

# Approximation Nodale Elémentaire :

## Les différents types d'éléments

L. CHAMPANEY

Dans cette partie, nous montrons quels sont les éléments nécessaires à la définition d'un élément fini. Ensuite, nous passons en revue les différents modèles mécaniques utilisés en calcul des structures et les formulations éléments finis associées.

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Repères utilisés . . . . .	2
1.2	Espace de référence . . . . .	2
1.3	Bilan . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Eléments structuraux 1D</b>	<b>10</b>
2.1	Généralités . . . . .	10
2.2	Modèle Barre . . . . .	10
2.3	Modèle Poutre . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Eléments bidimensionnels</b>	<b>21</b>
3.1	Modèle plan . . . . .	21
3.2	Modèle axisymétrique . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Eléments massifs tridimensionnels</b>	<b>28</b>
4.1	Modélisation . . . . .	28
4.2	Eléments finis tridimensionnels . . . . .	28
4.3	Bilan . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Eléments structuraux 2D</b>	<b>32</b>
5.1	Eléments plaques . . . . .	32
5.2	Eléments coques . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>37</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Repères utilisés

Dans cette partie, nous considérons différents modèles mécaniques et les formulations éléments finis associées. Pour ce faire, il faut définir différents repères géométriques de travail.

On appelle repère global, le repère dans lequel est définie la structure étudiée (Fig. 1). Il est défini par les directions  $(x, y, z)$ .

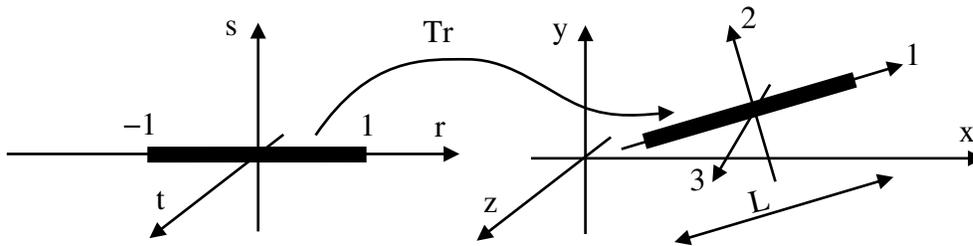


FIG. 1 – Repères utilisés

Pour les éléments structuraux, il est nécessaire de définir un repère local lié à l'élément de structure considéré (*barre, poutre, plaque, ...*). Ce repère est noté  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$  et les coordonnées dans ce repère  $x_1, x_2$  et  $x_3$  (Fig. 1).

Dans la méthode des éléments finis, les éléments sont définis dans un repère local de référence associé à tous les éléments du même type. Dans ce repère  $(r, s, t)$ , l'élément de référence a une taille et une forme fixées simples. Tous les éléments du même type dans le maillage lui sont associés par une transformation géométrique  $Tr$  (Fig. 1). L'utilisation du repère de référence est décrit au paragraphe suivant.

Dans la suite, on utilise les notations définies dans le premier chapitre pour les contraintes et les déformations :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{xy} \rangle$$

et

$$\{\epsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{array} \right\}$$

## 1.2 Espace de référence

### 1.2.1 Définition

La plupart du temps, tous les éléments d'un maillage sont différents. Ainsi, les fonctions de bases ne sont pas identiques sur les éléments. De plus, l'intégration des termes de raideur sur un élément de taille et d'orientation quelconques peut être compliquée.

Alors tous les codes éléments finis utilisent la notion d'élément de référence. Il s'agit d'un élément aux formes et dimensions simples, dans un espace de référence, qui est commun à tous les éléments du même type (voir figure 2).

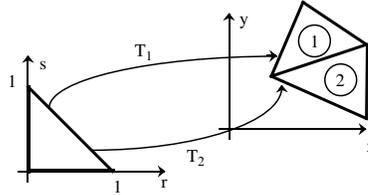


FIG. 2 – Élément de référence et transformation géométrique

Les éléments réels sont définis à partir de l'élément de référence par une transformation géométrique définie par les positions des nœuds dans l'espace réel.

Dans l'espace de référence :

- sont données les fonctions de base. Elles sont alors communes à tous les éléments.

Dans ce chapitre, les fonctions de base éléments finis sont notées :

$$N_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t), N_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t), N_3(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t), \dots$$

- sont réalisées les intégrations, grâce à la propriété suivante entre l'élément de surface ou de volume dans l'espace réel et dans l'espace de référence (ici en 2D) :

$$\int_{\Omega_e} f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{\Omega_{ref}} f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) J_T(\mathbf{r}, \mathbf{s}) drds$$

où  $J_T$  est le jacobien de la transformation géométrique.

### 1.2.2 Passage à l'élément réel

La transformation géométrique permet de calculer la position d'un point dans l'espace réel  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  à partir de sa position dans l'espace de référence  $(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  et des positions des nœuds de l'élément dans l'espace réel  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ . Elle est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(M) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(M) \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}(M) &= \sum_{i=1}^n \phi_i(M) \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \mathbf{y}_i \end{aligned}$$

à l'aide des fonctions  $\phi_i$  qui sont les *fonctions de forme*. Elles sont définies sur l'élément de référence et de leur degré dépend la transformation :

- Si les  $\phi_i$  sont linéaires en  $r$  et en  $s$ , alors l'élément réel reste droit (Fig. 3).

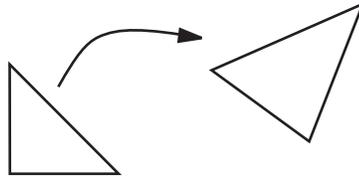


FIG. 3 – Transformation avec des fonctions de forme linéaires

- Si les  $\phi_i$  sont quadratiques en  $r$  et en  $s$ , alors l'élément réel peut avoir des bords en arc de parabole (Fig. 4).

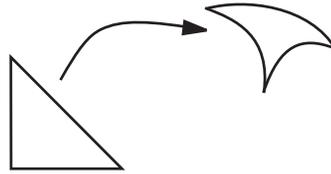


FIG. 4 – Transformation avec des fonctions de forme quadratiques

- et ainsi de suite...

L'utilisation d'éléments à bords courbes permet, par exemple, de limiter les problèmes de couverture de domaine (Fig. 5).

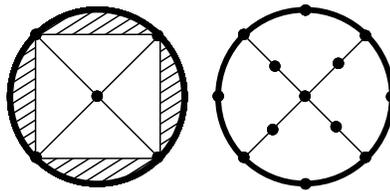


FIG. 5 – Couverture d'un domaine circulaire avec des éléments à bords droits et avec des éléments à bords courbes

### 1.2.3 Types d'élément

En théorie, il existe trois types d'éléments paramétriques possibles en fonction du degré des fonctions de forme par rapport au degré des fonctions de base :

- éléments *isoparamétriques* : degré  $\phi_i =$  degré  $N_i$ .

- éléments *sousparamétriques* : degré  $\phi_i <$  degré  $N_i$ .
- éléments *surparamétriques* : degré  $\phi_i >$  degré  $N_i$ .

En pratique, on utilise surtout des éléments isoparamétriques pour lesquels fonctions de base et fonctions de forme sont identiques (voir figure 6). C'est pour cela que les termes *fonctions de base* et *fonctions de forme* sont en général équivalents.

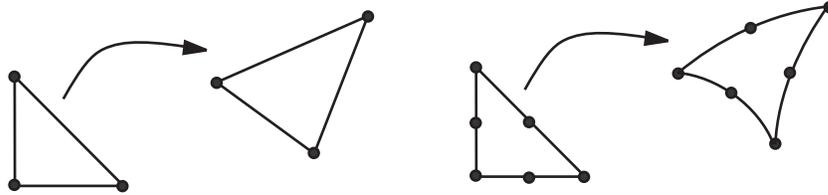


FIG. 6 – Triangles isoparamétriques à trois et six noeuds

Dans la suite, nous allons montrer comment sont calculées les matrices de raideurs élémentaires pour les éléments paramétriques.

Les quelques paragraphes qui suivent sont un peu calculatoires et la suite du cours ne nécessite par leur compréhension fine. Il est possible de sauter jusqu'aux prochaines formules encadrées...

#### 1.2.4 Calcul des déformations (2D)

**Notations** On adopte la notation standard pour l'expression des déformations sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Les deux composantes du déplacement sont :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_i = \{N^t\} \{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{v}_i = \{N^t\} \{\mathbf{v}\}$$

Et les fonctions de forme permettent d'obtenir la position de tout point en fonction des positions des noeuds :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{x}_i = [\phi]^t \{\mathbf{x}\}$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{y}_i = [\phi]^t \{\mathbf{y}\}$$

**Transformation** La dérivation dans l'élément réel s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}}$$

Et le passage de l'élément réel à l'élément de référence s'obtient par le *jacobien* de la transformation :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{s}} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{J}]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \end{Bmatrix}$$

Les composantes de la matrice Jacobienne  $[\mathbf{J}]$  sont calculées comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{x}_i = \{\phi_{,r}\}^t \{\mathbf{x}\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{x}_i = \{\phi_{,s}\}^t \{\mathbf{x}\}$$

donc, la matrice Jacobienne est :

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \{\phi_{,r}\}^t \{\mathbf{x}\} & \{\phi_{,r}\}^t \{\mathbf{y}\} \\ \{\phi_{,s}\}^t \{\mathbf{x}\} & \{\phi_{,s}\}^t \{\mathbf{y}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\phi_{,r}\}^t \\ \{\phi_{,s}\}^t \end{bmatrix} [ \{\mathbf{x}\} \quad \{\mathbf{y}\} ]$$

et son inverse :

$$\begin{aligned} [J]^{-1} &= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \{y\}^t \{\phi_{,s}\} & -\{y\}^t \{\phi_{,r}\} \\ -\{x\}^t \{\phi_{,s}\} & \{x\}^t \{\phi_{,r}\} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \{y\}^t \\ -\{x\}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_{,s}\} & -\{\phi_{,r}\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\det J = \{x\}^t \begin{bmatrix} \{\phi_{,r}\} \{\phi_{,s}\}^t & -\{\phi_{,s}\} \{\phi_{,xi}\}^t \end{bmatrix} \{y\}^t$$

**Déformations** Les dérivées de la composante  $u$  du champ de déplacement se calculent par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} u &= [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{pmatrix} u \\ &= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \{y\}^t \\ -\{x\}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_{,s}\} & -\{\phi_{,r}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{N_{,s}\}^t \\ \{N_{,s}\}^t \end{bmatrix} \{u\} \\ &= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \{y\}^t \\ -\{x\}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_{,s}\} \{N_{,s}\}^t & -\{\phi_{,r}\} \{N_{,s}\}^t \end{bmatrix} \{u\} \\ &= \frac{1}{\det J} [D] \{u\} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det J} [\mathcal{D}] \{q\} \end{aligned}$$

où  $\{q\}$  est le vecteur des inconnues nodales. Donc, le vecteur des déformations s'écrit :

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{\det J} [A] [\mathcal{D}] \{q\}$$

qu'on écrit sous la forme :

$$\{\epsilon\} = [B] \{q\}$$

Cette notation de la matrice qui permet de passer des déplacements nodaux aux déformations (en incluant ou non le passage par un espace de référence) est relativement standard en France.

### 1.2.5 Calcul des contraintes

En utilisant la notation vectorielle, le vecteur de contraintes décrit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

et la relation de comportement est :

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}$$

L'énergie de déformation locale s'écrit alors :

$$\{\epsilon\}^t [C] \{\epsilon\}$$

### 1.2.6 Matrice de rigidité élémentaire

Par définition de la matrice de rigidité élémentaire, l'énergie de déformation de l'élément s'écrit :

$$E_{de} = \frac{1}{2} \{q\}^t [K_e] \{q\}$$

En appliquant les notations des paragraphes précédents, on obtient

$$\begin{aligned} E_{de} &= \frac{1}{2} \int_{e_{reel}} \{\epsilon\}^t [C] \{\epsilon\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{e_{reel}} \{q\}^t [B]^t [C] [B] \{q\} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \{q\}^t \left[ \int_{e_{reel}} [B]^t [C] [B] dx dy \right] \{q\} \end{aligned}$$

Soit pour la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K_e] = \int_{e_{reel}} [B]^t [C] [B] dx dy$$

La matrice  $[B]$  s'écrit à partir des fonctions de forme  $(\phi_i)$ , des fonctions de base  $(N_i)$  et des coordonnées de noeuds. C'est donc une fonction de  $\mathbf{r}$  et de  $\mathbf{s}$ . Dans le cas (le plus courant) où les paramètres matériaux sont constants sur l'élément, les termes à intégrer sont donc des fonctions de  $\mathbf{r}$  et de  $\mathbf{s}$  seulement. Il s'avère donc possible de calculer les termes de raideur élémentaires directement sur l'élément de référence car l'intégration sur l'élément s'écrit :

$$\int_{e_{reel}} d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int_{e_{ref}} (\det J) d\mathbf{r}d\mathbf{s}$$

donc :

$$[K_e] = \int_{e_{ref}} [B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)]^t [C] [B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)] (\det J) d\mathbf{r}d\mathbf{s}$$

L'expression de la matrice de rigidité est une intégrale de fonctions des variables  $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  de l'espace de référence à intégrer sur l'élément de référence. La forme de cet élément étant simple, le calcul de l'intégrale peut être réalisé sans trop de difficulté. La technique d'intégration est détaillée dans le chapitre suivant.

Il faut par ailleurs remarquer que si le comportement élastique est variable sur l'élément (matériau non homogène), la matrice  $[C]$  devra elle aussi être exprimée dans le repère de référence :

$$[K_e] = \int_{e_{ref}} [B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)]^t [C(\mathbf{r}, \mathbf{s})] [B(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)] (\det J) d\mathbf{r}d\mathbf{s}$$

### 1.3 Bilan

Dans cette première partie, nous avons montré que les ingrédients nécessaires à la définition d'un élément finis sont :

- la formulation mécanique : barre, poutre, massif, plaque, ...
- la cinématique : déplacement, rotation, ...
- l'expression des déformations,
- l'expression de l'énergie de déformation,
- la définition géométrique de l'élément dans l'espace de référence,
- l'approximation nodale,
- les fonctions de base, exprimées dans le repère de référence.

Nous tentons, dans les paragraphes suivants de donner les ingrédients listés ci-dessus, pour différents types d'éléments couramment rencontrés en mécanique.

## 2 Eléments structuraux 1D

### 2.1 Généralités

Les éléments structuraux unidimensionnels (*barres* et *poutre*) sont des solides tridimensionnels dont une des dimensions (la direction axiale) est prépondérante prépondérante les deux autres.

L'hypothèse de la *résistance des matériaux* faite sur ces solides est que les sections qui sont de petite taille restent rigides. C'est à dire que le solide peut être représenté par sa seule ligne moyenne, qui est en général le lieu géométrique des centres des sections. Lorsque le mouvement de solide rigide d'une section (exprimé au centre de la section) est connu, il est possible de calculer le déplacement de tout point de la section.

### 2.2 Modèle Barre

#### 2.2.1 Définition

La particularité d'une barre est que le chargement extérieur est tel que ce solide ne se déforme qu'en traction ou en compression. Son comportement est assimilable à celui d'un ressort. Les barres sont les éléments qui sont utilisés dans les treillis.

La formulation barre est la plus simple qui soit. Elle permet de bien comprendre l'approximation nodale élémentaire en éléments finis.

#### 2.2.2 Cinématique

La cinématique d'une barre est représentée par une seule composante  $u$  qui est le déplacement axial des sections de la barre (Fig. 7) :

$$\vec{u}(G) = \vec{u}(M) = u(x_1)\vec{x}_1$$

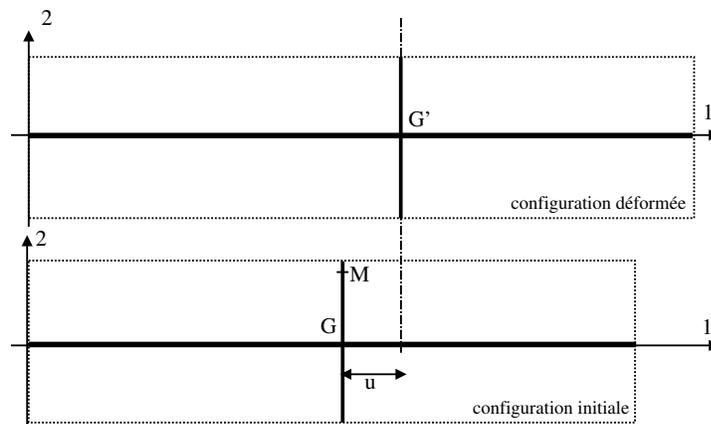


FIG. 7 – Cinématique d'une barre

### 2.2.3 Déformations

Il n'y a donc qu'une seule composante de déformation qui s'appelle l'élongation :

$$\epsilon = \frac{du}{dx}$$

### 2.2.4 Contraintes

Concernant les contraintes, il n'y a qu'une composante appelée *effort normal* qui représente la résultante des efforts normaux appliqués sur une section  $S$  de la barre :

$$N = \int_S \sigma_{11} dS$$

La loi de comportement élastique s'écrit :

$$N = ES\epsilon$$

où  $E$  est le module d'Young et  $S$  la section de la barre.

Une fois que l'effort normal  $N$  est connu, la contrainte normale en tout point de la section peut être calculée :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S}$$

### 2.2.5 Energie de déformation

L'énergie de déformation s'exprime de la manière suivante :

$$E_d = \int_0^L N\epsilon dx_1 = \int_0^L ES\epsilon^2 dx_1 = \int_0^L ES\left(\frac{du}{dx_1}\right)^2 dx_1$$

### 2.2.6 Repère global

De manière générale, la barre peut être orientée de manière quelconque dans l'espace (Fig. 8). Pour assurer la continuité du déplacement entre deux barres adjacentes, ayant éventuellement des orientations différentes, les composantes de déplacement considérées sont celles exprimées dans le repère global. Le déplacement axial est calculé en fonction du déplacement global des points et de l'orientation de la barre.

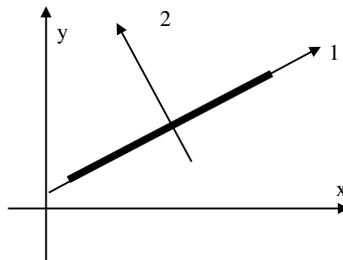


FIG. 8 – Repère local - Repère global

### 2.2.7 Éléments Finis Barres

L'approximation nodale élémentaire porte sur la composante axiale du déplacement  $\mathbf{u}$ . Dans la suite, l'approximation nodale est présentée sur l'élément barre de référence dans le repère de référence  $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$  (Fig. 9).

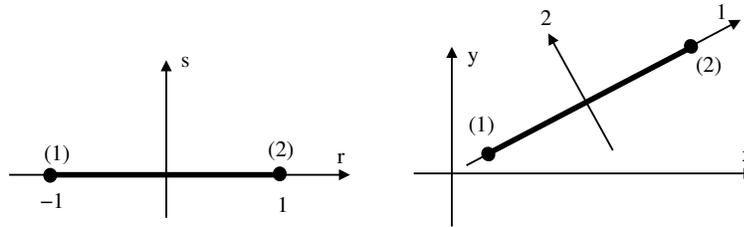


FIG. 9 – Elément *barre*

Si l'interpolation est linéaire, elle s'écrit :

$$u(r) = ar + b = \frac{1-r}{2}u_1 + \frac{1+r}{2}u_2$$

où  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont les déplacements axiaux nodaux des deux noeuds situés aux extrémités de la barre.

Dans le cas général d'une barre dans l'espace, les déplacements axiaux sont exprimés en fonction des déplacements globaux. Les degrés de liberté sont donc :  $\mathbf{u}_{x1}$ ,  $\mathbf{u}_{y1}$  ( $\mathbf{u}_{z1}$ ) les déplacements du noeud (1) et  $\mathbf{u}_{x2}$ ,  $\mathbf{u}_{y2}$  ( $\mathbf{u}_{z2}$ ) les déplacements du noeud (2).

Dans les codes de calcul, on rencontre aussi des éléments finis barres à trois noeuds pour lesquels, l'interpolation du déplacement axial est quadratique :

$$u(r) = ar^2 + br + c$$

où les trois constantes sont exprimées à partir des déplacements des noeuds extrémités et du noeud central.

### 2.2.8 Bilan

Le tableau 1 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments *barre* et le repère dans lequel elles sont exprimées.

Elément	Quantités	Noms	Qualité	Repère
Barre 2 noeuds	Déplacement	$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y (\mathbf{u}_z)$	linéaire	global
	Déformation	$\epsilon$	constant	local
	Effort	$\mathbf{N}$	constant	local
	Contrainte	$\sigma_{xx}$	constant	local
Barre 3 noeuds	Déplacement	$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y (\mathbf{u}_z)$	quadratique	global
	Déformation	$\epsilon$	linéaire	local
	Effort	$\mathbf{N}$	linéaire	local
	Contrainte	$\sigma_{11}$	linéaire	local

TAB. 1 – Eléments Finis Barre

## 2.3 Modèle Poutre

### 2.3.1 Définition

Une poutre est un solide tridimensionnel dont une des dimensions (la direction axiale) est prépondérante devant les deux autres. En dimension deux, une poutre peut accepter trois modes de sollicitations :

- Traction-compression,
- Cisaillement,
- Flexion dans le plan (1, 2).

Les comportements de flexion et de cisaillement sont regroupés car ils sont étroitement liés.

Sous l'hypothèse des petites perturbations et lorsque la ligne moyenne passe par le centre des sections les trois types de comportement peuvent être découplés. La solution complète peut être obtenue par superposition des solutions obtenues pour les trois types de sollicitations.

Le comportement en traction est le même que celui d'une barre. L'approximation nodale du problème de traction est donc la même que celle présentée ci-dessus.

Nous ne détaillons donc ci-dessous que les comportements en cisaillement et en flexion en commençant par la dimension deux.

### 2.3.2 Cinématique (dimension deux)

Il existe deux types de cinématiques pour les poutres

- la cinématique de MIDLIN/REISSNER/TIMOSHENKO dont le principe de base est *les sections droites avant déformation restent droites après déformation*
- la cinématique de BERNOULLI/EULER/NAVIER dont le principe de base est *les sections droites avant déformation restent droites et normales à la ligne moyenne après déformation*

Compte tenu des hypothèses cinématiques, le déplacement de tout point d'une section se déduit du déplacement du centre de la section et de la rotation de la section (Fig. 10) :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(G) + \vec{\Omega} \wedge G\vec{M}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{u}(G) &= u\vec{x}_1 + v\vec{x}_2 \\ \vec{\Omega} &= \theta_f\vec{x}_3 \end{aligned}$$

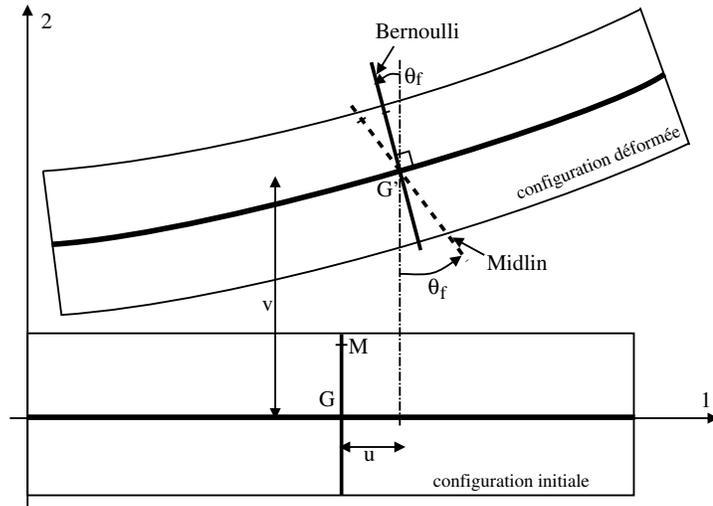


FIG. 10 – Cinématique poutre de Bernoulli et de Midlin

### 2.3.3 Déformations (dimension deux)

les déformations calculées à partir de la cinématique précédente sont :

– la déformation de cisaillement :

$$\gamma = -\theta_f + \frac{dv}{dx_1}$$

– la courbure :

$$\chi_f = \frac{d\theta_f}{dx_1}$$

Dans la théorie de BERNOULLI, la déformation de cisaillement est négligée :

$$\gamma = 0 \Leftrightarrow \theta_f = \frac{dv}{dx_1}$$

ce qui exprime bien que les sections droites restent normales à la ligne moyenne après déformation.

### 2.3.4 Contraintes (dimension deux)

Les contraintes sont représentées par les efforts intérieurs qui sont le torseur des efforts appliqués sur la section et calculé au centre de la section. Dans le cas de la flexion, la composante de moment utile est le moment fléchissant :

$$M_f = \int_S -x_2 \sigma_{11} dS$$

et la relation de comportement élastique en flexion s'écrit :

$$M_f = EI \chi_f$$

où  $E$  est le module d'Young et  $I$  le moment quadratique de la section :

$$I = \int_S x_2^2 dS$$

Une fois que le moment fléchissant  $M_f$  est connu, la contrainte normale en tout point d'ordonnée  $y$  de la section peut être calculée (Fig. 11) :

$$\sigma_{11} = -\frac{M_f}{I}x_2$$

Cette répartition linéaire de la contrainte normale dans l'épaisseur de la poutre est une hypothèse qui coïncide avec la solution analytique 3D de flexion pure (solution de St Venant).

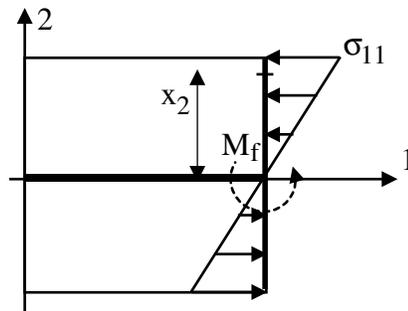


FIG. 11 – Répartition de la contrainte normale

Lorsqu'il y a superposition de traction et de flexion (Fig. 12), on a :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} - \frac{M_f}{I}x_2$$

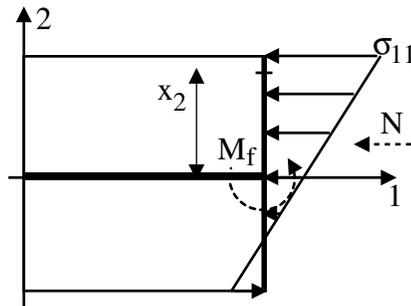


FIG. 12 – Répartition de la contrainte normale (traction + flexion)

En ce qui concerne, les autres composantes d'effort intérieur, l'effort tranchant  $T$

$$T = \int_S \sigma_{12} dS$$

dépend du type de cinématique :

- MIDLIN : l'effort tranchant est calculé par la relation de comportement :

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}S_r\gamma$$

où  $\mathbf{G}$  est le module de cisaillement du matériau et  $S_r$  la section réduite.

- BERNOULLI : l'effort tranchant est calculé par la relation d'équilibre :

$$\mathbf{T} + \frac{dM_f}{dx_1} = \mathbf{0}$$

### 2.3.5 Energie de déformation

L'énergie de déformation est composée de termes dépendant de chacun des modes de déformation. Elle dépend donc de la cinématique employée :

- MIDLIN : l'énergie contient un terme de traction, un terme de cisaillement et un terme de flexion :

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^L (\mathbf{N}\epsilon) + (\mathbf{T}\gamma) + (M_f\chi_f) dx_1 \\ &= \int_0^L (\mathbf{E}S\epsilon^2) + (\mathbf{G}S_r\gamma^2) + (\mathbf{E}I\chi_f^2) dx_1 \end{aligned}$$

- BERNOULLI : l'énergie ne contient qu'un terme de traction et un terme de flexion :

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^L (\mathbf{N}\epsilon) + (M_f\chi_f) dx_1 \\ &= \int_0^L (\mathbf{E}S\epsilon^2) + (\mathbf{E}I\chi_f^2) dx_1 \end{aligned}$$

### 2.3.6 Repère global

En général, la barre peut être orientée de manière quelconque dans l'espace (Fig. 8). Le déplacement axial est alors calculé en fonction du déplacement des points ( $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ ) et la rotation de la section ( $\omega_z$ ) exprimés dans le repère global.

### 2.3.7 Éléments finis poutre de Midlin

L'approximation nodale porte sur le déplacement et sur la rotation de la section :

$$\begin{aligned} v &= ar + b = \frac{1-r}{2}v_1 + \frac{1+r}{2}v_2 \\ \theta_f &= cr + d = \frac{1-r}{2}\theta_1 + \frac{1+r}{2}\theta_2 \end{aligned}$$

On définit ainsi une approximation linéaire du déplacement et de la rotation sur l'élément.

### 2.3.8 Eléments finis poutre de Bernoulli

L'approximation nodale porte aussi sur le déplacement et sur la rotation de la section, mais les deux sont liés. Ils ne peuvent pas être approximés de manière indépendante. La solution choisie est la suivante :

$$\begin{aligned} v &= ar^3 + br^2 + dr + b \\ &= N_1(r)v_1 + N_2(r)v_2 + N_1^\theta(r)\theta_1 + N_2^\theta(r)\theta_2 \end{aligned}$$

où les fonctions de forme  $N_i$  et  $N_i^\theta$  sont cubiques en  $r$ . L'approximation du déplacement est donc cubique en  $r$  et celle de la rotation quadratique.

### 2.3.9 En dimension trois

En dimension trois, la cinématique est définie à partir de trois composantes de déplacement et trois de rotation de la section :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\mathbf{G}) &= u\vec{x}_1 + v\vec{x}_2 + w\vec{x}_3 \\ \vec{\Omega} &= \theta_1\vec{x}_1 + \theta_{f2}\vec{x}_2 + \theta_{f3}\vec{x}_3 \end{aligned}$$

La poutre peut être sollicitée selon six modes qui correspondent aux six composantes du torseur des efforts intérieurs (Fig. 13).

- traction,
- cisaillement dans la direction **2**,
- flexion dans le plan (**1**, **2**),
- cisaillement dans la direction **3**,
- flexion dans le plan (**1**, **3**),
- torsion.

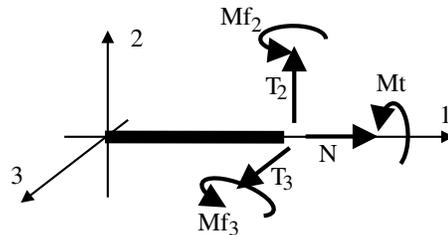


FIG. 13 – Efforts intérieurs en 3D

Les modes de cisaillement en **2** (effort  $T_2$ ) et de flexion dans le plan (**1**, **2**) (moment  $M_{f3}$ ) sont liés comme on l'a vu en dimension deux. Il en va de même pour les modes de cisaillement en **3** (effort  $T_3$ ) et de flexion dans le plan (**1**, **3**) (moment  $M_{f2}$ ).

Ces efforts et moments sont les composantes du torseur des efforts intérieurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_S \sigma_{11} dS \\ T_2 = \int_S \sigma_{12} dS \\ T_3 = \int_S \sigma_{13} dS \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_t = \int_S x_3 \sigma_{12} - x_2 \sigma_{13} dS \\ M_{f3} = \int_S -x_2 \sigma_{11} dS \\ M_{f2} = \int_S x_3 \sigma_{11} dS \end{array} \right.$$

On a donc quatre modes indépendants traction, torsion et deux flexions.

Le mode de traction est formulé comme pour les barres.

Le problème de torsion se formule de la même manière que le problème de traction. L'approximation nodale est du même type. Elle porte sur l'angle de torsion  $\theta_t$  (angle de rotation de la section autour de la ligne moyenne). La déformation est représentée par l'angle unitaire de torsion  $\chi_t$  et l'effort intérieur par le moment de torsion  $M_t$ .

Les modes de flexion-cisaillement se formulent tous les deux de manières indépendantes comme le mode de flexion en dimension deux.

Une fois les composantes d'efforts intérieurs calculés en tout point de la ligne moyenne, la contrainte normale  $\sigma_{11}$  peut se calculer de la manière suivante en tout point d'une section droite :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} - \frac{M_{f3}}{I_2} x_2 + \frac{M_{f2}}{I_3} x_3$$

L'énergie de déformation est composée de termes dépendant de chacun des modes de déformation.

- MIDLIN : l'énergie contient un terme de traction, un terme de torsion, deux termes de cisaillement et deux de flexion :

$$E_d = \int_0^L (N\epsilon) + (M_t\chi_t) + (T_2\gamma_2) + (T_3\gamma_3) + (M_{f3}\chi_{f3}) + (M_{f2}\chi_{f2}) dx_1$$

- BERNOULLI : l'énergie ne contient qu'un terme de traction, un terme de torsion et deux de flexion :

$$E_d = \int_0^L (N\epsilon) + (M_t\chi_t) + (M_{f3}\chi_{f3}) + (M_{f2}\chi_{f2}) dx_1$$

### 2.3.10 Bilan

Le tableau 2 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments *poutre* en dimension trois et le repère dans lequel elles sont exprimées.

Elément	Quantités	Noms	Qualité	Repère
Poutre Bernoulli	Déplacement	$u_x, u_y (u_z)$	linéaire/cubique	global
	Rotation	$\omega_x, \omega_y (\omega_z)$	linéaire/quadratique	global
	Déformations	$\epsilon$	constant	local
		$\gamma_2, \gamma_3$	nulles	local
	Courbures	$\chi_t$	constant	local
		$\chi_{f3}, \chi_{f2}$	linéaires	local
	Efforts	$N$	constant	local
		$T_2, T_3$	constants	local
Moment	$M_t$	constant	local	
	$M_{f3}, M_{f2}$	linéaires	local	
Contrainte	$\sigma_{11}$	linéaire	local	
Poutre Midlin	Déplacement	$u_x, u_y (u_z)$	linéaire	global
	Rotation	$\omega_x, \omega_y (\omega_z)$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon$	constant	local
		$\gamma_2, \gamma_3$	constantes	local
	Courbures	$\chi_t$	constant	local
		$\chi_{f3}, \chi_{f2}$	constantes	local
	Efforts	$N$	constant	local
		$T_2, T_3$	constants	local
Moment	$M_t$	constant	local	
	$M_{f3}, M_{f2}$	constants	local	
Contrainte	$\sigma_{11}$	linéaire / $x_1$ constant / $x_2$ et $x_3$	local	

TAB. 2 – Eléments Finis Poutres

### 3 Eléments bidimensionnels

Dans les modélisations *massives* (c'est-à-dire les modélisations où ne peut pas être faite l'approximation poutre ni l'approximation plaque), on distingue les cas de modélisation plane (contraintes ou déformations planes) et les cas de modélisations axisymétriques.

#### 3.1 Modèle plan

##### 3.1.1 Modélisation

Dans un problème plan (dans le plan  $(x, y)$  par exemple), les composantes de déplacement recherchées sont :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle u_x \quad u_y \rangle$$

Les cisaillements hors plan sont nuls ( $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$  et  $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ ). La distinction contraintes ou déformations planes donne :

– Contraintes planes :

$$\sigma_{zz} = 0 \Rightarrow \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

– Déformations planes :

$$\epsilon_{zz} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

La contrainte et la déformation hors plan peuvent donc être calculées en post-traitement. Le vecteur éléments finis des déformations à calculer est donc :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad 2\epsilon_{xy} \rangle$$

et celui des contraintes :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rangle$$

L'opérateur de comportement sera différent selon qu'on est en contraintes ou déformations planes :

$$\langle \sigma \rangle = \mathbf{C}_{cp} \langle \epsilon \rangle \quad \text{ou} \quad \langle \sigma \rangle = \mathbf{C}_{dp} \langle \epsilon \rangle$$

où  $\mathbf{C}_{cp}$  et  $\mathbf{C}_{dp}$  s'expriment en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ .

Les deux types de comportement plans se formulant de la même manière, on ne les distingue plus dans la suite.

Contrairement aux formulations poutres et plaques, où le comportement s'exprime simplement dans un repère local lié à la ligne ou la surface moyenne, on travaille ici directement dans le repère global  $(x, y)$ .

L'approximation nodale porte toujours sur les déplacements. On utilise en général la même approximation dans les deux directions  $x$  et  $y$ . On parle alors d'éléments finis *isotropes*.

### 3.1.2 Éléments triangulaires

**Élément triangulaire à trois noeuds** Pour cet l'élément, on utilise une approximation linéaire des déplacements qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 14) :

$$\begin{aligned}
 u_x(r, s) &= a_1 r + b_1 s + c_0 \\
 &= (1 - r - s)u_{x1} + ru_{x2} + su_{x3} \\
 &= N_1(r, s)u_{x1} + N_2(r, s)u_{x2} + N_3(r, s)u_{x3} \\
 u_y(r, s) &= d_1 r + e_1 s + f_0 \\
 &= (1 - r - s)u_{y1} + ru_{y2} + su_{y3} \\
 &= N_1(r, s)u_{y1} + N_2(r, s)u_{y2} + N_3(r, s)u_{y3}
 \end{aligned}$$

Cette approximation est dite *Lagrange complète de degré un*, c'est-à-dire que l'approximation contient tous les polynômes jusqu'au degré un :  $1$ ,  $r$  et  $s$ .

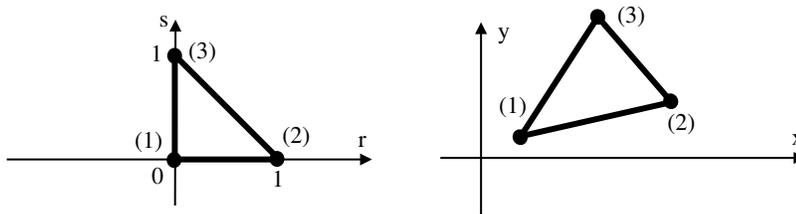


FIG. 14 – Élément triangulaire à trois noeuds

Les déformations sont donc constantes sur l'élément. On le voit en les calculant dans le cas particulier où le repère de référence et le repère global sont confondus :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{du_x}{dx} = a_1 \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{du_y}{dy} = e_1 \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) = \frac{1}{2} (b_1 + d_1)
 \end{aligned}$$

Les contraintes sont donc elles aussi constantes sur l'élément.

**Élément triangulaire à six noeuds** Pour cet l'élément, on utilise une approximation quadratique des déplacements qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 15) :

$$\begin{aligned}
 u_x(r, s) &= a_2 r^2 + b_2 s^2 + a_1 r + b_1 s + c_1 r s + c_0 \\
 &= N_1(r, s)u_{x1} + \dots + N_6(r, s)u_{x6} \\
 u_y(r, s) &= d_2 r^2 + e_2 s^2 + d_1 r + e_1 s + f_1 r s + f_0 \\
 &= N_1(r, s)u_{y1} + \dots + N_6(r, s)u_{y6}
 \end{aligned}$$

Cette approximation est dite *Lagrange complète de degré deux*, c'est-à-dire que l'approximation contient tous les polynômes de degré deux :  $1$ ,  $r$ ,  $s$ ,  $r^2$ ,  $s^2$  et  $rs$ .

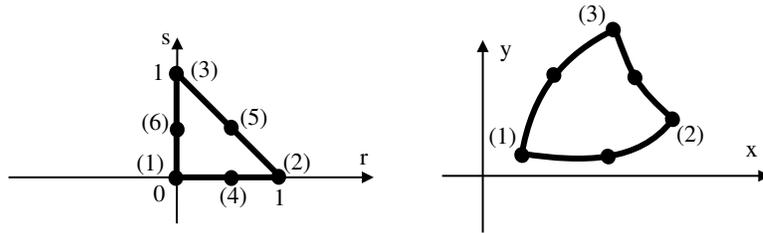


FIG. 15 – Élément triangulaire à six noeuds

### 3.1.3 Éléments quadrangulaires

**Élément quadrangulaire à quatre noeuds** Pour cet l'élément, on utilise une approximation quasi-linéaire des déplacements qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 16). La forme particulière de cet élément fait qu'il contient un terme non linéaire en  $rs$  :

$$\begin{aligned}
 u_x(r, s) &= a_1 r + b_1 s + c_1 r s + c_0 \\
 &= N_1(r, s)u_{x1} + \dots + N_4(r, s)u_{x4} \\
 u_y(r, s) &= d_1 r + e_1 s + f_1 r s + f_0 \\
 &= N_1(r, s)u_{y1} + \dots + N_4(r, s)u_{y4}
 \end{aligned}$$

Cette approximation n'est pas *Lagrange complète de degré deux*, car il manque les polynômes  $r^2$  et  $s^2$ . Elle est *incomplète de degré deux*. Ce type d'approximation est dit de *Serendip*.

Les déformations ne sont donc pas constantes sur l'élément. On le voit en les calculant dans le repère de référence (par exemple dans le cas où le repère de référence et le repère

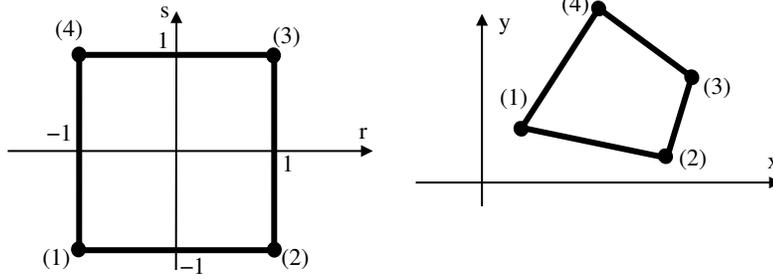


FIG. 16 – Élément quadrangulaire à quatre noeuds

global sont confondus) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{du_x}{dx} &= a_1 + c_1y \\ \epsilon_{yy} &= \frac{du_y}{dy} &= d_1 + f_1x \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) &= \frac{1}{2} (b_1 + e_1 + c_1x + f_1y) \end{aligned}$$

Les contraintes ne sont donc elles aussi pas constantes sur l'élément.

**Élément quadrangulaire à huit noeuds** Pour cet l'élément, on utilise une approximation quasi-quadratique des déplacements qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 17) :

$$\begin{aligned} u_x(r, s) &= a_2r^2 + b_2s^2 + a_1r + b_1s + c_{12}rs^2 + c_{21}r^2s + c_1rs + c_0 \\ &= N_1(r, s)u_{x1} + \dots + N_8(r, s)u_{x8} \\ u_y(r, s) &= d_2r^2 + e_2s^2 + d_1r + e_1s + f_{12}rs^2 + f_{21}r^2s + f_1rs + f_0 \\ &= N_1(r, s)u_{y1} + \dots + N_8(r, s)u_{y8} \end{aligned}$$

Cette approximation n'est pas *Lagrange complète de degré trois*, car il manque les polynômes  $r^3$  et  $s^3$ . Elle est *incomplète de degré trois*. Ce type d'approximation est dite de *Serendip*.

### 3.1.4 Bilan

Le tableau 3 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments massifs bidimensionnels sous l'hypothèse de contraintes ou déformations planes et le repère dans lequel elles sont exprimées.

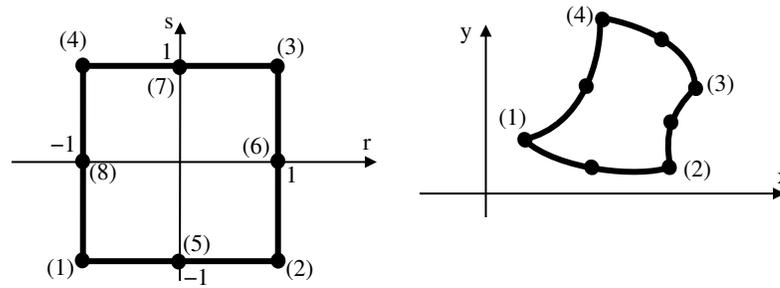


FIG. 17 – Elément quadrangulaire à huit noeuds

Elément	Quantités	Noms	Qualité	Repère
Triangle 3 noeuds	Déplacement Déformations Contraintes	$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}$ $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$	linéaire constant constant	global global global
Triangle 6 noeuds	Déplacement Déformations Contraintes	$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}$ $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$	quadratique linéaire linéaire	global global global
Quadrangle 4 noeuds	Déplacement Déformations Contraintes	$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}$ $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$	linéaire linéaire <sup>1</sup> linéaire <sup>1</sup>	global global global
Quadrangle 8 noeuds	Déplacement Déformations Contraintes	$\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}$ $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}$	quadratique linéaire linéaire	global global global

TAB. 3 – Eléments Finis bidimensionnels

## 3.2 Modèle axisymétrique

### 3.2.1 Modélisation

Dans une modélisation plane axisymétrique, on travaille dans un espace  $(r, \theta, z)$  et la surface considérée dans le plan  $(r, z)$  représente une tranche d'une pièce axisymétrique.

Les composantes de déplacement recherchées sont :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}_r \quad \mathbf{u}_z \rangle$$

De la même manière que pour les problèmes de contraintes ou déformations planes, les cisaillements hors plans sont nuls donc le vecteur éléments finis des déformations à calculer :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{rr} \quad \epsilon_{\theta\theta} \quad \epsilon_{zz} \quad 2\epsilon_{rz} \rangle$$

<sup>1</sup>à cause d'un terme linéaire dû à la présence du terme  $rs$  dans l'approximation nodale

et celui des contraintes :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{rr} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{rz} \rangle$$

### 3.2.2 Éléments finis axisymétriques

Les éléments axisymétriques sont les mêmes que les éléments de contraintes ou déformations planes. Ils possèdent les mêmes propriétés. Par exemple, l'élément triangulaire à trois noeuds est représenté sur la figure 18. L'approximation nodale est linéaire :

$$\begin{aligned} u_r(r, s) &= a_1 r + b_1 s + c_0 \\ &= (1 - r - s)u_{r1} + ru_{r2} + su_{r3} \\ &= N_1(r, s)u_{r1} + N_2(r, s)u_{r2} + N_3(r, s)u_{r3} \\ u_z(r, s) &= d_1 r + e_1 s + f_0 \\ &= (1 - r - s)u_{z1} + ru_{z2} + su_{z3} \\ &= N_1(r, s)u_{z1} + N_2(r, s)u_{z2} + N_3(r, s)u_{z3} \end{aligned}$$

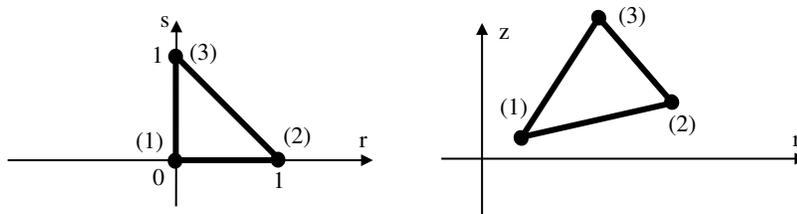


FIG. 18 – Élément triangulaire axisymétrique à trois noeuds

La correspondance est identique pour les autres types d'éléments : triangles à six noeuds et quadrangles à quatre ou huit noeuds.

### 3.2.3 Bilan

Le tableau 4 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments massifs bidimensionnels sous l'hypothèse d'axisymétrie et le repère dans lequel elles sont exprimées.

Élément	Quantités	Noms	Qualité	Repère
Triangle 3 noeuds	Déplacement	$\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_z$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}$	constant	global
	Contraintes	$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$	constant	global
Triangle 6 noeuds	Déplacement	$\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_z$	quadratique	global
	Déformations	$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}$	linéaire	global
	Contraintes	$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$	linéaire	global
Quadrangle 4 noeuds	Déplacement	$\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_z$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}$	linéaire <sup>2</sup>	global
	Contraintes	$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$	linéaire <sup>2</sup>	global
Quadrangle 8 noeuds	Déplacement	$\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_z$	quadratique	global
	Déformations	$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{rz}$	linéaire	global
	Contraintes	$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$	linéaire	global

\*à cause d'un terme linéaire dû à la présence du terme  $rs$  dans l'approximation nodale

TAB. 4 – Eléments Finis bidimensionnels axisymétriques

<sup>2</sup>mais contient un terme linéaire dû à la présence du terme  $rs$  dans l'approximation nodale

## 4 Eléments massifs tridimensionnels

### 4.1 Modélisation

Dans un problème massif tridimensionnel, les composantes de déplacement recherchées sont :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle u_x \quad u_y \quad u_z \rangle$$

Le vecteur éléments finis des déformations à calculer est donc :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad 2\epsilon_{xy} \quad 2\epsilon_{xz} \quad 2\epsilon_{yz} \rangle$$

et celui des contraintes :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle$$

### 4.2 Eléments finis tridimensionnels

La figure 19 présente les éléments finis tridimensionnels les plus utilisés. Elle donne les éléments de référence avec leurs dimensions :

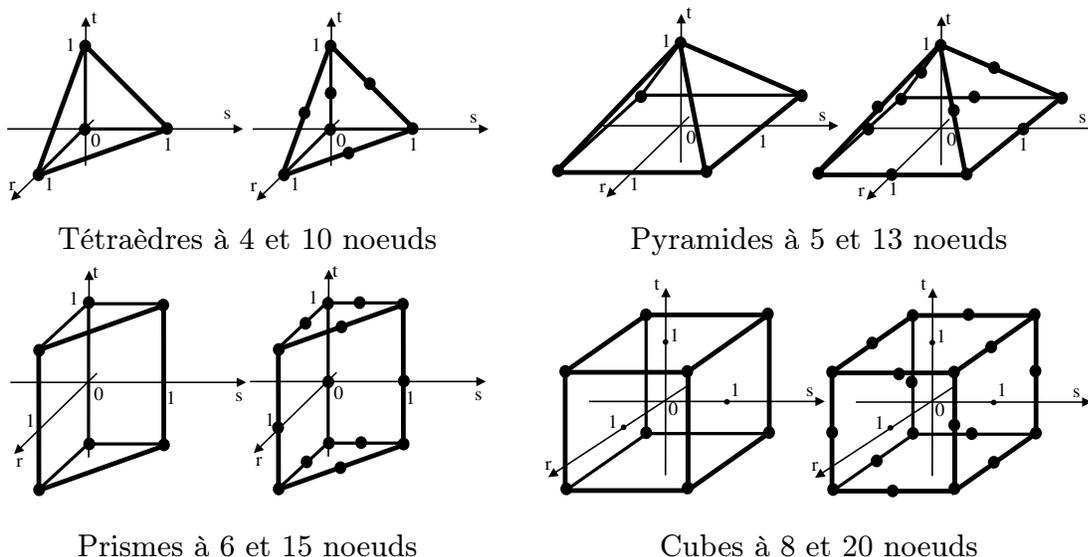


FIG. 19 – Eléments finis tridimensionnels

Nous ne détaillons pas tous ces éléments ni les autres qui pourraient exister dans des codes de calculs. Nous donnons simplement l'approximation nodale élémentaire pour le tétraèdre à quatre nœuds et le cube à huit nœuds, ainsi qu'un bilan des quantités calculables pour tous les éléments de la figure 19.

### 4.2.1 Éléments tétraédriques

**Élément tétraédrique à quatre noeuds** Pour cet élément, on utilise une approximation linéaire des déplacements qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 20) :

$$\begin{aligned}
 u_x(r, s, t) &= a_1 r + b_1 s + c_1 t + d_0 \\
 &= (1 - r - s - t)u_{x1} + ru_{x2} + su_{x3} + tu_{x4} \\
 &= N_1(r, s, t)u_{x1} + N_2(r, s, t)u_{x2} + N_3(r, s, t)u_{x3} + N_4(r, s, t)u_{x4} \\
 u_y(r, s, t) &= e_1 r + f_1 s + g_1 t + h_0 \\
 &= (1 - r - s - t)u_{y1} + ru_{y2} + su_{y3} + tu_{y4} \\
 &= N_1(r, s, t)u_{y1} + N_2(r, s, t)u_{y2} + N_3(r, s, t)u_{y3} + N_4(r, s, t)u_{y4} \\
 u_z(r, s, t) &= i_1 r + j_1 s + k_1 t + l_0 \\
 &= (1 - r - s - t)u_{z1} + ru_{z2} + su_{z3} + tu_{z4} \\
 &= N_1(r, s, t)u_{z1} + N_2(r, s, t)u_{z2} + N_3(r, s, t)u_{z3} + N_4(r, s, t)u_{z4}
 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une approximation *Lagrange complète de degré un*.

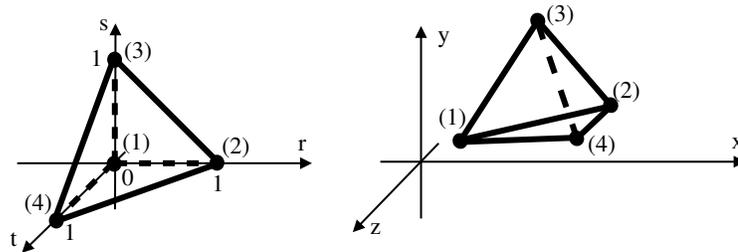


FIG. 20 – Élément tétraédrique à quatre noeuds

Les déformations sont donc constantes sur l'élément. On le voit en les calculant dans le cas particulier où le repère de référence et le repère global sont confondus ( $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{s}$  et  $\mathbf{z} = \mathbf{t}$ ) :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{du_x}{dx} = a_1 \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{du_y}{dy} = f_1 \\
 \epsilon_{zz} &= \frac{du_z}{dz} = k_1 \\
 \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} \right) = \frac{1}{2} (b_1 + e_1) \\
 \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{du_x}{dz} + \frac{du_z}{dx} \right) = \frac{1}{2} (c_1 + i_1) \\
 \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{du_y}{dz} + \frac{du_z}{dy} \right) = \frac{1}{2} (g_1 + j_1)
 \end{aligned}$$

Les contraintes sont donc elles aussi constantes sur l'élément.

#### 4.2.2 Éléments cubiques

**Élément cubique à huit noeuds** Pour cet élément, on utilise une approximation quasi-linéaire des déplacements qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 20) :

$$\begin{aligned}
 u_x(r, s, t) &= a_1 r + b_1 s + c_1 t + d_{12} r s + d_{13} r t + d_{23} s t + d_1 r s t + d_0 \\
 &= N_1(r, s, t) u_{x1} + N_2(r, s, t) u_{x2} + N_3(r, s, t) u_{x3} + N_4(r, s, t) u_{x4} + \\
 &\quad N_5(r, s, t) u_{x5} + N_6(r, s, t) u_{x6} + N_7(r, s, t) u_{x7} + N_8(r, s, t) u_{x8} \\
 u_y(r, s, t) &= \dots \\
 u_z(r, s, t) &= \dots
 \end{aligned}$$

L'approximation n'est pas Lagrange complète de degré deux. Elle est de type *Serendip*.

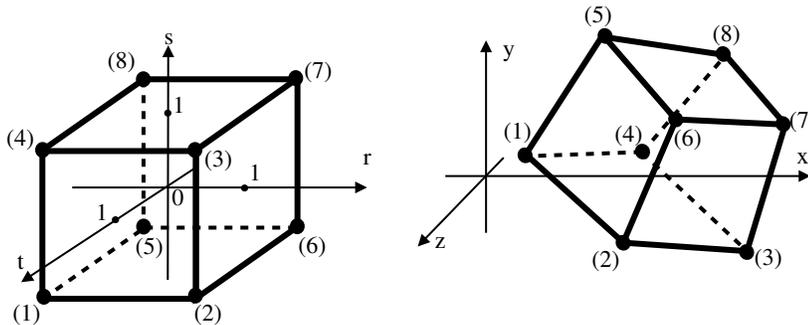


FIG. 21 – Élément cubique à huit noeuds

Comme dans le cas des quadrangles, les déformations ne sont pas constantes sur l'élément. Il reste des termes en  $r$ ,  $s$ ,  $t$  et en  $rs$ ,  $rt$  et  $st$ . Les contraintes ne sont donc elles aussi pas constantes sur l'élément.

### 4.3 Bilan

Le tableau 5 présente un bilan des quantités qui peuvent être calculées dans les éléments massifs bidimensionnels sous l'hypothèse de contrainte ou de déformation plane et le repère dans lequel elles sont exprimées.

Elément	Quantités	Noms	Qualité	Repère
Tétraèdre 4 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	constant	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	constant	global
Tétraèdre 10 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	quadratique	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	linéaire	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	linéaire	global
Pyramide 5 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	constant	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	constant	global
Pyramide 13 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	quadratique	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	linéaire	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	linéaire	global
Prisme 6 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	constant	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	constant	global
Prisme 15 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	quadratique	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	linéaire	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	linéaire	global
Cube 8 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	linéaire	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	constant	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	constant	global
Cube 20 noeuds	Déplacement	$u_x, u_y, u_z$	quadratique	global
	Déformations	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$	linéaire	global
	Contraintes	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$	linéaire	global

TAB. 5 – Eléments Finis tridimensionnels

## 5 Éléments structuraux 2D

Il existe un très grand nombre d'éléments finis plaques et coques. Nous ne nous intéressons ici qu'à ceux qui sont nécessaires à la compréhension du reste de ce cours.

### 5.1 Éléments plaques

#### 5.1.1 Définition

Une plaque est un solide tridimensionnel de forme plane dont deux des dimensions sont prépondérantes devant la troisième (la normale).

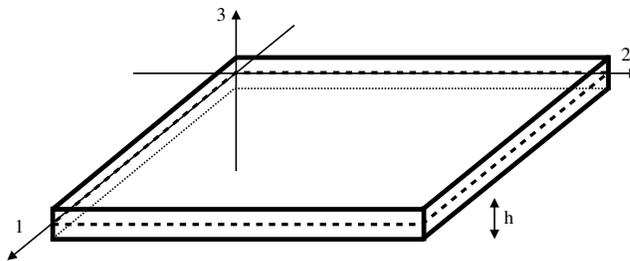


FIG. 22 – Modèle plaque

Dans la pratique, elle est seulement définie par la donnée de sa surface moyenne et de son épaisseur  $h$ .

La plaque peut admettre deux modes de sollicitation différents et découplés en petites perturbations :

- mode de tension (ou de membrane) : déformations dans son plan moyen (**1**, **2**).
- mode de flexion : mouvement hors plan dans la direction **3**.

#### 5.1.2 Cinématique

Compte tenu des dimensions particulières du solide, l'hypothèse cinématique fondamentale est que : *les points matériels situés sur les normales à la surface moyenne non déformée (des segments) restent sur une droite.*

Comme pour les poutres, il existe deux types d'hypothèses cinématiques pour les poutres.

- la cinématique de MIDLIN/HENCKY/REISSNER dont le principe de base est *les segments droits avant déformation restent droits après déformation*
- la cinématique de KIRCHHOFF/LOVE dont le principe de base est *les segments droits avant déformation restent droits et normaux à la surface moyenne après déformation*

Comme pour les poutres, les deux théories de plaques se distinguent par la prise en compte ou non du cisaillement transversal.

Compte tenu des hypothèses cinématiques, le déplacement de tout point d'un segment droit se déduit du déplacement du centre du segment et de la rotation du segment (fig 23) :

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(G) + \vec{\beta} \wedge G\vec{M}$$

avec :

$$\begin{aligned}\vec{u}(G) &= u\vec{x}_1 + v\vec{x}_2 + w\vec{x}_3 \\ \langle \vec{\beta} \rangle &= \beta_1\vec{x}_2 + \beta_2\vec{x}_1\end{aligned}$$

avec :

- $u$  et  $v$  : déplacements de membrane,
- $w$  : déplacement hors plan (flèche),
- $\beta_1$  et  $\beta_2$  : rotation de la normale.

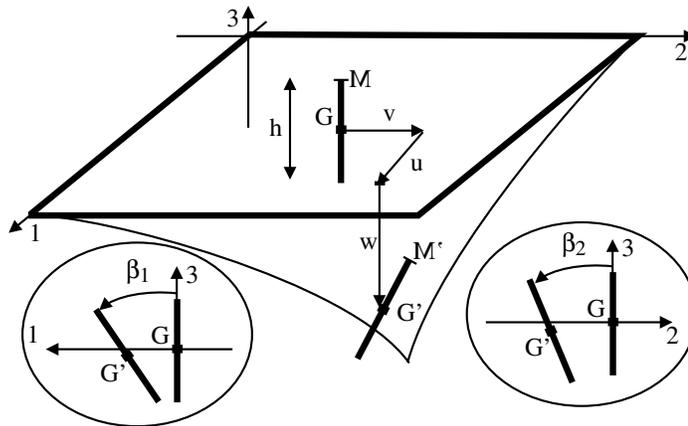


FIG. 23 – Cinématique d'une plaque

Les deux modes de déformation indépendants sont :

- mode de tension : déplacements  $u$  et  $v$
- mode de flexion : déplacement  $w$  et rotations  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

### 5.1.3 Déformations

Les déformations peuvent être regroupées en trois catégories :

- déformation de **membrane** :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\epsilon_{12} \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \right\rangle$$

- déformation de **flexion** (courbures) :

$$\langle \chi_f \rangle = \langle \chi_{f1} \quad \chi_{f2} \quad 2\chi_{f2} \rangle = \left\langle \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} \quad \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} \right) \right\rangle$$

- déformation de **cisaillement transversal** :

$$\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{13} \quad \gamma_{23} \rangle = \langle 2\epsilon_{13} \quad 2\epsilon_{23} \rangle = \left\langle \left( \beta_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \quad \left( \beta_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \right\rangle$$

#### Remarques

- la déformation dans l'épaisseur  $\epsilon_{33}$  est nulle.
- les déformations  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{12}$  varient linéairement dans l'épaisseur.
- les cisaillements  $\gamma_{13}$  et  $\gamma_{23}$  sont constants dans l'épaisseur. Ils traduisent les glissements possibles des feuillettes de la plaque les uns par rapport aux autres.

Dans la théorie de KIRCHHOFF, les cisaillements transverses sont négligés :

$$\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \beta_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2} \end{cases}$$

#### 5.1.4 Contraintes

L'hypothèse de contraintes planes  $\epsilon_{33} = 0$  est communément admise pour les plaques. Les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont :

$$\sigma = \langle \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23} \rangle$$

Dans les plaques, ces contraintes sont représentées par les efforts intérieurs :

- efforts intérieurs de **membrane**, efforts dans le plan moyen par unité de longueur :

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_{12} \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}) dx_3$$

- efforts intérieurs de **flexion**, moments dans le plan moyen par unité de longueur :

$$\langle M \rangle = \langle M_1 \quad M_2 \quad M_{12} \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}) dx_3$$

- efforts intérieurs de **cisaillement transversal**, efforts tranchants dans le plan moyen par unité de longueur :

$$\langle Q \rangle = \langle Q_1 \quad Q_2 \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{13} \quad \sigma_{23}) dx_3$$

Ces efforts intérieurs, sont liés aux déformations par la relation de comportement élastique (qui est ici écrite localement puis intégrée dans l'épaisseur de la plaque). Ces relations sont :

- comportement en **membrane** :

$$\{N\} = [D_m] \{\epsilon_m\} \quad \text{avec} \quad [D_m] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

( $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ , est appelé raideur en membrane).

- comportement en **flexion** :

$$\{M\} = [D_f] \{\chi_f\} \quad \text{avec} \quad [D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

( $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ , est appelé raideur en flexion).

- comportement en **cisaillement transverse** :

$$\{Q\} = [D_c] \{\gamma\} \quad \text{avec} \quad [D_c] = Ghk \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( $K = Ghk$ , est appelé raideur en cisaillement, K est le coefficient de réduction de la section).

### 5.1.5 Energie de déformation

Comme dans le cas des poutres, l'énergie de déformation dépend de la cinématique utilisée :

- MIDLIN :

$$\begin{aligned} E_d &= \iint_S (\{\epsilon\}^t \{N\}) + (\{\chi_f\}^t \{M\}) + (\{\gamma\}^t \{Q\}) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_S (\{\epsilon\}^t [D_m] \{\epsilon\}) + (\{\chi_f\}^t [D_f] \{\chi_f\}) + (\{\gamma\}^t [D_c] \{\gamma\}) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

- KIRCHHOFF :

$$\begin{aligned} E_d &= \iint_S (\{\epsilon\}^t \{N\}) + (\{\chi_f\}^t \{M\}) dx_1 dx_2 \\ &= \iint_S (\{\epsilon\}^t [D_m] \{\epsilon\}) + (\{\chi_f\}^t [D_f] \{\chi_f\}) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

### 5.1.6 Éléments finis plaque

Dans la description des éléments finis plaque, nous ne nous intéressons qu'au problème de flexion, car le problème de membrane est rigoureusement identique à un problème de contrainte plane sur un modèle massif qui est traité dans la section précédente.

**Élément quadrangulaire à quatre noeuds** Pour cet l'élément, on utilise une approximation linéaire du déplacement  $w$  et des rotations qui est définie sur l'élément de référence (Fig. 24) :

$$\begin{aligned}
 w(r, s) &= a_1 r + b_1 s + c_1 r s + c_0 \\
 &= N_1(r, s)w_1 + N_2(r, s)w_2 + N_3(r, s)w_3 + N_4(r, s)w_4 \\
 \beta_1(r, s) &= d_1 r + e_1 s + f_1 r s + f_0 \\
 &= N_1(r, s)\beta_{11} + N_2(r, s)\beta_{12} + N_3(r, s)\beta_{13} + N_4(r, s)\beta_{14} \\
 \beta_2(r, s) &= g_1 r + h_1 s + i_1 r s + i_0 \\
 &= N_1(r, s)\beta_{21} + N_2(r, s)\beta_{22} + N_3(r, s)\beta_{23} + N_4(r, s)\beta_{24}
 \end{aligned}$$

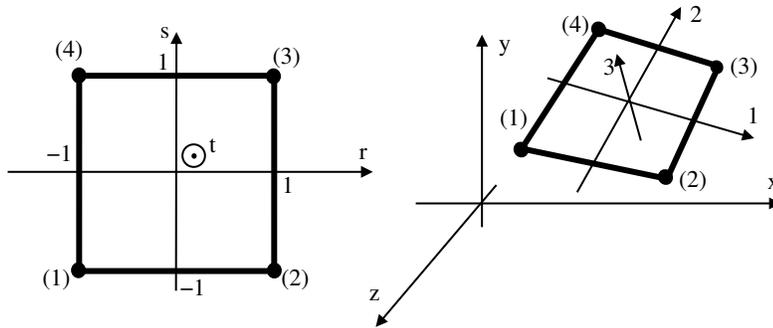


FIG. 24 – Élément plaque quadrangulaire à quatre noeuds

Pour assurer la continuité avec les éléments adjacents, les degrés de liberté de l'élément sont les déplacements  $u_{xi}$ ,  $u_{yi}$ ,  $u_{zi}$  et les rotations  $\beta_{xi}$ ,  $\beta_{yi}$  et  $\beta_{zi}$  des noeuds dans le repère global. Ces degrés de liberté sont liés aux déplacements dans le repère local par la transformation géométrique.

Les déformations et les contraintes sont donc quasiment constantes, au terme près en  $rs$ .

**Élément plaque de Kirchhoff** La création d'un élément plaque vérifiant les hypothèses cinématiques de Kirchhoff, n'est pas aisée, car de tels éléments donnent souvent de mauvais résultats à cause de problèmes de blocage (voir chapitre sur les problèmes spécifiques).

Un élément très utilisé est l'élément triangulaire DKT (Discrete Kirchhoff Triangle), dû à Batoz. Cet élément vérifie les hypothèses de Kirchhoff en moyenne seulement (la condition cinématique de Kirchhoff n'est vérifiée qu'au milieu des arêtes).

Son équivalent en quadrangle (le DKQ) est aussi largement répandu.

Nous n'entrons pas dans les détails de ces éléments à la formulation compliquée.

## 5.2 Eléments coques

### 5.2.1 Définition

Une coque est aussi un solide tridimensionnel dont deux des dimensions sont prépondérantes devant la troisième (Fig. 25). Contrairement aux plaques, la surface moyenne est de forme quelconque non plane.

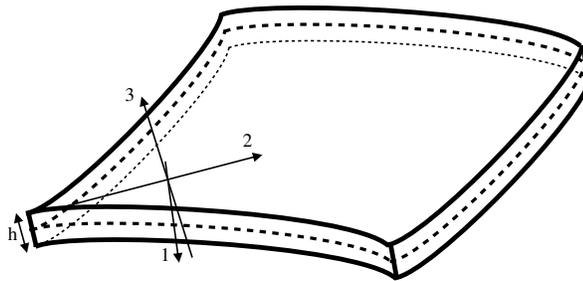


FIG. 25 – Modèle coque

Dans la pratique, elle est seulement définie par la donnée de sa surface moyenne et de son épaisseur  $h$ .

Comme une plaque, une coque peut admettre deux modes de sollicitation différents mais ces deux modes (membrane et flexion) ne sont découplés que localement en chaque point. Ils sont couplés à l'échelle de l'élément. Ce couplage entre tension et flexion génèrent de très forts problèmes de blocage des éléments (voir le chapitre sur les problèmes spécifiques).

Dans la pratique, lorsque les rayons de courbure sont faibles, il est possible de représenter une coque par un ensemble d'éléments de plaque (on *facétise* la coque). Le couplage entre tension et flexion est alors obtenu grâce à la discontinuité de normale entre deux éléments adjacents.

La création d'éléments finis coques est toujours un très vaste sujet de recherche.

## 6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les différentes formulations utilisées en mécanique et quelques uns des éléments finis associés. Il en existe beaucoup plus que ceux

listés dans ce chapitre. Nous vous invitons à consulter systématiquement les documentations des logiciels avant d'utiliser un élément.

## Références

- [1] Batoz J.L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Volume I - Solides élastiques*, Hermès, 1990.
- [2] Batoz J.L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Volume II - Poutres et Plaques*, Hermès, 1990.
- [3] Batoz J.L. et Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis, Volume III - Coques*, Hermès, 1992.
- [4] Trompette Ph., *Mécanique des structures par la méthode des éléments finis finis*, Masson, 1992.
- [5] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : *The Finite Element Method Volume 1 : The Basics*, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.