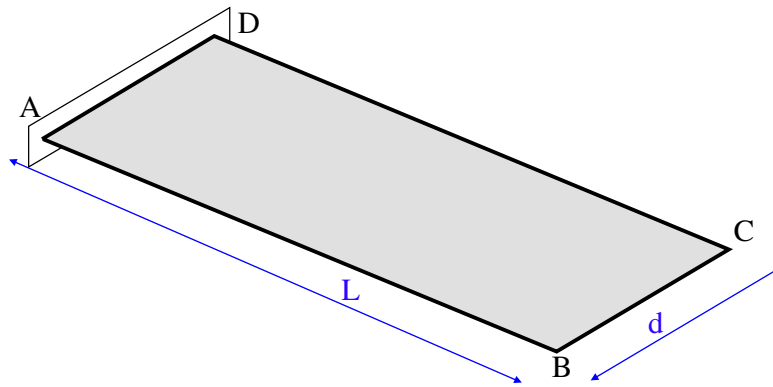
- Analyse modale,
- Solution analytique,
- Etude de l'influence des défauts géométriques,
- Simplification de modèles.

Dans ce chapitre, nous recherchons les premiers modes propres d'une plaque plane rectangulaire. La première fréquence est comparée à des solutions analytiques. Nous étudions ensuite l'influence de défauts géométriques importants sur la valeur des fréquences et sur l'ordre d'apparition des modes.

Table des matières

1	Problème	2
2	Plaque initiale	3
3	Plaque avec 1 trou	5
4	Plaque avec 3 trous	7
5	Plaque avec 2 trous	9
6	Plaque vrillée	11
7	Conclusions	13

1 Problème



$L = 1m$, $d = 0.4m$, épaisseur : $h = 0.005m$

$E = 2.1E11Pa$, $\nu = 0.3$ et $\rho = 7800kg/m^2$

Maillage : éléments *plaque* : DKT

(*Discrete Kirchoff Triangle*)

On considère une plaque rectangulaire $ABCD$ de longueur $L = 1m$ et de largeur $d = 0.4m$ encastée sur son bord DA et libre sur ses trois autres bords.

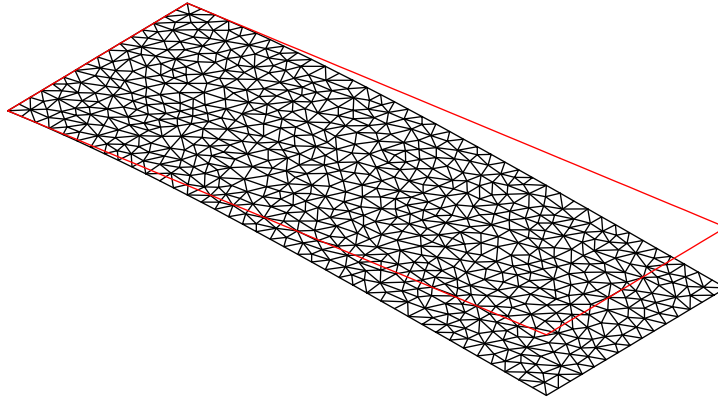
Cette plaque a une épaisseur de $5mm$ et est constituée d'un matériau élastique (module d'Young $E = 2E11Pa$ et $\nu = 0.3$).

On s'intéresse aux premiers modes de vibration libre de la plaque sans défauts telle qu'elle est représentée sur la figure ci-dessus.

Le maillage utilisé est constitué d'éléments DKT (Discrete Kirchoff Triangle [1]). le maillage est composé de 1370 éléments et 741 noeuds.

2 Plaque initiale

Mode fondamental



mode 1 : $f_1 = 4.2Hz$

Le premier mode obtenu, est le premier mode de flexion à $4.2Hz$. Il correspond quasiment au premier mode de flexion d'une poutre, aux effets Poisson près.

Différents auteurs proposent des solutions quasi analytiques sous la forme :

$$f = \frac{\alpha}{2\Pi} \sqrt{\frac{Eh^2}{\rho L^4(1 - \nu^2)}}$$

où α est un coefficient qui dépend de la largeur de la plaque rectangulaire. La solution est quasi analytique car ce coefficient est obtenu de manière approchée.

L'approximation par éléments finis avec le maillage ci-dessus est relativement bonne car on obtient :

$$f_{EF} = 4.194Hz$$

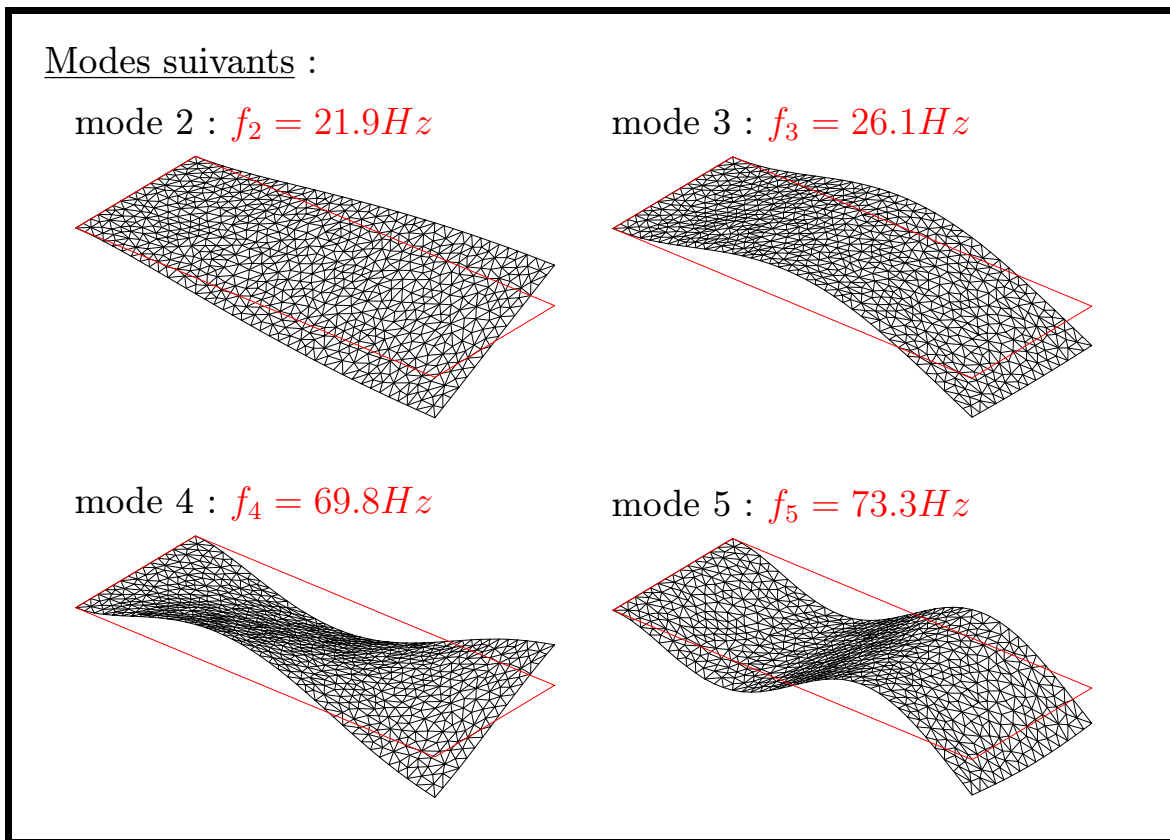
GIBERT propose une solution quasi analytique [2] :

$$f_{an1} = 4.148Hz$$

et SZILARD propose une autre solution quasi analytique [3] :

$$f_{an2} = 4.232Hz$$

C'est pourquoi dans la suite, cette valeur de la première fréquence propre à $4.2Hz$ est la valeur prise comme référence dans l'étude de l'influence de défauts.



Les modes suivants sont :

Mode 2 c'est le premier mode de torsion. On s'appelle mode de torsion par correspondance avec les modes de poutre équivalent. Il s'agit cependant d'un mouvement de flexion de plaque.

Mode 3 c'est le deuxième mode de flexion. Il présente un noeud de vibration.

Mode 4 c'est le deuxième mode de torsion.

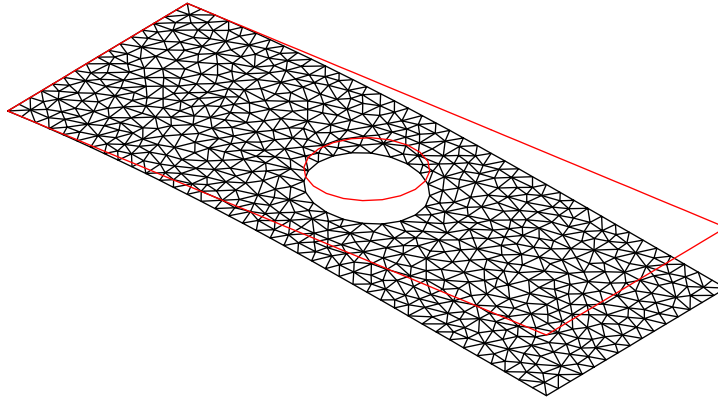
Mode 5 c'est le troisième de flexion, avec deux noeuds de vibration.

Dans la suite, on introduit différents défauts géométriques dans la structure et on étudie l'influence sur les cinq premières fréquences propres.

3 Plaque avec 1 trou

(diamètre du trou 18mm)

Mode fondamental



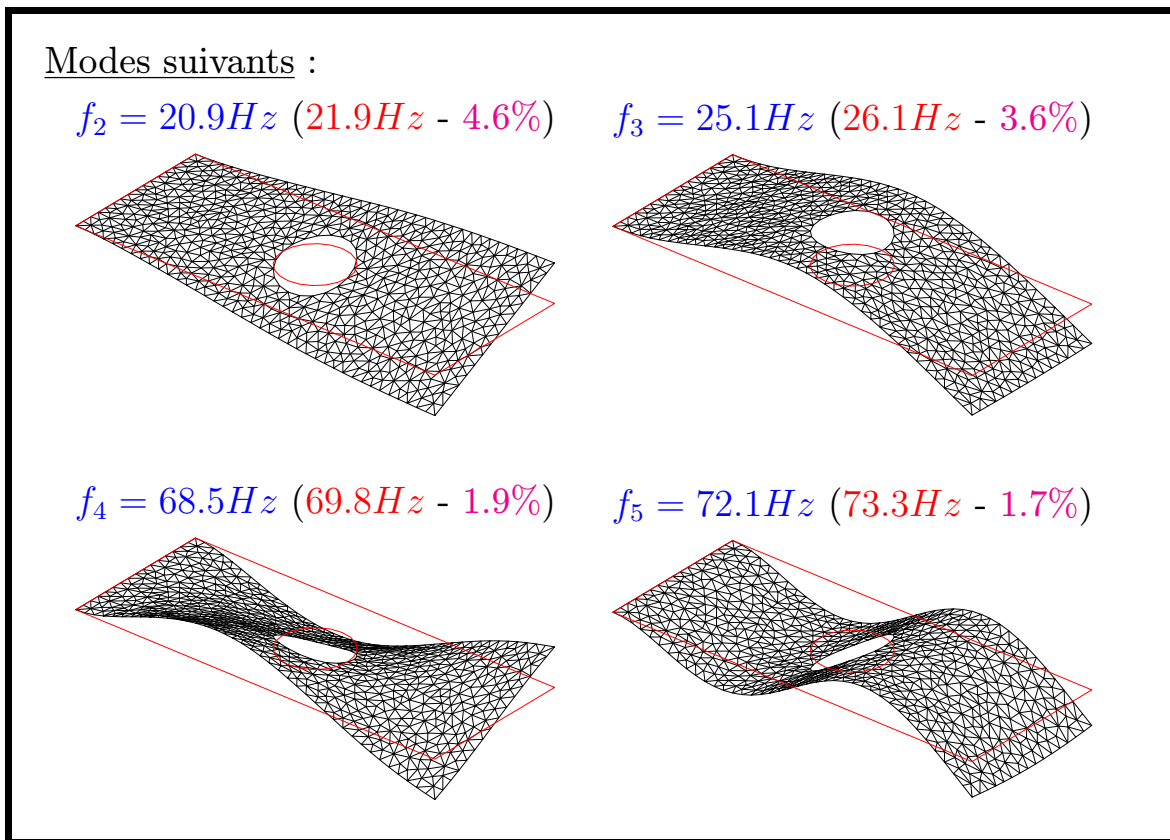
mode 1 : $f_1 = 4.1Hz$ ($4.2Hz$ - écart 1.9%)

On ajoute maintenant un trou d'un diamètre $18mm$ au centre de la plaque. Cette valeur a été choisie de manière à pouvoir percer deux trous dans la largeur, ce qui est fait plus loin. Cette valeur du rayon est conservée pour tous les exemples concernant l'influence des perçages.

Le maillage est toujours constitué d'éléments plaque DKT (1263 éléments et 691 noeuds).

Le premier mode est quasiment inchangé (moins de 2% d'ecart), bien que le perçage ne soit pas situé sur un noeud de vibration (il n'y en a d'ailleurs pas dans ce mode).

En fait, c'est principalement la partie de la plaque proche de l'encastrement qui travaille dans ce mode. Cette partie est toujours intègre malgré le perçage.

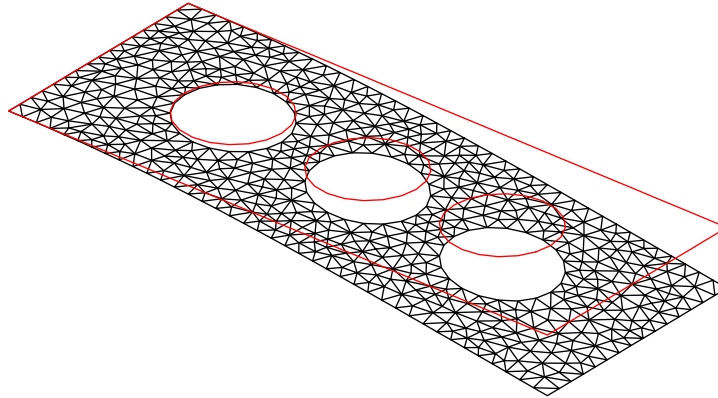


Les écarts sur les modes suivants sont aussi très faibles (moins de 5%). De plus l'ordre d'apparitions des modes est respecté.

4 Plaque avec 3 trous

(diamètre des trous 18mm)

Mode fondamental

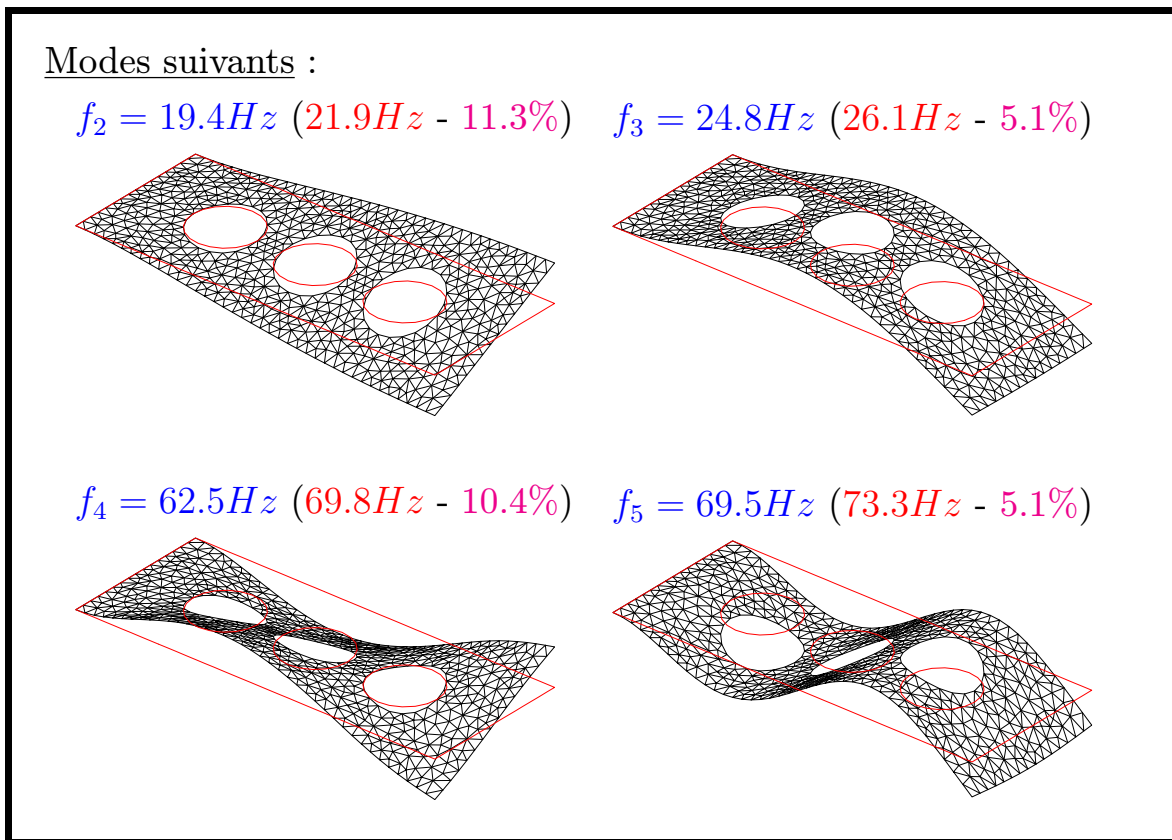


mode 1 : $f_1 = 3.9Hz$ ($4.2Hz$ - écart 6.3%)

La plaque est maintenant percée de trois trous de diamètre 18mm placés dans la longueur de la plaque comme le montre la figure ci dessus. Les centres de trous sont distants de 25mm.

Le maillage est toujours constitué d'éléments plaque DKT (1043 éléments et 604 noeuds).

L'écart sur le premier mode est un peu plus important que dans le cas d'un seul perçage. La répartition des masses et la raideur près de l'encastrement sont pourtant réellement modifiées.

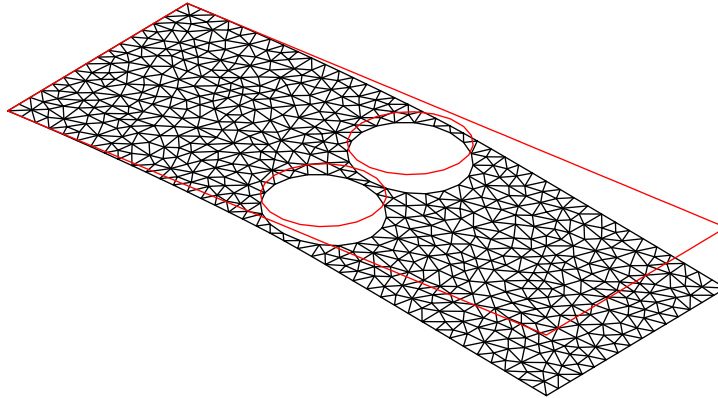


Les écarts sur les modes suivants se creusent un peu, mais l'ordre des modes reste inchangé.

5 Plaque avec 2 trous

(diamètre des trous 18mm)

Mode fondamental

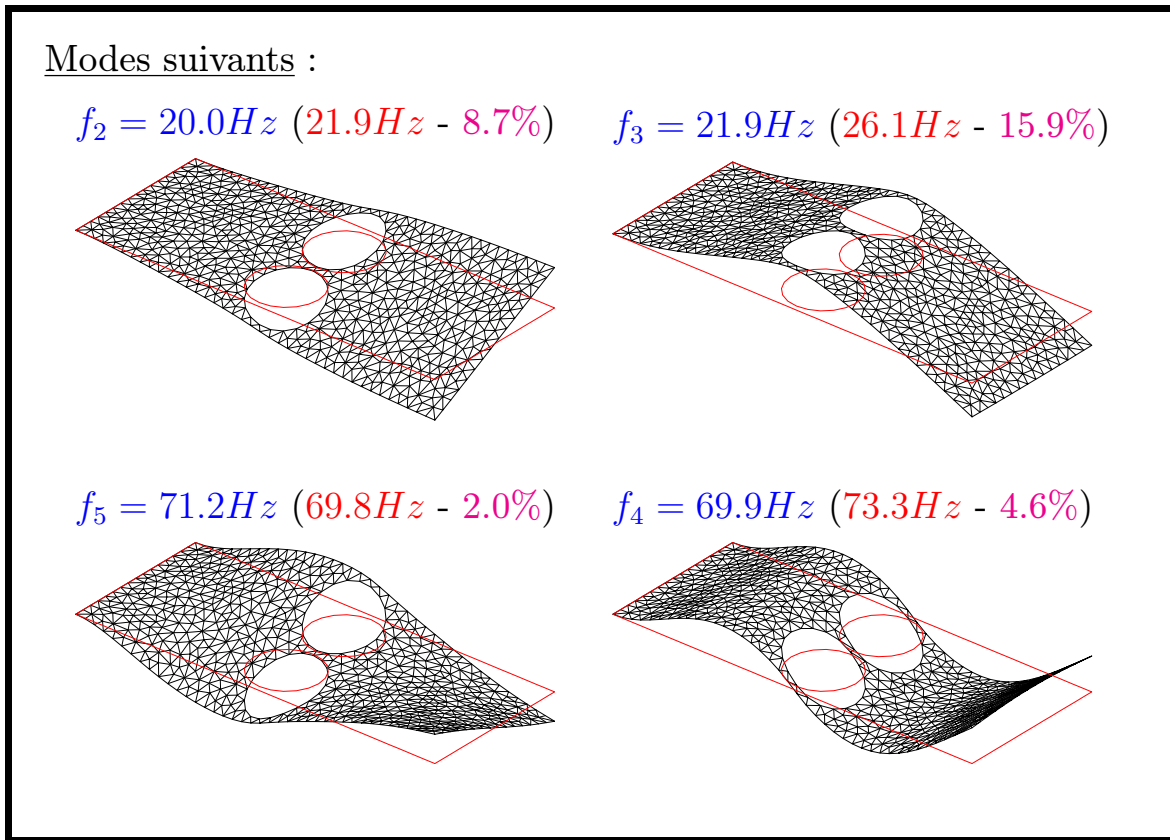


mode 1 : $f_1 = 3.6Hz$ ($4.2Hz$ - écart 13.7%)

La plaque est maintenant percée de deux trous de diamètre 18mm alignés dans la largeur de la plaque. Les deux trous sont espacés de telle manière que la plaque soit constituée de trois cordons de largeurs identiques au niveau des trous.

Le maillage est toujours constitué d'éléments plaque DKT (1147 éléments et 647 noeuds).

L'écart sur la fréquence fondamentale est significatif. Le défaut en masse et surtout en raideur est important.

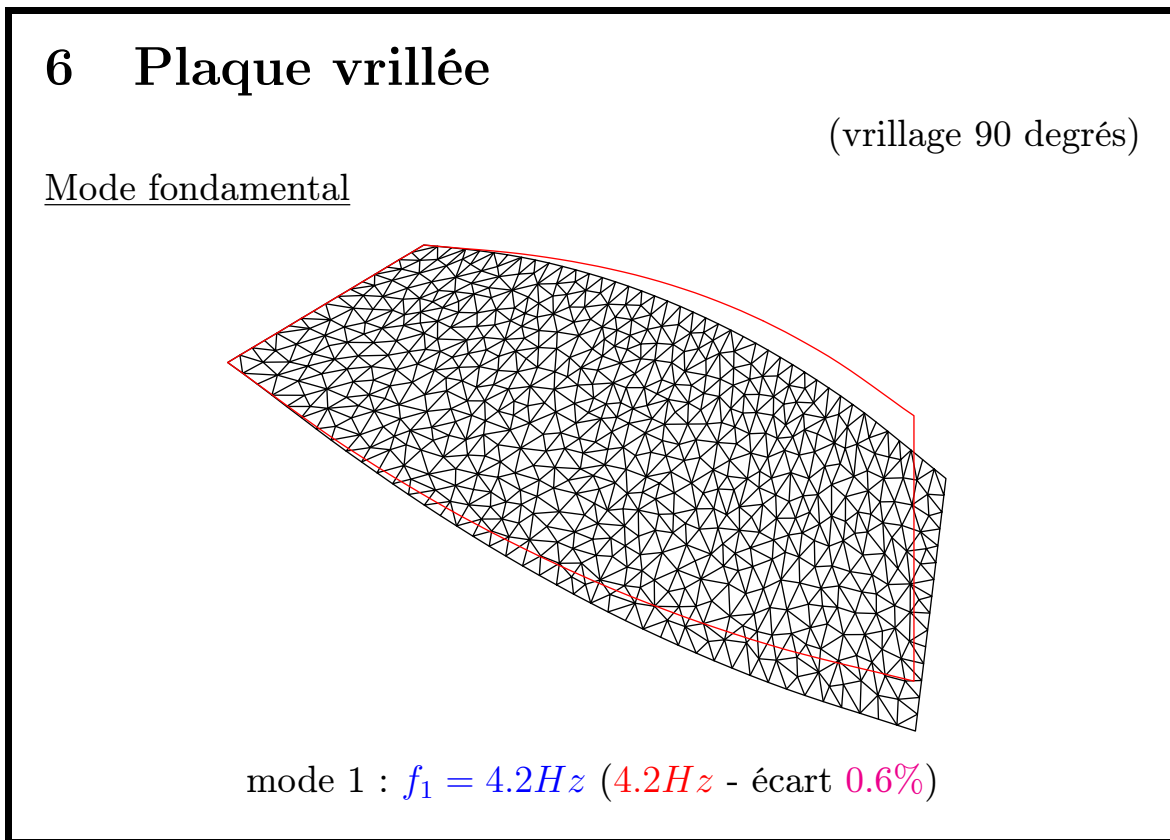


On obtient un écart du même type sur les modes 2 et 3.

Par ailleurs, on constate que les modes 3 et 4 ont été inversés par rapport à ceux de la plaque sans défaut :

- le troisième mode de flexion est maintenant le quatrième mode (69.9Hz),
- le mode de flexion et torsion combinées est maintenant le cinquième mode (71.2Hz).

Cela semble logique : la présence des deux trous diminue plus la raideur en flexion (d'ailleurs tous les modes de flexion sont à fréquences plus basses) que la raideur en torsion.

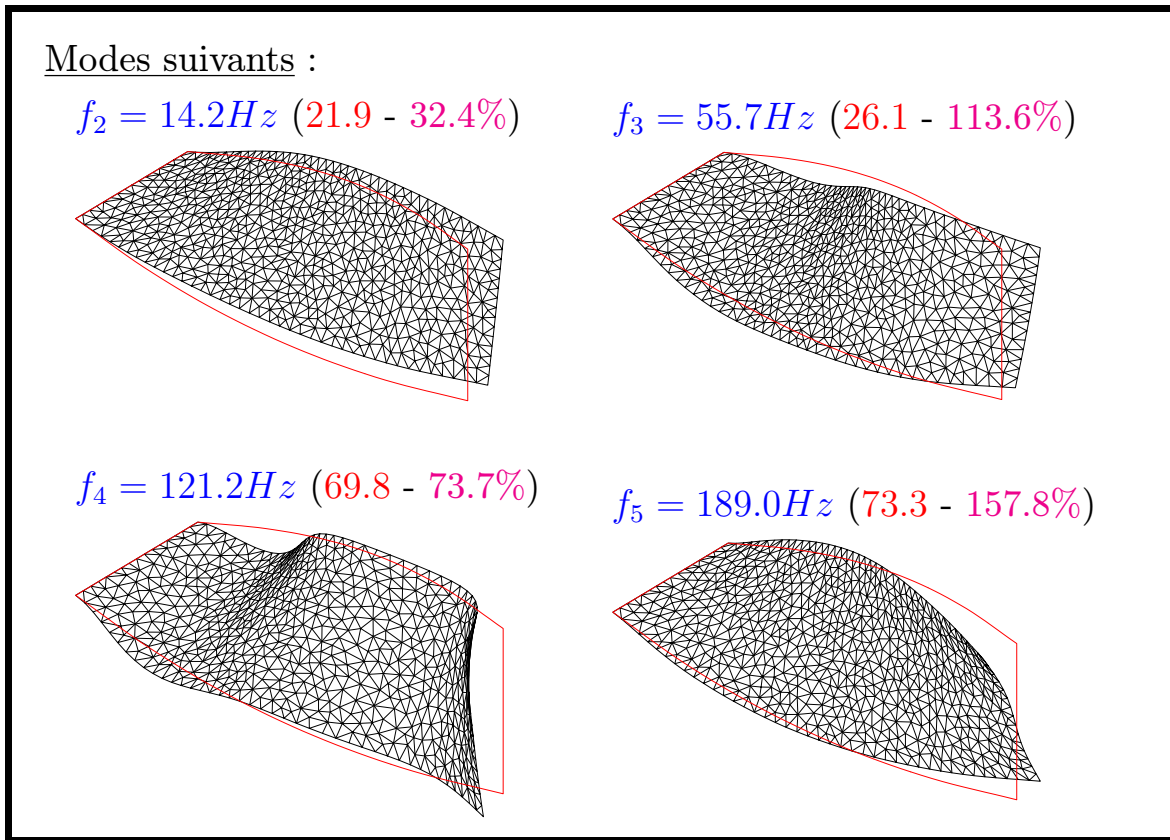


La plaque est maintenant vrillée sur toute sa longueur de telle sorte que ses deux extrémités sont perpendiculaires entre elles.

Le maillage est toujours constitué d'éléments plaque DKT (1201 éléments et 658 noeuds).

Dans ce cas, la masse de la plaque est inchangée.

On constate que la première fréquence propre de la plaque est quasiment inchangée par ce fort défaut géométrique.



Les modes suivants sont eux complètement modifiés par cette nouvelle forme de la plaque. Compte tenu de la forme vrillée de la plaque, les modes sont difficilement identifiables comme mode de flexion ou de torsion (sauf le mode 5, qui est un mode de torsion).

On peut seulement constater que les fréquences propres obtenues sont beaucoup plus élevées que celles de la plaque initiale : la plaque vrillée est beaucoup plus raide (sauf dans le cas d'une sollicitation qui correspond au premier mode propre).

7 Conclusions

- Base modale,
- Comparaison avec une solution analytique,
- Influence des défauts : même des défauts importants ont une influence très faible sur le premier mode de vibration,
- Possibilité de simplifier les modèles,
- Pas nécessaire d'utiliser des modèles détaillés pour rechercher les toutes premières fréquences propres.

Cet exemple nous a montré qu'il est possible de faire des hypothèses simplificatrices très importantes sur la géométrie des problèmes pour lesquels on cherche seulement les premières fréquences propres.

Références

- [1] Batoz J.L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Volume II - poutres plaques*, Hermès, 1990.
- [2] Gibert R.J., *Vibrations des Structures - Interactions avec les fluides - Sources d'excitations aléatoires*, Eyrolles, 1988.
- [3] Szilard S., *Theory of plates*, Prentice Hall, New Jersey, 1974.
- [4] Gérardin M. et Rixen D., *Théorie des Vibrations - Application à la dynamique des structures*, Masson, 1997.