

Méthode des Eléments Finis :

Convergence et Erreurs

L. CHAMPANEY et Ph. TROMPETTE

Dans ce chapitre, nous présentons les caractéristiques d'une solution éléments finis ainsi que les conditions de convergence vers la solution exacte du problème. Nous donnons ensuite un aperçu des estimateurs d'erreur existants. Nous finissons par expliquer les méthodes d'adaptation de maillages.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Convergence | 2 |
| 2.1 | Caractéristiques de la solution EF | 3 |
| 2.2 | Les conditions de convergence | 3 |
| 2.3 | Le patch test | 4 |
| 3 | Les erreurs | 6 |
| 3.1 | Classification des erreurs | 6 |
| 3.2 | Estimation de l'erreur de discrétisation | 6 |
| 3.3 | Quelques propriétés des solutions | 9 |
| 3.4 | Principe et utilisation de l'estimation d'erreur a posteriori | 10 |
| 4 | Comment converger - convergence pratique | 12 |
| 4.1 | Processus de convergence | 12 |
| 4.2 | Adaptation de maillages | 12 |
| 5 | Conclusion | 17 |

1 Introduction

Dans la plupart des cas de structures réelles, la solution obtenue par éléments finis n'est pas la solution exacte du problème. Les sources d'imprécision sont nombreuses et variées ; elles ne tiennent pas seulement au fait que le modèle mathématique ne traduit pas la réalité physique mais elles proviennent aussi de la mise en oeuvre de la MEF qui comporte des imprécisions :

- erreurs de modélisation géométrique du domaine,
- erreurs numériques d'arrondi,
- erreurs de l'approximation polynomiale.

Cette dernière catégorie est généralement prédominante et mérite les commentaires les plus approfondis. C'est elle qui est principalement analysée dans la suite.

Globalement, l'erreur dite *de discrétisation* peut être étudiée à différents niveaux : au niveau des déplacements ou au niveau des contraintes dans leur ensemble et pour chaque élément. Les mathématiques permettent de définir une majoration de l'erreur de discrétisation. Cette majoration prend en compte de degré le l'interpolation et les dimensions des éléments finis mais elle n'est pas utilisable en pratique car elle dépend d'un constante multiplicative en général inconnue.

La solution pratique consiste donc à utiliser des *estimateurs d'erreur a posteriori* de l'erreur de discrétisation, fondés sur les résultats du calcul.

Dans ce qui suit, les notions de convergence, puis d'erreurs et enfin de stratégies pour converger sont analysées d'un point de vue plutôt pratique que théorique.

2 Convergence

Par convergence, on entend l'évolution des résultats EF vers les résultats vrais quand on améliore la représentation du problème par les EF. Les facteurs qui peuvent contribuer à faire converger les résultats sont :

- l'évolution du maillage, c'est à dire le nombre des éléments ou plutôt leur taille. C'est ce qu'on appelle la convergence h , h étant un scalaire qui représente la taille des éléments.
- le degré p d'interpolation du polynôme caractéristique de l'élément appelé la convergence p .

On dit d'un processus de raffinement de maillage qui conduit à des résultats plus exactes qu'il est h convergent et d'un processus d'augmentation du degré de l'interpolation qui produit le même effet qu'il est p convergent.

Si le code de calcul EF permet un enrichissement aisé du nombre de degrés de liberté il est dit *adapté* ; si cet enrichissement est automatique il est dit *auto-adapté*.

L'incertitude qui préside encore aujourd'hui à une bonne estimation de l'erreur dans bon nombre de cas signifie qu'il ne faut pas tout attendre d'un programme EF *boîte noire* auto-adapté.

2.1 Caractéristiques de la solution EF

Dans une solution analytique théorique d'un problème d'élasticité, n'importe quel élément différentiel du milieu continu est en équilibre et les conditions de compatibilité en déformation et en contraintes sont satisfaites. Dans une solution EF, toutes ces propriétés ne sont pas satisfaites.

Nous introduisons ici quelques définitions ou notions d'équilibre et de compatibilité nodale de la solution qui permettent de mieux comprendre la convergence des résultats EF vers les résultats vrais. Pour une bonne solution EF :

- il y a équilibre nodal des forces : il est exprimé par la vérification de l'équilibre :

$$[K]\{q\} = \{f\}$$

- il y a généralement compatibilité nodale, ce qui signifie que les déplacements aux noeuds communs à plusieurs éléments sont les mêmes,
- il n'y a pas équilibre au passage de la frontière entre deux éléments,
- il n'y a pas toujours et obligatoirement compatibilité au passage d'une frontière entre deux éléments. On peut utiliser des éléments incompatibles mais leur nombre ne peut pas devenir trop important.
- l'équilibre n'est, en général pas vérifié dans un élément ; par contre, la compatibilité l'est puisque les approximations sont polynomiales.

2.2 Les conditions de convergence

Si un maillage éléments finis est raffiné en utilisant toujours le même type d'éléments, il est possible de donner des conditions pour que la suite de solutions approchées ainsi créée converge vers la solution vraie.

Remarquons tout de suite que ces conditions ne disent rien sur la précision.

Nous avons limité ces remarques au champ de la mécanique des structures en statique. Si m représente l'ordre de dérivation dans les termes de l'énergie de déformation, la solution EF converge vers la solution vraie si :

Condition 1 Dans l'élément, le champ approché contient un polynôme complet d'ordre m . Cela signifie que mes éléments doivent pouvoir traduire un état de déplacements rigides ou un état de déformations constantes.

Condition 2 Au passage des frontières inter-élément, la continuité du champ doit être assurée jusqu'à l'ordre $m - 1$. La compatibilité inter-élément est donc nécessaire quand le maillage se raffine, au moins une compatibilité asymptotique.

Condition 3 Supposons que les conditions aux limites d'un problème d'élasticité soient telles que les fonctions solutions et leurs dérivées soient constantes jusqu'à l'ordre m , alors quand le maillage est raffiné, chaque élément doit tendre vers une solution à valeurs constantes.

2.3 Le patch test

Initialement proposé par IRONS, ce test donne les conditions suffisantes de convergence de la solution EF. Il peut, par extension, donner aussi des conditions nécessaires. C'est un test purement numérique dont la validation théorique a été apportée par STRANG.

2.3.1 Mise en oeuvre

On considère un ensemble d'éléments, ensemble tel qu'il y ait au moins un point intérieur, donc qu'il y ait au moins une frontière inter-élément (Fig. 1). Le chargement et les conditions aux limites sont telles que la solution théorique soit un état de déformations constantes.

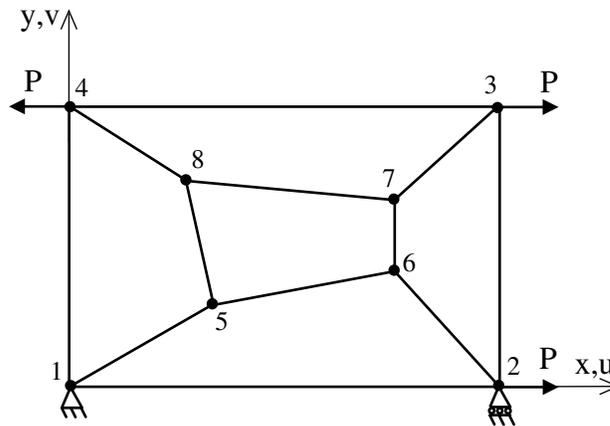


FIG. 1 – Exemple de patch test plan

2.3.2 Les différentes versions

La multiplication des éléments finis utilisant des modes incompatibles ou des techniques d'intégration réduite ont conduit les praticiens du patch test à raffiner sa définition. Les différentes formes concernent essentiellement les conditions aux limites.

On appelle *test standard* (ou **version 1**) celui pour lequel les déplacements sont imposés sur tous les noeuds extérieurs; il faut remarquer que les champs de déplacements ne sont pas forcément simples, par exemple :

$$u = xy \quad v = -\frac{x^2 + y^2}{2}$$

La **version 2** impose des conditions aux limites en déplacement qui empêche les mouvements de corps rigides et des conditions en effort qui induisent l'état de contrainte désiré. Cette version a l'avantage de détecter les modes parasites ou virtuels créés par les

états de déformation sans énergie associée auxquels correspondent des singularités de la matrice de raideur.

Il existe une **version 3** dans laquelle les déplacements extérieurs sont spécifiés. Le test est passé si les déformations sont correctes et les forces sont nulles aux noeuds intérieurs.

Il se peut que des éléments relativement grands ne produisent pas un état de déformation constant alors que les conditions extérieures l'imposent. Mais si le maillage est raffiné par subdivisions successives et que les éléments tendent vers cet état, on dit que le test est vérifié **faiblement**, ce qui assure la convergence vers des valeurs correctes.

2.3.3 Le patch test comme preuve de la convergence

Du point de vue de l'ingénieur, le patch test peut être vu comme une condition suffisante de convergence.

La condition suffisante n'est pas trop difficile à comprendre. En effet, si le maillage est supposé indéfiniment raffiné et si les déformations sont continues et bornées partout dans la structure, alors les déformations dans chaque élément vont devenir de plus en plus uniforme au fur et à mesure que la taille des éléments diminue. La part non uniforme des déformations disparaît. Comme le patch test, s'il est positif, assure que les éléments donnent des résultats corrects pour tout état de déformation constant quelle que soit la forme de élément, on voit bien qu'il garantit la convergence.

Evidemment, la condition de déformations continues et bornées exclut un certain nombre de situations qui seront vues en exemple (géométries discontinues, efforts ponctuels, matériaux différents...).

Il est plus difficile d'établir que le patch test est une condition nécessaire de convergence.

2.3.4 Conclusions sur le patch test

Actuellement, la règle qui devrait être universellement adoptée est de considérer comme douteux tous les éléments qui ne satisfont pas au patch test sous ses différentes formes, même si les résultats obtenus sont corrects, car ces résultats peuvent être dépendants du maillage.

3 Les erreurs

3.1 Classification des erreurs

Comme on l'a dit dans l'introduction, il est possible de classer les erreurs en différents types. Certaines erreurs sont évitables d'autres sont inévitables.

L'erreur de modélisation qui consiste à ne pas utiliser les bonnes hypothèses dans la modélisation du problème réel. Cette erreur est très difficile à chiffrer. On peut classer dans ce groupe l'erreur qui consiste à ne pas utiliser le bon type d'élément (barre, poutre, plaque, massif, ...), qui fait partie des erreurs évitables.

L'erreur de discrétisation est la plus commune et la plus étudiée (voir ce qui suit) : elle provient, comme son nom l'indique, de l'approximation d'un système continu (un milieu continu ici, décrit par un nombre infini de paramètres) par un système discret (décrit par un nombre fini de paramètres).

L'erreur d'arrondi est due au nombre de digits qui représente un réel. Cette erreur est de moins en moins significative sur les machines de calcul actuelles.

L'erreur de calcul est liée à l'erreur d'arrondi et elle est introduite par l'algorithme. La plus classique de ces erreurs est celle qui est générée par un mauvais conditionnement numérique de la matrice de raideur. Ce conditionnement est souvent relié à la taille des éléments ou à la nature des structures étudiées ce qui rejoint l'erreur de modélisation. On a vu, dans le cas des conditions aux limites imposées par une méthode de pénalité, qu'une très forte disparité dans l'amplitude présente dans les termes de la matrice peut générer ce mauvais conditionnement. Il en résulte qu'une petite erreur d'arrondi dans le calcul peut conduire à une forte erreur sur la solution. Ce mauvais conditionnement peut donc être rencontré dans le cas de structures comportant des parties très raides et des parties très souples.

3.2 Estimation de l'erreur de discrétisation

3.2.1 Les types d'estimateurs

Les estimateurs d'erreurs qui commencent à être implantés dans des codes de calcul industriels, peuvent être classés en trois catégories :

- les estimateurs basés sur le lissage des champs de contraintes [1, 2],
- les estimateurs fondés sur les résidus des équations d'équilibre [3],
- les estimateurs basés sur le concept d'erreur en relation de comportement [4].

La littérature scientifique est assez abondante sur le sujet. Une bibliographie assez complète est donnée dans les comptes rendus d'une journée ϕ^2AS sur le sujet. Par ailleurs, l'IPSI organise un cours sur le thème en octobre 2002 [5].

3.2.2 Les qualités d'un bon estimateur

On pourrait dire qu'un bon estimateur est un estimateur qui fonctionne dans toutes les situations. Malheureusement, un tel estimateur pleinement fiable en dynamique et en

statique non linéaire est encore à trouver et à tester sur des exemples industriels. En statique linéaire, les estimateurs à la fois bons pour un jugement global et pour la qualité locale de la solution ne sont pas légion. Cette carence à la fois théorique et pratique doit rendre les utilisateurs plus vigilants quant à l'utilisation de codes *transparentes* au plan du maillage.

Les qualités d'un bon estimateur sont donc les suivantes :

1. la fiabilité : un bon estimateur doit donner une bonne approximation de l'erreur réelle, estimé à partir :
 - du rapport θ entre l'erreur estimée et l'erreur réelle appelé *indice d'effectivité*,
 - de l'écart type σ_θ des indices d'effectivité de chaque élément appelé *indice d'uniformité*.

$$\sigma_\theta = \frac{1}{n_{el}} \left(\sum_{i=1}^{n_{el}} (\bar{\theta} - \theta_i)^2 \right)^{1/2}$$

Les valeurs acceptables de θ et de σ_θ sont :

$$0.8 \leq \theta \leq 1.2 \quad \sigma_\theta \leq 1.2$$

Il serait toute de même préférable pour l'ingénieur que θ soit supérieur à 1.

2. la convergence asymptotique $\theta \rightarrow 1$ et $\sigma_\theta \rightarrow 0$ quand la dimension h des éléments tends vers zéro,
3. la non dépendance à la valeur de paramètres physiques : modules d'Young, coefficient de Poisson, ...
4. la faible dépendance à la distorsion des éléments
5. l'adaptation à tout type de maillage,
6. l'universalité pour différents types de problèmes,
7. une insertion facile dans un code,
8. une adaptation facile avec des procédures correctives,
9. une évaluation à faible coût de calcul,
10. la possibilité de tester les déplacements, les contraintes ou d'autres qualités.

Discuter de chacune de ces qualités demande un développement spécifique qui sort du cadre de ce cours.

3.2.3 Les défauts d'équilibre

Pour simplifier la présentation, on se limite au cas statique. Supposons que le problème à résoudre soit :

$$Ku = f$$

avec les conditions aux limites

$$Du = \beta$$

Les notations sont usuelles : \mathbf{u} le vecteur des déplacements exacts, $\boldsymbol{\sigma}$ celui des contraintes exactes. La solution EF donne \mathbf{u}_h et $\boldsymbol{\sigma}_h$.

Le défaut d'équilibre ponctuel en déplacement de la solution EF est donné par le résidu :

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{u}_h - \mathbf{f}$$

le défaut d'équilibre à la frontière par

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\beta}$$

le saut de traction à l'interface Γ^{mn} entre les éléments m et n ,

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{u}_h^m - \mathbf{D}\mathbf{u}_h^n$$

Toutes ces notions peuvent servir d'indicateur d'erreur mais ne la mesurent pas directement.

L'erreur peut être définie ponctuellement en déplacement ou en contrainte :

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_h) = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h$$

Il est souvent plus facile de manipuler les normes de l'erreur. Diverses normes sont possibles, les plus usuelles trouvées dans la littérature sont les normes L_p , les normes p Sobolev ou la norme énergétique.

Dans les normes L_p on trouve :

$$\|\mathbf{e}_h\|_{L^\infty} = \text{Max}(\mathbf{e}_h) \quad \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_h)\|_{Linfy} = \text{Max}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_h))$$

ou

$$\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_h)\|_{L_2} = \left\{ \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_h)^t \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{e}_h) dV \right\}^2$$

Cette dernière norme est dépendante du repère de calcul et, malgré sa simplicité, n'est pas satisfaisante. On lui préférera de beaucoup :

$$\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_h)\|_E = \left\{ \int_V \boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{e}_h) \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{kl}(\mathbf{e}_h) dV \right\}^2$$

appelée norme en énergie. \mathbf{C} représente l'opérateur de comportement élastique du matériau. Cette dernière norme est intéressante pour les mécaniciens car elle mesure aussi l'erreur sur l'énergie de déformation.

Certains utilisent aussi l'erreur en relation de comportement [4] :

$$\|e_{rdc}\| = \int_v (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h))^t \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{C}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h)) dV$$

3.3 Quelques propriétés des solutions

3.3.1 Propriétés de la solution EF

Au premier chapitre, nous avons vu que le problème de statique linéaire vérifie l'équation :

$$\int_V (Bu)^t CB \delta u dV = \int_V f_v^t \delta u dV + \int_S f_s^t \delta u dS$$

dont la traduction par éléments finis est :

$$\delta \bar{u}^t K \delta \bar{u} - \delta \bar{u} f_{equiv} = 0$$

qui s'écrit sous la forme :

$$a(u, \delta u) = a(u, v) = (f, \delta u) = (f, v)$$

a est une forme bilinéaire et f une forme linéaire. v est arbitraire pourvu qu'il vérifie les conditions aux limites.

La solution EF, u_h vérifie donc :

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h)$$

et v étant arbitraire, on peut prendre $v = v_h$ et donc par soustraction on obtient pour l'erreur locale $e_h = u - u_h$ la propriété suivante :

$$a(e_h, v_h) = 0$$

qui signale que l'erreur est *orthogonale* aux v_h .

Le théorème des travaux virtuels a, lui, une autre traduction qui est celle de la minimisation de l'énergie potentielle totale :

$$J(u) = \text{Min} J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) \quad v \in U$$

dont la solution EF est :

$$J(u_h) = \text{Min} J(v_h) \quad v_h \in U_h$$

A partir de là, on peut démontrer que :

$$a(e_h, e_h) = \text{Min} a(u - v_h, u - v_h), \quad v_h \in U_h$$

ce qui signifie que l'erreur de la solution éléments finis est énergiquement minimale dans l'espace des champs de déplacement EF.

Si on remarque que l'interpolation de la solution exacte (noté u_I) est aussi cinématiquement admissible, on peut alors l'utiliser à la place de v_h , ce qui donne :

$$a(e_h, e_h) \leq a(e_I, e_I)$$

Cela signifie que, du point de vue de l'erreur en énergie, l'interpolant de la solution exacte n'est pas meilleur que la solution EF elle-même, bien qu'il soit meilleur du point de vue des déplacements nodaux.

3.3.2 Superconvergence nodale

L'erreur exacte dépend, on l'a vu, d'un certain nombre de paramètres dont le plus important est le maillage. Il est donc impossible de la calculer sans une connaissance a priori de la solution exacte, mais celle-ci est inconnue ! Pour sortir de ce cercle vicieux, on est conduit à formuler des hypothèses sur ce que cette solution exacte pourrait être.

Les deux hypothèses les plus couramment admises sont les suivantes :

H1 La solution EF coïncide avec la solution exacte en tout point \mathbf{P} du maillage : $\mathbf{u}_{h\mathbf{P}} = \mathbf{u}_{\mathbf{P}}$. Cette hypothèse est appelée *hypothèse de superconvergence nodale du champ des déplacements*.

H2 La solution exacte est de degré $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ dans chaque élément de degré \mathbf{p} . C'est l'hypothèse que la solution exacte est polynomiale ou hypothèse du *développement de Taylor*.

L'hypothèse de superconvergence nodale a été démontrée dans certains cas. L'hypothèse **H2** est assez facilement compréhensible puisque toute fonction peut être développée en série de Taylor.

3.3.3 Superconvergence en contrainte

Mathématiquement, il a été démontré par HINTON que l'erreur totale du champ des contraintes est minimisée au sens des moindres carrés pondérés par la solution EF. Or, une fonction qui en approxime une autre au sens des moindres carrés, est souvent une solution qui oscille autour des valeurs de la fonction qu'elle veut approcher. En clair, cela veut dire que le champ des contraintes obtenu par EF peut rencontrer les valeurs du champ vrai en certains points de l'élément ou qu'il existe des points pour lesquels les contraintes EF sont plus précises.

Ces points de croisement ou de rapprochement des solutions sont appelés *points de superconvergence du champ des contraintes*. Ils dépendent évidemment du type d'élément choisi. Ils peuvent aussi ne pas exister. Pour certains éléments, ils sont confondus avec les points de Gauss, pour d'autres non.

Les points de superconvergence en contrainte font l'objet de nombreuses recherches et la littérature sur ce sujet est très abondante.

3.4 Principe et utilisation de l'estimation d'erreur a posteriori

3.4.1 Principe

On part de la définition de l'erreur en norme énergétique en modifiant l'écriture précédente :

$$\|e_h\| = \left(\int_V e_\sigma^t C^{-1} e_\sigma \right)^{1/2}$$

(ou avec toute autre norme).

Ensuite, on cherche à remplacer le champ de contrainte vrai σ inconnu par un champ approché $\hat{\sigma}$ obtenu à partir du champ EF soit par une amélioration quelconque des résultats soit encore par un calcul en des points où les contraintes sont les plus précises (points de superconvergence).

3.4.2 Utilisation

De nombreuses méthodes de construction du champ $\hat{\sigma}$ existe. Les champs ainsi construits ont plus ou moins de signification.

Dans le cas des estimateurs de Zienkiewicz [1, 2], le champ $\hat{\sigma}$ est obtenu par lissage du champ des contraintes EF.

On peut aussi utiliser des techniques de projection qui consistent à annuler ou à minimiser des quantités du genre :

$$\int_V P^t(\hat{\sigma} - \sigma_h) dV$$

où P est un projecteur à choisir.

Dans le cas de l'erreur en relation de comportement, le champs $\hat{\sigma}$ est reconstruit de manière à être statiquement admissible. Cela est réaliés en écrivant des conditions d'équilibre sur les bords des éléments. Le champ doit absolument être statiquement admissible pour que l'erreur en relation de comportement ait un sens mécanique.

4 Comment converger - convergence pratique

4.1 Processus de convergence

Par processus de convergence, il faut entendre évolution des résultats EF vers des résultats vrais. Les facteurs qui peuvent contribuer à faire converger les résultats EF sont :

- l'évolution du maillage, c'est-à-dire la taille (et donc le nombre des éléments) encore appelée *convergence h* ,
- le degré, d'approximation du polynôme caractéristique de l'élément (appelé la *convergence p*),
- le positionnement de noeuds.

Quelques auteurs ont étudié l'influence du positionnement des noeuds ; il a été montré que pour un maillage donné ce ne sont pas les éléments les plus réguliers qui donnent les meilleurs résultats, ce qui montre *a contrario* la difficulté du problème. Des travaux en cours portent sur un meilleur repositionnement à partir de l'étude des défauts d'équilibre interne.

Du point de vue de l'utilisateur, la convergence p est relativement limitée. Les codes de calcul laissent en général à l'utilisateur le choix entre éléments linéaires et éléments quadratiques. Utiliser un ordre de polynôme plus élevé revient à créer un nouvel élément et touche profondément au logiciel du point de vue du développement. Il n'existe pas, à notre connaissance, de code de calcul industriel qui pratique de l'amélioration de solution par la méthode p en allant vers des degrés de polynômes élevés.

La méthode h est la plus en vogue actuellement, car il est relativement simple de générer des éléments de tailles voulues. La gamme de tailles accessibles est très vaste.

4.2 Adaptation de maillages

4.2.1 Généralités

La procédure d'adaptation peut être réalisée manuellement par l'utilisateur qui adapte son maillage en fonction des gradients de contraintes qu'il observe, des zones de concentration de contraintes, des zones de singularités, ... (Voir à ce sujet l'application industrielle proposée à la fin de l'exemple de la *plaque trouée*).

Lorsque le maillage sert pour résoudre plusieurs problèmes (plusieurs physiques par exemple), il se peut qu'il ne soit pas adaptable pour chacune des physiques. C'est un problème évoqué dans le chapitre sur les couplages thermo-mécaniques.

Les techniques qui semblent les plus prometteuses actuellement sont les techniques dites de *maillage adaptatif automatique* qui s'appuient sur un estimateur d'erreur pour construire un maillage adapté. Leur processus de fonctionnement est décrit sur la figure 2.

L'utilisateur demande une précision pour son calcul. Un premier maillage uniforme est généré. Une estimation d'erreur est effectuée ; elle conduit à la génération d'une carte

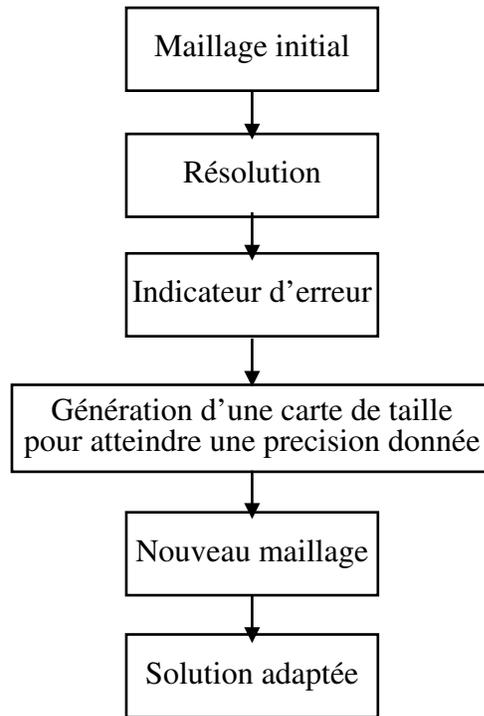


FIG. 2 – Processus d'adaptation de solution

de modification de taille des éléments. Cette carte indique au mailleur les réductions ou augmentations de tailles de maille à effectuer. Un nouveau maillage *adapté* est généré par le mailleur qui respecte la carte de taille. La solution finale peut être calculée.

Cette stratégie repose sur deux outils essentiels :

- un estimateur d'erreur fiable capable de calculer aussi bien une erreur globale (pour la comparer à l'erreur demandée par l'utilisateur) qu'une erreur locale (pour construire la carte de modification de tailles).

De tels estimateurs existent, on l'a vu, et commencent à être implantés dans les codes de calcul industriels. Par contre, la relation qui lie une carte d'erreur à une carte de taille reste encore empirique.

- un mailleur sachant construire un maillage en s'appuyant sur une carte de tailles et surtout en la respectant.

De tels mailleurs existent en dimension deux seulement. Lorsque les modifications de tailles sont trop importantes, il peut être nécessaire de procéder à une étape intermédiaire utilisant un maillage adapté pour une erreur supérieure à l'erreur demandée, afin de limiter le travail de modification de taille demandé au mailleur.

En dimension trois, les mailleurs savent respecter des cartes de taille sur les frontières mais pas encore à l'intérieur du volume. On procède alors à un découpage de la structure de manière à générer des frontières internes sur lesquelles on impose la taille des mailles. Cette procédure de découpe est appelée méthode des *octrees*.

4.2.2 Adaptation globale

Adaptation directe La figure 3 présente le maillage initial sur un simple problème de flexion. Le maillage initial comporte 60 éléments triangulaires à six noeuds (soit **151noeuds**). Un estimateur en relation de comportement [4] donne **6.6%** d'erreur pour ce maillage initial.

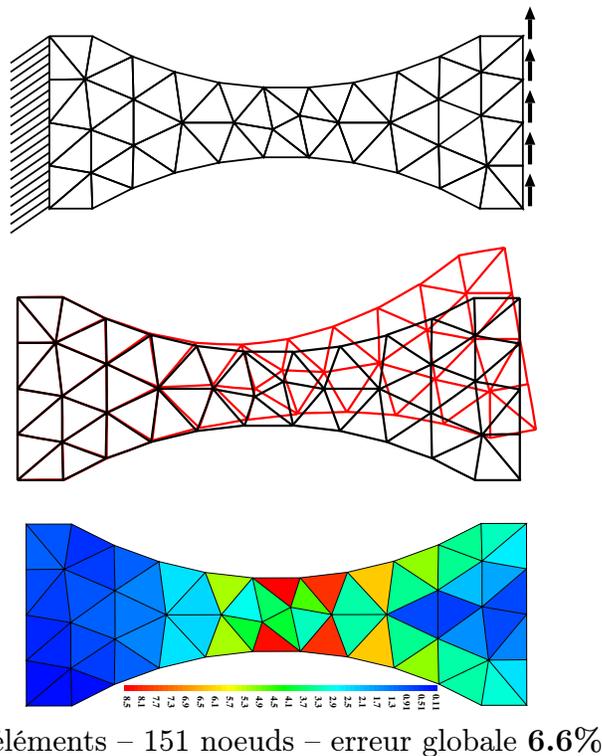


FIG. 3 – Problème de flexion, déformée et contrainte équivalente de Von Mises

La figure 4 présente le maillage adapté pour une précision de **2%** demandée par l'utilisateur (Source E. Florentin - LMT Cachan [4]). Elle présente aussi la *carte des contributions à l'erreur*. On constate que l'erreur est uniformément répartie sauf bien sur dans les zones de singularité à l'encastrement où il n'est pas envisageable d'espérer obtenir un maillage correct.

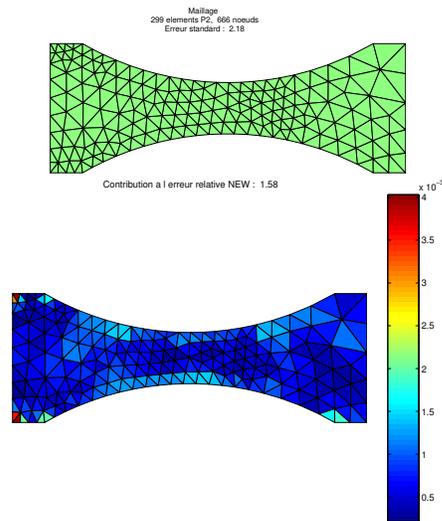


FIG. 4 – Carte d’erreur sur le maillage adapté en global

Adaptation en plusieurs étapes Lorsque le problème est plus compliqué, il se peut que le mailleur ne soit pas capable de respecter la carte de tailles. On réalise alors l’adaptation en plusieurs phases. Par exemple, la figure 5 présente un cas d’optimisation de maillage qui a nécessité trois phases d’adaptation pour atteindre une erreur globale souhaitée de 5% en partant d’un maillage initial avec 73% d’erreur (Source E. Florentin - LMT Cachan [4]).

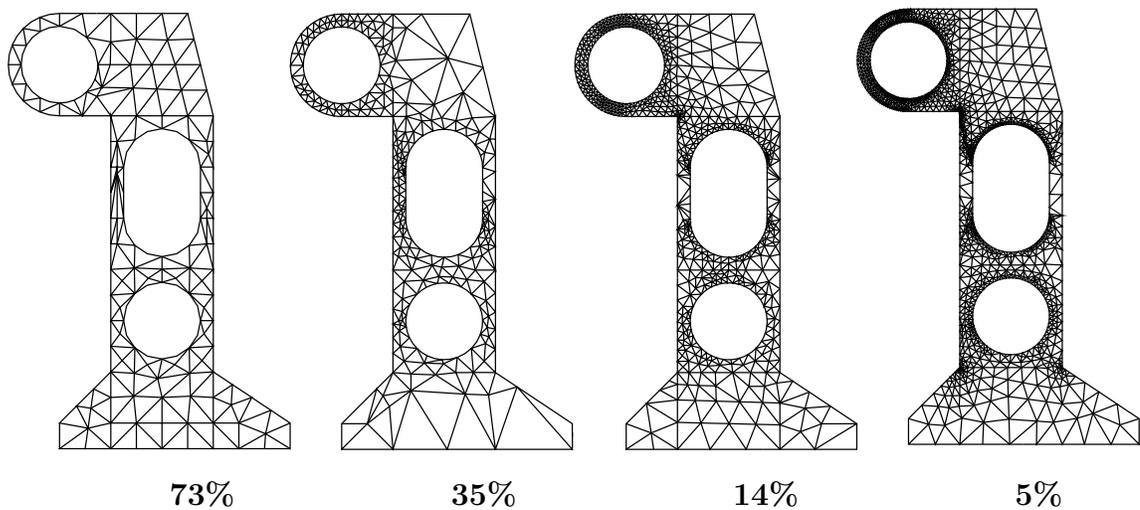


FIG. 5 – Trois phases d’adaptation d’un maillage

4.2.3 Adaptation locale

Un très vaste sujet de recherche actuel est celui des estimations d'erreurs locales. On sait à l'heure actuelle qu'il est possible d'obtenir une précision donnée dans une zone d'intérêt seulement tout en ayant une précision très inférieure (et donc un maillage grossier) dans le reste de la structure.

En reprenant l'exemple de la figure 3, on cherche maintenant à obtenir une précision de **1%** sur la zone entourée sur la figure 6.

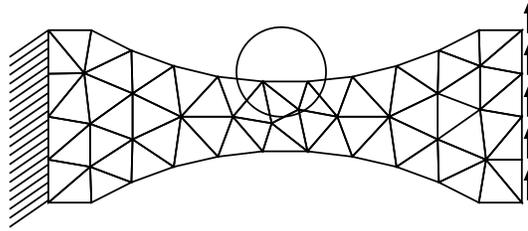


FIG. 6 – Zone demandée pour une adaptation locale

La figure 7 présente le maillage adapté localement par un estimateur en relation de comportement (Source E. Florentin - LMT Cachan [4]). On constate que l'on obtient bien moins de **1%** d'erreur dans la zone considérée alors que l'erreur peut dépasser les **10%** dans le reste de la structure. L'erreur globale est de **6.2%**. Par ailleurs, le maillage contient moins de degrés de liberté (**299** noeuds) que le maillage adapté globalement pour **2%** d'erreur (qui contenait **666** noeuds).

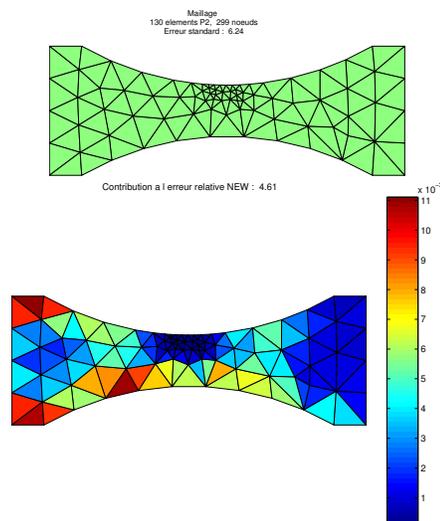


FIG. 7 – Carte d'erreur sur le maillage adapté en local

5 Conclusion

Nous avons présenté quelques résultats sur la convergence de la méthode de éléments finis. Il semble que les éléments utilisés dans les codes de calcul industriels passent les différentes formes du patch test.

En ce qui concerne l'estimation des erreurs, le problème est plus délicat et il y a moins de certitudes. Il existe un certain nombre d'estimateurs qui sont toujours en cours de développement et de validation. Aucun d'entre eux ne se dégage pour l'instant en satisfaisant tous les critères de qualité énoncés dans ce chapitre : fiabilité, robustesse, simplicité, ...

Leur introduction progressive dans les codes de calcul va sans doute permettre de mieux appréhender les qualités et les défauts de chacun.

Si vous désirez en savoir (beaucoup) plus sur l'estimation des erreurs, nous vous invitons à assister ou à vous reporter au cours IPSI d'octobre 2002 [5].

Références

- [1] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : *The Finite Element Method Volume 1 : The Basics*, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [2] Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z., A simple error estimator for practical engineering analysis, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **24**, 337–357, 1987
- [3] Babuska O.C. and Zhu J.Z., A posteriori estimates for the finite element method, *Int. J. Num. Meth. Engng*, **12**, 1597–1615, 1978
- [4] Ladevèze P. et Pelle J.P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermes-Lavoisier, 2001.
- [5] Pelle J.P., Beckers P. et Gallimard L., Contrôle de la qualité des calculs éléments finis, Cours IPSI, 15–16 octobre, Paris, 2002.