

**DYNAMIQUE des
STRUCTURES**

EQUATIONS de l'EQUILIBRE DYNAMIQUE MATRICES de MASSE

Introduction

Si les forces qui s'exercent sur la structure dépendent explicitement du temps t alors on est dans le domaine de la dynamique, à condition cependant que la plus basse fréquence de l'excitation ne soit pas inférieure (en gros) au $1/3$ de la plus basse fréquence propre de la structure, car dans ce cas on peut considérer le problème comme quasi statique, c'est-à-dire ignorer les forces d'inertie.

Ces forces ($m\gamma$) sont évidemment **réparties** puisque la masse l'est et une bonne part de l'art de l'ingénieur en dynamique réside dans la représentation adéquate de la masse souvent sous forme de masses concentrées. La MEF est en dynamique une méthode de répartition automatique de la masse aux nœuds de la discrétisation.

Classification, traitement des problèmes de dynamique

Selon la nature des forces excitatrices on distingue :

- a) les problèmes de propagation d'ondes,
- b) les problèmes de vibrations.

- Quand l'excitation est très brève (du type explosion ou impact 'dur') on est dans un problème de propagation (généralement celle des contraintes). Le temps d'analyse est très court, en principe celui que met l'onde pour traverser la structure. Les fréquences mises en œuvre sont hautes.

- Quand l'excitation est plus 'classique' (par exemple périodique, ou sismique, ou impact 'mou' (balle de tennis sur une raquette)).. on est dans un problème d'analyse dynamique. Ce type de problème peut être abordé par 2 voies, celles de :

- aa) l'analyse modale,
- bb) l'analyse par intégration directe dans le temps t.

Equation de la dynamique

Au travail virtuel des forces internes déjà définies dans la cas statique il convient d'ajouter celui des forces d'inertie qui s'écrit :

$$\int_V \rho \mathbf{u}^{*T} \ddot{\mathbf{u}} dv$$

Il peut être nécessaire d'intégrer le travail des forces d'amortissement qui représentent la dissipation induite par différentes sources physiques telles que les frottements (internes, solide-solide, solide-fluide...). Cette dissipation est difficile à quantifier; généralement on se contente de la représenter par un amortissement interne équivalent c'est-à-dire par le travail virtuel,

$$\int_V \eta \mathbf{u}^{*T} \dot{\mathbf{u}} dv$$

où η est un coefficient qui ne sera déterminé qu'au travers d'expérimentations. L'équation d'équilibre prend alors la forme,

$$\int_V \sigma^T \varepsilon^* dv + \int_V \rho \mathbf{u}^{*T} \ddot{\mathbf{u}} dv + \int_V \eta \mathbf{u}^{*T} \dot{\mathbf{u}} dv = T_{int}^* =$$

$$T_{ext}^* = \int_V \mathbf{u}^{*T} \mathbf{f}_v(t) dv + \int_S \mathbf{u}^{*T} \mathbf{f}_s(t) dS + \sum_i \mathbf{u}^{*T} \mathbf{f}_i(t)$$

Le travail virtuel des efforts appliqués peut résulter de forces volumiques (par exemple centrifuges), de forces surfaciques (pressions) ou enfin de forces ponctuelles, d'où les 3 représentations données ci-dessus.

Formulation EF

Les principes de la MEF en dynamique sont identiques à ceux définis en statique, à savoir : maillage en EF et interpolation nodale du champ de déplacements dans chaque EF indépendamment des autres. La différence fondamentale réside dans le fait que les déplacements des nœuds sont des fonctions inconnues du temps.

Pour un élément e défini par p nœuds (numéros $n_i = 1..n_p$), on écrit donc :

$$\vec{\mathbf{u}}^{(e)}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{N}_i(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{u}}_{n_i}^{(e)}(t) \rightarrow \vec{\mathbf{u}}^{(e)}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \sum_{i=1}^p \mathbf{N}_i(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{u}}_{n_i}^{(e)}(t) \dots$$

ou de façon matricielle,

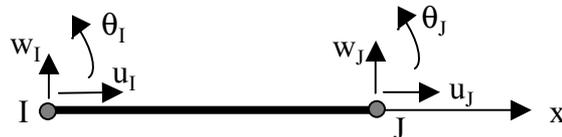
$$\vec{\mathbf{u}}^{(e)}(\vec{\mathbf{x}}, t) = |\mathbf{N}(\vec{\mathbf{x}})| \vec{\mathbf{u}}^{(e)}(t) \rightarrow \vec{\mathbf{u}}^{(e)} = |\mathbf{N}| \vec{\mathbf{u}}^{(e)} \rightarrow \vec{\mathbf{u}}^{(e)} = |\mathbf{N}|^{-1} \vec{\mathbf{u}}^{(e)}$$

Le travail virtuel 'élémentaire' correspondant aux forces d'inertie et/ou de dissipation devient :

$$\int_{el} \rho \vec{\mathbf{u}}^{*(e)T} \ddot{\vec{\mathbf{u}}}^{(e)} dV^{(e)} = \vec{\mathbf{u}}^{*(e)T} \left| \int_{el} \rho |\mathbf{N}|^{(e)T} |\mathbf{N}|^{(e)} dV^{(e)} \right| \ddot{\vec{\mathbf{u}}}^{(e)}$$

Matrices 'masse' d'une barre en traction compression

Considérons la barre (poutre) ci-dessous:



En traction-compression les degrés de liberté utiles sont u_1 et u_2 :

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = (1-x/L) u_1 + x/L u_2$$

La matrice des masses cohérentes de l'élément est,

$$|\mathbf{M}| = \int_0^L \rho S \begin{vmatrix} 1-x/L \\ x/L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-x/L & x/L \\ x/L & x/L \end{vmatrix} dx = \frac{m}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

avec $m = \rho SL$ masse totale de l'élément.

La matrice des masses concentrées est :

$$|\mathbf{M}| = \frac{m}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|M|^{(e)} = \left| \int_{el} \rho |N|^{(e)T} |N|^{(e)} dv^{(e)} \right|$$

est la matrice des masses 'cohérentes' de l'élément ; on voit en effet que cette matrice est en 'cohérence' avec l'approximation nodale.

Le même développement peut être suivi pour les forces de dissipation et conduit à :

$$\int_{el} \eta \vec{u}^{*(e)T} \dot{\vec{u}} dv^{(e)} = \vec{\ddot{u}}^{*(e)T} \left| \int_{el} \eta |N|^{(e)T} |N|^{(e)} dv^{(e)} \right| \vec{\ddot{u}}^{(e)}$$

$$|A|^{(e)} = \left| \int_{el} \eta |N|^{(e)T} |N|^{(e)} dv^{(e)} \right|$$

Dans cette approche la matrice d'amortissement $|A|$ n'est proportionnelle à $|M|$ que si η est proportionnel à ρ .

Le travail virtuel des efforts appliqués est calculé de la même façon qu'en statique.

A titre d'exemple nous pouvons donner la première fréquence longitudinale de la poutre encastree-libre modelisée par EF de longueur $L/2$.

$$|K| = \frac{2ES}{L} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad |M| = \frac{\rho SL}{12} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \det |K - M\omega^2| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 4a^2 - \frac{\omega^2}{3} & -2a^2 - \frac{\omega^2}{12} \\ -2a^2 - \frac{\omega^2}{12} & 2a^2 - \frac{\omega^2}{6} \end{vmatrix} = 0$$

avec $a^2 = E/\rho L^2$

La plus basse fréquence propre trouvée est $\Omega_1 = 1.61a$; la valeur théorique est $\pi a/2$.

Avec une matrice des masses concentrées la matrice masse devient

$$|M| = \frac{\rho SL}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{vmatrix} \rightarrow \det |K - M\omega^2| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 4a^2 - 0.5\omega^2 & -2a^2 \\ -2a^2 & 2a^2 - 0.25\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Cette fois $\Omega_1 = 1.53a$.

Rq : La précision n'est pas moins bonne mais la convergence est atteinte par valeurs inférieures contrairement au cas de la masse cohérente.

Assemblage

Les matrices élémentaires sont assemblées comme en statique. L'équation de base à résoudre a donc la forme :

$$|M|\ddot{\mathbf{u}} + |A|\dot{\mathbf{u}} + |K|\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{f}}_{eq}$$

M est la matrice masse de la structure, A celle de l'amortissement, K celle de raideur. \mathbf{u} est le vecteur des déplacements nodaux.

Le vecteur des efforts appliqués équivalents résulte, lui aussi, de l'assemblage des vecteurs élémentaires suivants :

$$\sum_{e'} \int_{V^{(e)}} |\mathbf{N}|^{(e)T} \ddot{\mathbf{f}}_v^{(e)}(t) dV^{(e)} \text{ et/ou } \sum_{e'} \int_S |\mathbf{N}|^{(e)T} \ddot{\mathbf{f}}_s^{(e)}(t) dS^{(e)} \text{ et/ou } \sum_{i'} \ddot{\mathbf{f}}_i(t)$$

e' ou i' éléments ou nœuds concernés par les efforts appliqués.

Conditions limites

Elles sont appliquées comme en statique pour éviter les mouvements du corps solide de la structure (fréquences nulles); il peut néanmoins arriver que cette structure soit effectivement libre dans l'espace et nous verrons plus loin comment traiter la question.

Matrices masse en flexion

Les degrés de liberté utiles sont w et θ ; comme on l'a vu l'approximation du déplacement est cubique ; la matrice masse cohérente est la suivante :

$$|M| = \frac{\rho S L}{420} \begin{vmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{sym} & & & 4L^2 \end{vmatrix}$$

Une matrice des masses concentrées serait singulière (pas de masse correspondant aux variables θ). Pour pallier cet inconvénient on a proposé :

$$|M| = \frac{m}{2} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \frac{17.5L^2}{210} & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{17.5L^2}{210} \end{vmatrix}$$

Le coefficient $17.5mL^2/420$ (ou $1/48$) correspond à l'inertie d'une barre de longueur $L/2$ et de masse $m/2$ tournant à une de ses extrémités $I = m/2 (L/2)^2/3$.



Si la masse associée à un d.d.l. i est faible, la force d'inertie correspondante peut être négligée en regard de la force élastique. En supposant regroupés de $i = p+1$ à n tous les d.d.l. dont on néglige les inerties. (indice ci-dessous 2), l'équation d'équilibre initiale **sans amortissement** peut être partitionnée en,

$$\begin{pmatrix} |M_{11}| & |M_{12}| \\ |M_{12}^T| & |M_{22}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |K_{11}| & |K_{12}| \\ |K_{12}^T| & |K_{22}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}$$

Les masses M_{22} , M_{12} sont donc négligées et seul reste l'équilibre statique pour ces d.d.l. ce qui donne,

$$\ddot{\mathbf{u}}_2 = -|K_{22}^T|^{-1}|K_{12}^T| \ddot{\mathbf{u}}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |I| \\ -|K_{22}^T|^{-1}|K_{12}^T| \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 = |R| \ddot{\mathbf{u}}_1$$

Cette relation permet l'élimination des d.d.l. $\ddot{\mathbf{u}}_2$. Les matrices K et M 'réduites' sont les suivantes :

$$|K_r| = |R|^T |K| |R|, |M_r| = |R|^T |M| |R|$$

Quelques remarques sur la réduction de Guyan:

a) Si M est la matrice diagonale des masses concentrées, les masses à négliger (ou nulles) sont plus faciles à détecter. En particulier il est clair que les inerties de rotation jouent rarement un rôle important.

b) La réduction n'est efficace, en termes de calcul, que si le nombre de d.d.l. après réduction est significativement plus petit que celui avant. En effet les matrices réduites n'ont pas de structure particulière.

c) Il existe une version 'automatique' de la réduction de Guyan qui s'appuie sur la détection successive des d.d.l. pour lesquels k_{ii}/m_{ii} sont les plus grands. Le test d'arrêt de cette procédure peut s'appuyer sur la notion de fréquence de coupure ω_c . En effet si le spectre des fréquences que contient l'excitation est fini, les fréquences de la structure qui sont largement supérieures à la plus haute fréquence de l'excitation (environ 3 fois) n'ont plus qu'un rôle statique et peuvent donc être éliminées de la réponse dynamique.

C'est pourquoi dans certains logiciels la condensation de Guyan s'arrête quand le plus grand $k_{rii}/m_{rii} < \omega_c^2$.

SOLUTIONS de l'EQUATION DYNAMIQUE

Fréquences et modes propres

L'équation fondamentale est tout d'abord traitée sans amortissement car celui-ci, on l'a vu, est difficile à quantifier.

On sait que la solution de cette équation est la superposition de la solution générale sans second membre et d'une solution particulière avec second membre.

La solution sans second membre est une somme de fonctions périodiques sinusoïdales dont les fréquences sont significatives de la structure et appelées fréquences propres ; en effet :

$$|M|\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + |K|\bar{\mathbf{u}} = 0 \rightarrow \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0 \sin \Omega t \rightarrow \left(|K| - |M|\Omega^2 \right) \bar{\mathbf{u}}_0 = 0$$

Les Ω qui conviennent sont ceux qui annulent le déterminant du système linéaire ci-dessus. On les note Ω_i , $i = 1, n$. La fonction associée $\bar{\mathbf{u}}_{0i}$ est, elle, notée $\bar{\phi}_i$.

Les modes ont une propriété remarquable appelée 'orthogonalité par rapport à K ou M ' et qui s'écrit :

Le plus petit Ω est appelé fréquence fondamentale. Des fréquences peuvent être multiples, en particulier si la structure possède des symétries.

La détermination des fréquences propres est un problème dit aux valeurs propres car $\left(|K| - |M|\Omega^2 \right) \bar{\mathbf{u}}_0 = 0$ peut être écrit :

$$\left(|Q|^T |Q| - |M|\Omega^2 \right) \bar{\mathbf{u}}_0 = 0 \rightarrow \frac{1}{\Omega^2} \mathbf{y}_0 = |Q|^{-T} |M| |Q|^{-1} \mathbf{y}_0 \text{ ou } \lambda \mathbf{y}_0 = |B| \mathbf{y}_0$$

La factorisation de K n'est possible que si elle n'est pas singulière. Une matrice raideur singulière c'est l'existence de modes de déplacements rigides dans l'espace, translations ou rotations, c'est-à-dire de fréquences propres nulles.

Pour éviter ces zéros plusieurs techniques sont possibles selon les méthodes retenues pour calculer les Ω . Dans le cas d'une recherche des valeurs propres par projections dans un sous espace (méthode qui ne factorise pas K , on peut translater le spectre en ajoutant $a^2 M$ à chaque membre de l'équation : les fréquences ne sont plus nulles mais égales à a ; cela s'obtient aussi en posant la structure sur des ressorts souples. On peut aussi éliminer les modes rigides en éliminant les équations superflues obtenues après une factorisation qui fait apparaître des 0 sur la diagonale.

$$\vec{\phi}_i^T |\mathbf{K}| \vec{\phi}_j = 0, \text{ ou } \vec{\phi}_i^T |\mathbf{M}| \vec{\phi}_j = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

Cette propriété est essentielle dans la simplification de la recherche de la solution générale.

Solution modale des équations avec second membre

Si nous recherchons la solution avec second membre sous la forme d'une combinaison des modes propres nous écrivons,

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n c_i(t) \vec{\phi}_i \rightarrow |\mathbf{M}| \sum_{i=1}^n \ddot{c}_i(t) \vec{\phi}_i + |\mathbf{K}| \sum_{i=1}^n c_i(t) \vec{\phi}_i = \vec{f}_{eq}$$

En prémultipliant par $\vec{\phi}_k$ compte tenu de l'orthogonalité il reste,

$$\ddot{c}_k (\vec{\phi}_k^T |\mathbf{M}| \vec{\phi}_k) + c_k (\vec{\phi}_k^T |\mathbf{K}| \vec{\phi}_k) = \vec{\phi}_k^T \vec{f}_{eq} = b_k \quad k = 1, n$$

b_k est la k ème composante modale de l'excitation.

a) L'orthogonalité des modes se démontre facilement ; par définition

$$-|\mathbf{M}| \omega_i^2 + |\mathbf{K}| \vec{\phi}_i^T = 0$$

mais aussi $-|\mathbf{M}| \omega_j^2 + |\mathbf{K}| \vec{\phi}_j = 0$

Par prémultiplication par $\vec{\phi}_j^T$ de la première et par $\vec{\phi}_i^T$ de la seconde, puis par soustraction on vérifie l'orthogonalité recherchée sachant que M ou K sont symétriques. $\vec{\phi}_i^T |\mathbf{K}| \vec{\phi}_j = \vec{\phi}_j^T |\mathbf{K}|^T \vec{\phi}_i = \vec{\phi}_j^T |\mathbf{K}| \vec{\phi}_i$

b) La recherche d'une « base modale complète », c'est-à-dire de tous les $\vec{\phi}_i$ serait un calcul considérable et sans intérêt ; pour savoir si le nombre de retenus à priori est convenable il peut être utile de calculer l'erreur faite par le rapport :

$$e(t) = \frac{\left\| \vec{f}_{eq} - |\mathbf{M}| \ddot{\vec{u}} - |\mathbf{K}| \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{f}_{eq} \right\|}$$

$e(t)$ de l'ordre de 1% est valable.

Les modes sont déterminés à un facteur près ce qui permet de poser,

$$\vec{\phi}_k^T |M| \vec{\phi}_k = 1 \rightarrow \vec{\phi}_k^T |K| \vec{\phi}_k = \omega_k^2$$

D'où

$$\ddot{c}_k + \omega_k^2 c_k = b_k$$

Les solutions de cette équation (découplées des autres) dépendent évidemment de la nature de b_k qui est soit périodique, soit impulsionnelle. Une formulation générale est celle de l'intégrale de Duhamel,

$$c_k = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t b_k(\tau) \sin \omega_k(t-\tau) d\tau$$

Cette intégrale peut être calculée numériquement. Une fois les c_k déterminés on obtient les déplacements primaires.

Cette méthode n'a d'intérêt que parce que les modes correspondants aux hautes fréquences n'interviennent que de façon faible dans la réponse ; ainsi seul un petit nombre de modes basses fréquences sont nécessaires : on écrit,

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{m \ll n} c_i(t) \vec{\phi}_i$$

Modification de la méthode modale

La méthode précédente n'est pas toujours satisfaisante quand il s'agit de représenter des modes quasi statiques. 2 solutions : soit augmenter m le nombre de modes, soit utiliser la méthode d'accélération modale qui consiste à ne projeter que la partie statique :

$$\vec{u} = |K|^{-1} \left(\vec{f}_{eq} - |M| \sum_{i=1}^m \ddot{c}_i \phi_i \right)$$

mais $\vec{\phi}_k^T |M| \vec{\phi}_k = 1 \rightarrow |M| \vec{\phi}_k = \vec{\phi}_k^{-T}$

$$\vec{\phi}_k^T |K| \vec{\phi}_k = \omega_k^2 \rightarrow \frac{1}{\omega_k^2} \vec{\phi}_k = |K|^{-1} \vec{\phi}_k^{-T} = |K|^{-1} |M| \vec{\phi}_k$$

donc $\vec{u} = |K|^{-1} \vec{f}_{eq} - \sum_{i=1}^m \phi_i \omega_i^{-2} \ddot{c}_i$

Dans cette formulation la part quasi statique est représentée par le 1er terme du second membre, alors que le second donne la correction dynamique; la méthode exige que K ne soit pas singulière. Si la distribution des efforts dynamiques est fixée et que varie donc seulement l'amplitude en fonction de t , alors la méthode est particulièrement intéressante puisque $\vec{f}_{eq}(t) = a(t) \vec{f}_{0eq}$ ce qui réduit tous les calculs à une seule résolution.

Introduction de l'amortissement

L'intérêt de la méthode modale c'est le découplage des équations lié à l'orthogonalité et la réduction des d.d.l. Si la matrice d'amortissement $|A|$ est quelconque il n'y a plus de découplage car toutes les équations modales sont couplées par l'amortissement : $\vec{\phi}_k^T |A| \vec{\phi}_k$ est une matrice pleine.

Si le nombre de modes retenus est faible ce n'est pas un inconvénient majeur, s'il est plus élevé cela peut devenir gênant.

Comme l'amortissement visqueux représenté par $|A|$ n'est qu'un amortissement équivalent on dispose d'une assez grande latitude et une solution proposée a été de supposer $|A|$ proportionnelle à $|K|$ et $|M|$. De cette façon l'orthogonalité est préservée car :

$$\vec{\phi}_k^T |A| \vec{\phi}_k = \vec{\phi}_k^T |\alpha K + \beta M| \vec{\phi}_k = \alpha \omega_k^2 + \beta$$

L'équation modale devient,

$$\ddot{c}_k + \left(\alpha \omega_k + \frac{\beta}{\omega_k} \right) \dot{c}_k + \omega_k^2 c_k = b_k$$

Elle n'est pas beaucoup plus compliquée à résoudre. (voir commentaires)

L'amortissement proportionnel à K et M est appelé amortissement de Rayleigh. Les coefficients α et β sont souvent déterminés expérimentalement à partir de mesures faites à 2 fréquences de fonctionnement assez bien séparées pour couvrir le spectre de fréquences maximum. On pose souvent $\xi_k = (\alpha \omega_k + \beta / \omega_k) / 2$ et l'intégrale de Duhamel correspondante est :

$$c_k = \frac{1}{\bar{\omega}_k} \int_0^t b_k(\tau) e^{-\bar{\omega}_k(t-\tau)} \sin \bar{\omega}_k(t-\tau) d\tau$$

$\bar{\omega}_k$ est la fréquence propre du système amorti.

Systèmes à grand nombre de d.d.l

Si la modélisation par EF a conduit à un nombre élevé de d.d.l. le calcul des fréquences et modes propres peut devenir prohibitif bien que des techniques très performantes soient aujourd'hui à la disposition des usagers.

Plusieurs solutions sont alors possibles qui sont :

- a) la méthode de Guyan déjà présentée
- b) la méthode des vecteurs de Ritz
- c) la méthode des sous structures.

Nous présentons brièvement les 2 dernières.

Méthode des vecteurs de RITZ

Le principe est assez analogue à celui de la base modale; la solution est exprimée au moyen d'un nombre limité de vecteurs (dits de Ritz) *qui ne sont pas orthogonaux*. Dans cette méthode il faut que l'excitation résulte d'une superposition de charges, dont on connaît la distribution spatiale autrement dit que,

$$\vec{\mathbf{f}}_{\text{eq}}(t) = \sum_j a_j(t) \vec{\mathbf{f}}_{j\text{eq}}$$

Les vecteurs de Ritz, notés $\vec{\psi}_{js}$, sont obtenus comme suit pour chaque chargement j :

$$|\mathbf{K}| \vec{\psi}_{j1} = \vec{\mathbf{f}}_{j\text{eq}}$$

Normer ce vecteur $\vec{\psi}_{j1}$ par rapport à la masse $\vec{\psi}_{j1}^T |\mathbf{M}| \vec{\psi}_{j1} = 1$

Continuer la construction de vecteurs de Ritz $\vec{\psi}_{jk}$ $k = 2, p$ par résolution de,

$$|\mathbf{K}| \vec{\psi}_{jk} = |\mathbf{M}| \vec{\psi}_{jk-1}$$

Chaque nouveau vecteur est, via M, orthogonalisé aux autres,

$$\vec{\psi}_{jk} = \vec{\psi}_{jk} - \sum_{p=1}^{k-1} \vec{\psi}_{jp}^T |\mathbf{M}| \vec{\psi}_{jk} \vec{\psi}_{jp}$$

puis normé par rapport à M, c'est-à-dire, $\vec{\psi}_{jk}^T |\mathbf{M}| \vec{\psi}_{jk} = 1$.

Les matrices sont alors projetées dans la base des vecteurs de Ritz, ce qui conduit à résoudre un système de dimensions réduites; on a,

$$|\mathbf{K}_{rj}| = |\Psi_j|^T |\mathbf{K}_j| |\Psi_j|, |\mathbf{I}| = |\Psi_j|^T |\mathbf{M}| |\Psi_j|, |\mathbf{A}_{rj}| = |\Psi_j|^T |\mathbf{A}_j| |\Psi_j|, \vec{\mathbf{f}}_{rj} = |\Psi_j|^T \vec{\mathbf{f}}_{j\text{eq}}$$

$|\Psi_j|$ est la matrice qui regroupe tous les vecteurs de Ritz du chargement j, rangés en colonnes.

Les déplacements sont de la forme : $\vec{\mathbf{u}} = \sum_j \vec{\mathbf{u}}_j = \sum_j |\Psi_j| \mathbf{y}_j$ \mathbf{y}_j satisfaisant l'équation :

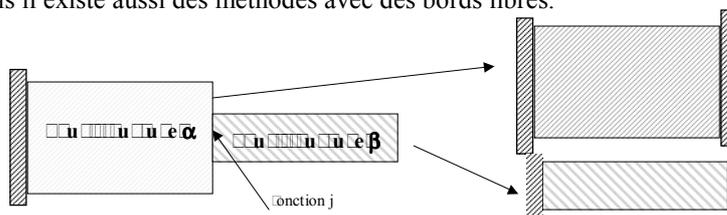
$$\vec{\mathbf{y}}_j + |\mathbf{A}_{rj}| \vec{\mathbf{y}}_j + |\mathbf{K}_{rj}| \vec{\mathbf{y}}_j = \vec{\mathbf{f}}_{rj}$$

Sous structures

De nombreuses structures sont constituées de différentes parties qui sont ensuite assemblées entre elles (exemples : étages d'un lanceur, fuselage et ailes d'avions, etc.)

Dans l'analyse par sous structures chacune des parties est étudiée séparément des autres à l'aide d'une représentation par des vecteurs soit modaux, soit de Ritz mais spécifiques. L'ensemble est ensuite réuni pour une étude globale. Il existe de nombreuses méthodes de représentation des sous structures.

La plus connue est celle dite de Craig et Bampton qui s'appuie sur des modes propres et statiques des sous structures encastrées sur les contours communs, mais il existe aussi des méthodes avec des bords libres.



Nous présentons la méthode de Craig et Bampton sur le cas simple de 2 structures α , β , possédant une frontière commune Γ . Les degrés de liberté d'une des 2 composantes sont partitionnés dans les degrés de liberté i -intérieurs- et j de jonction. L'équation matricielle du mouvement de la composante α (resp β) est :

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ M_{ji} & M_{jj} \end{bmatrix}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i^{(\alpha)} \\ \ddot{\mathbf{u}}_j^{(\alpha)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^{(\alpha)} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^{(\alpha)} \\ \mathbf{u}_j^{(\alpha)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{(\alpha)} \\ \mathbf{f}_j^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

Les déplacements de cette composante sont représentés par un ensemble de modes dits 'contraints' et normaux, ce qui se traduit par $\mathbf{u}^{(\alpha)} = |\Phi|^{(\alpha)} \mathbf{q}^{(\alpha)}$

Les modes normaux sont les modes propres de la sous structure encastrée sur sa jonction avec l'autre. Les modes contraints sont des modes statiques obtenus toujours en encastrant la sous structure sur sa jonction mais en libérant successivement un seul des d.d.l. de jonction pour lui imposer un déplacement unité.

Le travail virtuel de la structure totale est exprimé dans les bases réduites de chacune des sous structures, c'est-à-dire que,

$$\delta W_{int} = \delta \mathbf{q}^{(\alpha)T} |M_r|^{(\alpha)} \ddot{\mathbf{q}}^{(\alpha)} + \delta \mathbf{q}^{(\alpha)T} |K_r|^{(\alpha)} \mathbf{q}^{(\alpha)} + \delta \mathbf{q}^{(\beta)T} |M_r|^{(\beta)} \ddot{\mathbf{q}}^{(\beta)} + \delta \mathbf{q}^{(\beta)T} |K_r|^{(\beta)} \mathbf{q}^{(\beta)}$$

avec $|M_r| = |\Phi|^T |M| |\Phi| \dots$

Le travail virtuel externe s'exprime aussi dans la base projetée par: $\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^{(\alpha)T} |\Phi|^{(\alpha)} \mathbf{f}^{(\alpha)}$

Les relations à l'interface sont : $\ddot{\mathbf{u}}_j^{(\alpha)} = \ddot{\mathbf{u}}_j^{(\beta)}$, $\mathbf{f}_j^{(\alpha)} = \mathbf{f}_j^{(\beta)}$ et se projettent aussi dans la base réduite. Elles interviennent comme des équations supplémentaires de liaison. L'équilibre ne fait donc plus intervenir que les degrés de liberté $\mathbf{q}^{(\alpha)}$ ou $\mathbf{q}^{(\beta)}$.